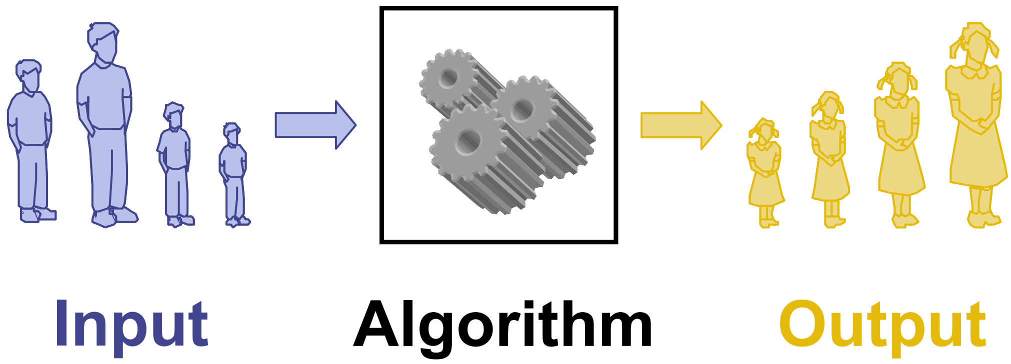
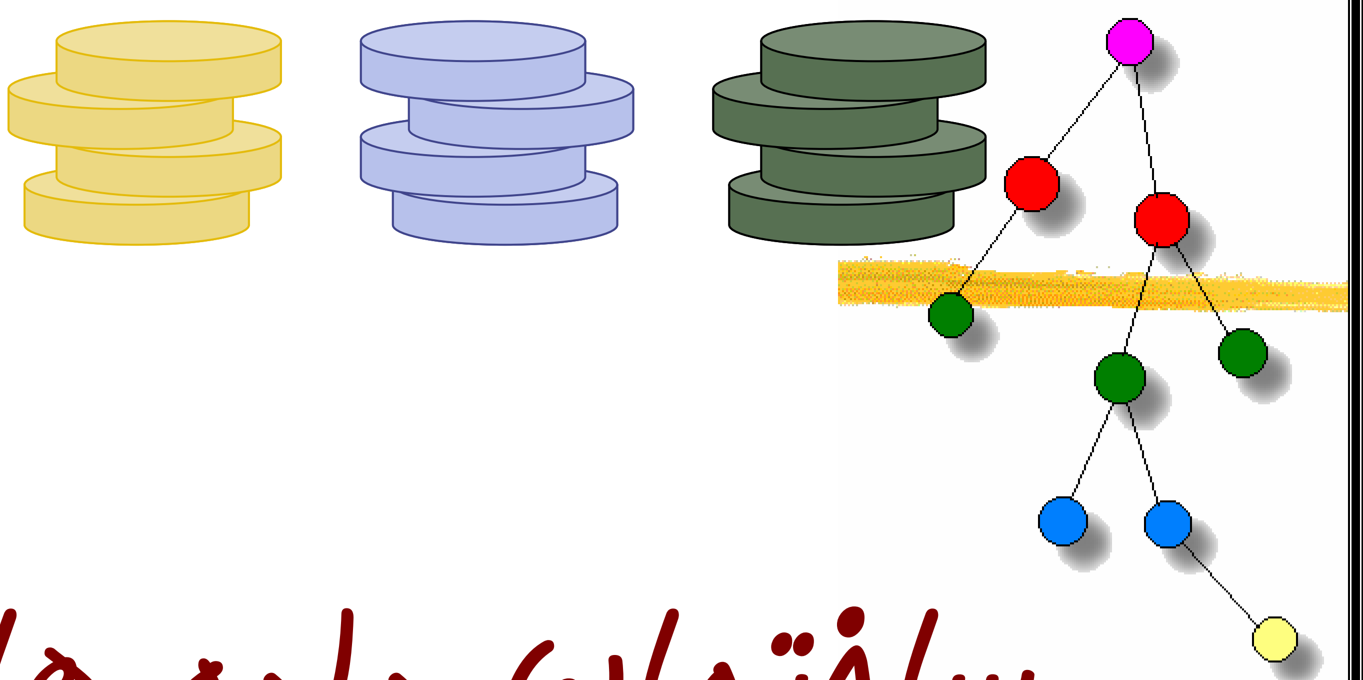
# Data Structures



# ساختمان داده ها

**نیک محمد بلوچ زهی**

گروه مهندسی  فناوری اطلاعات

دانشگاه سیستان و بلوچستان

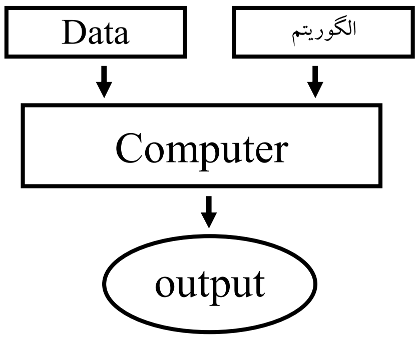
## فصل اول پیچیدگی الگوریتمها Complexity

### ساختمان داده:

- ✓ به مدل ریاضی سازماندهی داده ها ، ساختمان داده گفته میشود.
- ✓ به ساختارهایی که جهت ذخیره سازی ، بازیابی و ... اطلاعات بکار می روند ساختمان داده گفته میشود.

**برای انجام هر عملی در کامپیوتر نیاز به دو عنصر مهم داریم:**

- ✓ الگوریتم: که باید مناسب و کارا باشد.
- ✓ ساختمان داده مناسب: تا داده ها به درستی در آن سازماندهی شوند.




- معیار برتری یک الگوریتم نسبت به الگوریتم دیگر جیست؟

با توجه به اینکه برای انجام هر مساله ای الگوریتمهای متفاوتی وجود دارد ، باید کاراترین راه حل برای حل مسئله را پیدا کنیم که تعیین کارایی یک الگوریتم با توجه به دو فاکتور زیر سنجیده میشود:

- ✓ زمان اجرای الگوریتم
- ✓ میزان حافظه مصرفی الگوریتم

- سوال ۱) چرا به زمان صرف شده برای تولید الگوریتم و رفع اشکال آن و زمان تبدیل آن به برنامه توجه نشده است؟

معیار زمان اجرا وابسته به ماشینی است که الگوریتم بر روی آن اجرا می شود و معیار حافظه مصرفی نیز به روش مدیریت حافظه توسط سیستم عامل بستگی دارد. پس چنانچه بخواهیم دو الگوریتم را با همدیگر مقایسه نماییم باید شرایط کاملا یکسانی برای آنها فراهم نماییم.

- سوال ۲) اگر الگوریتمها توسط افراد متفاوت، در مکانهای متفاوت و با امکانات متفاوت نوشته شوند، چگونه می توان شرایط یکسانی فراهم کرد ؟

جهت فراهم نمودن شرایط یکسان، باید معیارهای فوق را به گونه ای تعریف نمود که مستقل از ماشین و سیستم عامل باشند. دو معیار زیر برای این منظور تعریف شده اند:

- مرتبهٔ زمانی اجرای الگوریتم
- مرتبهٔ مکانی اجرای الگوریتم

برای تشریح معیارهای فوق باید عاملی به نام اندازهٔ مساله باید تعریف گردد:

**اندازه مسئله:**

تعداد داده های، تعداد نتایج و یا ترکیبی از آنهاست.

مثال)

- مرتب سازی آرایه ای با n عنصر: اندازه ورودی n
- جستجوی عنصری در آرایه ای با n عنصر: اندازه ورودی n
- جمع دو ماتریس n*n: اندازه ورودی n
- تعیین k عدد اول سری فیبوناچی : اندازه خروجی k

تعیین عمل اصلی در یک الگوریتم:

به دستور یا دستوراتی که کل کار انجام شده توسط الگوریتم، تقریباً متناسب با تعداد دفعاتی باشد که توسط این دستور یا دستورات انجام می شود، عمل اصلی الگوریتم گویند.

**مرتبه زمانی:**

در اغلب مسائل تابعی از اندازه مساله می باشدو عبارت است از تعداد دفعاتی که عمل اصلی به ازای هر مقدار از اندازهٔ ورودی انجام می شود.

**مثال۱)** روش جستجوی ترتیبی (پیدا کردن y در آرایه x بطول n)

عمل اصلی: مقایسه

اندازه ورودی: n

تعداد دفعات انجام عمل اصلی: n

پس: $T(n) = n$

**مثال۲)** مرتب سازی آرایهٔ X به طول n

```
For (i=1; i<=n-1; i++)
  For (j=1; j<=n-i ; j++)
    If( X[j]>x[j+1])
       Exchange X[j] and X[j+1]
```

عمل اصلی: مقایسه(if)

اندازه ورودی: n

تعداد اعمال مقایسه :

$$T(n) = (n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots + 3 + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

**مثال۳)** ضرب ماتریسهای $X_{M*K}$ و $Y_{K*N}$

**مثال۴)** فرض کنید دو الگوریتم با پیچیدگیهای متفاوت برای حل مساله ای داریم: n برای الگوریتم اول و $n^2$ برای الگوریتم دوم.

الف) کدام الگوریتم کارآمدتر است؟

ب) اگر کامپیوتر مفروضی برای پردازش عمل اصلی الگوریتم اول، ۱۰۰۰ برابر پردازش دستور اصلی الگوریتم دوم زمان لازم داشته باشد، کدام الگوریتم کارآمدتر است؟

**حل)** اگر t زمان لازم جهت یکبار اجرای دستورات اصلی الگوریتم دوم باشد، زمان لازم برای پردازش دستور اصلی الگوریتم دوم 1000t خواهد بود. بنابراین زمان لازم برای پردازش نمونه ای به اندازه n با الگوریتم نخست n*1000t و برای الگوریتم دوم $n^2 * t$ خواهد بود.

الگوریتم اول زمانی بهتر خواهد بود که: $n^2 * t > n * 1000t$

در نتیجه به ازای n>1000 الگوریتم اول کارایی بهتری خواهد داشت.

☑ پس الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $n$ از الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $n^2$ به ازای مقادیر بزرگ $n$ کارایی بیشتری دارد و این از زمان لازم جهت پردازش عملیات اصلی در دو الگوریتم مستقل می باشد.

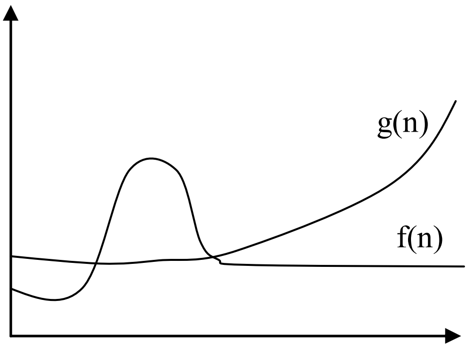
**مثال ۵)** مشابه مثال قبل: اگر پیچیدگی الگوریتم اول برابر $100n$ و پیچیدگی الگوریتم دوم برابر $0.01n^2$ باشد، باز هم به ازای $n > 10.000$ ، الگوریتم اول کارایی بهتری دارد.

- الگوریتمهایی با پیچیدگی زمانی $n$، $100n$، $0.000n$ و امثال اینها را الگوریتمهای زمانی خطی گویند زیرا پیچیدگی زمانی آنها با اندازهٔ ورودی رابطهٔ خطی دارد.
- توابعی نظیر $n^2$، $100n^2$و $5n^2 + 10$را توابع درجه دوم محض گویند و توابعی نظیر $5n^2 + 3n + 100$ را که در آنها علاوه بر درجهٔ دو، درجهٔ اول نیز وجود دارد، توابع درجهٔ دوم کامل گویند.

**معرفی Big O:**

تعریف: می گوییم تابع $f(n)$ از مرتبهٔ $g(n)$است (و بصورت $f(n) = O(g(n))$ نشان می دهیم)، اگر و فقط اگر ثابت حقیقی مثبت $c$ و ثابت صحیح غیرمنفی $n_0$ وجود داشته باشند که برای همهٔ مقادیر $n \le n_0$ انگاه $| f(n) | \le c | g(n) |$.

در رابطهٔ فوق $f(n)$ مبین تعداد اعمال انجام شده در زمان اجرای الگوریتم و $g(n)$ مرتبهٔ زمانی اجرای الگوریتم نامیده می شود.




**مثال۶ )** درستی و یا عدم درستی روابط زیر را نشان دهید.

**الف)** $5n \in O(n^2)$

چون $5n \le 5n^2$ پس به ازای $c=5, n_0=1$ می توان نتیجه گرفت که رابطهٔ فوق درست می باشد.

**ب)** اگر $T(n)=\frac{n(n-1)}{2}$ انگاه $T(n)\in O(n^2)$

می توان نوشت: $\frac{n(n-1)}{2} \le \frac{n(n)}{2} = \frac{1}{2}n^2$ پس $c=\frac{1}{2}$ و $n_0=0$

**ج)** $n^2+10n \in O(n^2)$

$$n^2+10n \le n^2+10n^2 = 11n^2 => c=11, n_0=1$$

**د)** $n \in O(n^2)$

$$c=1, n_0=1$$

- چنانچه پیچیدگی الگوریتمی به اندازهٔ ورودی وابسته نباشد بلکه یک مقدار ثابت مستقل از اندازهٔ ورودی باشد، دراینحالت آنرا بصورت $O(1)$ نشان می دهیم.

**مثال ۷)** برای الگوریتم جستجوی خطی پیچیدگی همهٔ حالات را بدست آورید.

بهترین حالت: O(1)

بدترین حالت: O(n)

حالت متوسط: O((n+1)/2)

| 1 | 2 | 3 | . | . | . | . | . | N |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | |

**مثال۸)** پیچیدگی الگوریتم زیر را تعیین کنید.

```
x=0;
i=n;
while(i>1)
```

تعداد دفعات تکرار حلقه $\log_2 n$

```
{
      x--;
      i /= 2;
}
```

→ $O(\log n)$

**مثال۹)** پیچیدگی الگوریتم زیر را تعیین کنید.

```
x=0;
i=n;
while(i>1)
{
      x--;
      i %= 2;
}
```

a) $O(1)$ ✓
b) $O(n)$
c) $O(\log n)$
d) $O(n \log n)$

**مثال۱۰)** با فرض m=n پیچیدگی الگوریتم زیر را تعیین کنید:

```
For i:=1 to n
      For j:=1 to m
            x++;
```

→ m*n → $O(n^2)$

**مثال۱۱)** پیچیدگی الگوریتم زیر را تعیین کنید.

```
For i:=0 to n do
      For j:=1 to m do
            For k:=1 to j do
      x++;
```

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{j}(1)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(j)=\sum_{i=1}^{n}\frac{m(m+1)}{2}=\frac{mn(m+1)}{2}=$$
$$=\frac{n^2(n+1)}{2}=\frac{n^3+n^2}{2}$$

در چند جمله ای ها بالاترین توان مرتبه پیچیدگی است:

1) $O(n)$ 2) $O(n^2)$ →3) $O(n^3)$ 4) $O(n^2 \log n)$

**مثال۱۲)**

$f(n) = 3 \log n + 10 n \log n + 7 n^2 \rightarrow O(n^2)$

**مثال۱۳)** در کدام گزینه توابع به ترتیب صعودی پیچیدگی مرتب شده اند؟

1) $n^{1000}$ , $n!$ , $(1005)^n$ ✓
2) $(1005)^n$ , $n!$ , $n^{1000}$
3) $n^{1000}$ , $(1005)^n$ , $n!$
4) $(1005)^n$ , $n^{1000}$ , $n!$

**ترتیب اولویت ها:**

$1$ , $\log n$ , $n$ , $n \log n$ , $n^2$ , $n^3$ , . . . , $n^k$ , $2^n$ , $3^n$ , . . . $k^n$ , $n!$

**مثال۱۴)** اگر زمان تست شرط برابر t باشد، پیچیدگی زمانی کد زیر چقدر است؟

| | |
|---|---|
| if (test)<br>    s1<br>else<br>    s2 | 1) t + s1 + s2<br>2) s1 + s2<br>3) t + min (s1+s2)<br>4) t + max (s1+s2) ✓ |

توضیح: همیشه باید بدترین حالت را درنظر گرفت.

**مثال۱۵)**

| | |
|---|---|
| if (test1)<br>    s1<br>else if (test2)<br>    s2 | 1) t1 + t2 + s1 + s2<br>2) s1 + s2<br>3) t1 + t2 +min (s1+s2)<br>4) t1 + t2 +max (s1+s2) ✓ |

**مثال۱۶)**

```
a=n;
while( a>1 )
{
        a /= 2;
        b = n;
        while ( b>1 )
        {
                b /= 3;
                x++;
        }
}
```

➔ $\log_3 n$ ➔ $\log_2 n$ ➔ $O(\log_2 n * \log_3 n)$

**مثال۱۷)**

| | |
|---|---|
| for (k=0; k<=n-1 ; k++)<br>    for (i=0; i<=n-k ; i++)<br>        a[i][i+k] = k; | 1) $n(n-1)/2$<br>2) $n^2/2$<br>3) $n(n+1)/2$ ✓<br>4) $n^2$ |

راه حل:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-k}(1)=\sum_{k=0}^{n-1}n-k=n\sum_{k=0}^{n-1}(1)-\sum_{k=0}^{n-1}(k)=n^2-\frac{n(n-1)}{2}=\frac{2n^2}{2}-\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

**مثال ۱۸)**

```
k = ;
for( i=1; i<=n ; i++)
{
   for( j1; j<=n ; j++)
```

➔ $O(m)$

| | |
|---|---|
| 1) $n! = O(n^n)$ | |
| 2) $2n^2n^n + n^2\log n = O(n^22^n)$ | |
| 3) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = O(n^3)$ | |
| 4) $n^2\log n = O(n^3)$ | |

```
        k=k+1;
    j = 1;
    while (j<n)
    {
        k++;
        j=2*j;
    }
}
```

➔ O(log n)

➔ O(m+log n)

➔ O(n(m+log n))

**تمرین)** از عبارات زیر کدامیک درست و کدامیک نادرست است؟

| | |
|---|---|
| 5) $n^2 \log n = O(n^2)$ | |
| 6) $n^2/\log n = O(n)$ | |
| 7) $n^2/\log n = O(n^2)$ | |
| 8) $n^2 = O(n^3)$ | |

**مثال۱۹)** پیچیدگی الگوریتم زیر را بدست آورید:

```
S=0;
for(i=0 ; i<n; i++)
        for (j=0; j<i; j++)
                for(k=0 ; k<3 ;k++)
                        S++;
```

$O(n^2)$

چون ثابت است ، تاثیری در پیچیدگی ندارد

۱) $o(n)$ ➔ ۲) $O(n^2)$ ۳) $O(n^3)$ ۴) $O(n \log n)$

**مثال۲۰)**

```
S=0;
for(i=1 ; i<=n; i++)
        for (j=i+1; j<=n; j++)
                S++;
```

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}(1)=\sum_{i=1}^{n} n-i-1+1=\sum_{i=1}^{n}(n-i)=n^2-\frac{n(n+1)}{2}\rightarrow O(n^2)$$

**مثال۲۱)** کدامیک از عبارات زیر درست و کدامیک غلط است:

1) $n \log n = O(n\sqrt{n})$ $\sqrt{n} > \log n$ [true]

2) $\sqrt{n} = O(\log n)$ [false]

3) $\log n = O(\sqrt{n})$ [true]

4) $n^2(1+\sqrt{n}) = O(n^2 \log n)$ $n^2\sqrt{n} > n^2 \log n$ [false]

5) $1/n = O(\sqrt{n})$ [true]

6) $1/n = O(\log n)$ [true]

# فصل دوم                    بازگشتی Recursive

## توابع بازگشتی:

هر تابعی که بصورت مستقیم یا غیر مستقیم خودش را فراخوانی کند ، تابع بازگشتی نامیده میشود.

## خواص:

- ✓ باید معیاری به عنوان معیار پایه (Base Case) وجود داشته باشد که تابع در این حالت خودش را فراخوانی نماید.
- ✓ در هر بار فراخوانی ، به معیار پایه نزدیکتر شود.

**مثال ۱)** تابع فاکتوریل:

```
n! = 1*2*3*…*n
(n-1)! = 1*2*…*(n-1)
n1 + n * (n-1)!

f(n) = n! = 1 * … * n
f(n) = n * f(n-1)
```

$$f(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ n*f(n-1) & n>0\end{cases}$$

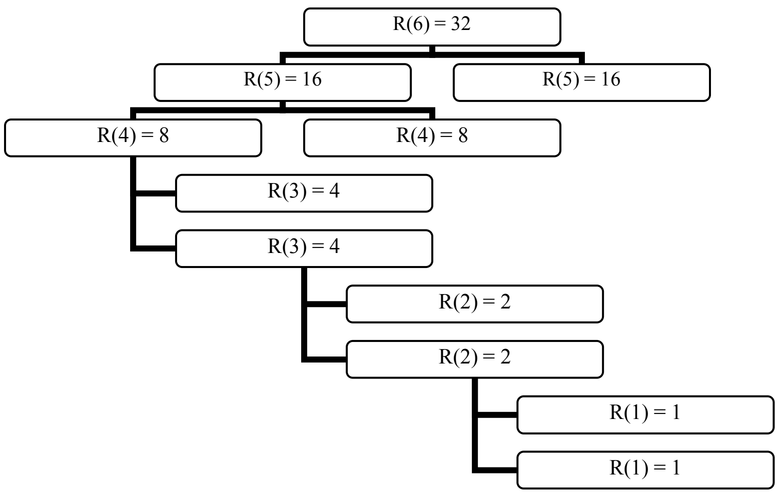
```
int f(int n)          // تابع نوشته شده به زبان سی
{
    if(n==0)
        return(1);
    else
        return(n*f(n-1));
}
```

f(5) = 5 * f(4) = 5*4*f(3) = 5*4*3*f(2) = 5*4*3*2*f(1) = 5*4*3*5*1*f(0) = 120

**مثال ۲)** مقدار تابع زیر چند میشود:

```
int Rec(int n)
{
    if (n==1)
        return(1)
    else
        return(Rec(n-
1) + Rec(n-1))
}
```

Rec(6) = ? ➔ 32



**مثال۳)** اگر n=8 باشد ، چند عمل ضرب در تابع زیر انجام میشود. (هر عمل square یک ضرب دارد)

```
function count(n)
begin
    if n<=0 then return(1)
    if n=1 then return(2)
    if n=2 then return(3)
    return (count (n-2) * square (count (n-
4));
end
```

1)4 ➔2)8 3)9 4)10

$$c(8)$$
$$\downarrow$$
$$c(6) * sq(c(4)) : 8$$
$$\downarrow$$
$$c(4) * sq(c(2)) : 4$$
$$\downarrow$$
$$c(2) * sq(c(0)) : 2$$

**مثال۴)** مقدار R(5,3)=?

```
int Rec(int p, int q)
{
    int R;
    if (q<=0) return (1);
    R = Rec(p,q/2);
    R = R * R;
    if (q%2 ==0)
        return(R);
    else
        return(R*P);
}
```

1)15 2)25 3)75 ➔4)125

$$R(5,3) : 125$$
$$\downarrow$$
$$R(5,1) : 5$$
$$\downarrow$$
$$R(5,0) : 1$$

**مثال۵)** تابع آکرامان:

$$Ack(x,y) = \begin{cases} y+1 & x=0 \\ Ack(x-1,1) & y=0 \\ Ack(x-1, Ack(x, y-1)) & else \end{cases}$$

Ack(1,1)=?

$$Ack(1,1) : 3$$
$$\downarrow$$
$$Ack(0, Ack(1,0)) : 3$$
$$\downarrow$$
$$Ack(0,1) : 2$$

**مثال۶)**

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

f(m,n) = f(n-1,m) + f(n-1,m-1)
f(6,4)=?

**مثال ۷)**

```
Function w(n:word) : real;
begin
	if n=1 then
		w:=sqrt(2);
	else
		w:=sqrt(w(n-1)+2);
end;
```

n = 1384		f(n) = ?

1)3		2)6		➔3)2		4)4

$$w = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}}}}_{1384}$$

$$w^2 = \sqrt{2} + \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}}}}_{1383}$$

$$w^2 = 2 + w \rightarrow w^2 - w - 2 = 0 \rightarrow w = 2$$

**مثال ۸)**

```
void xyz(void)
{
	char ch;
	ch = getche();
	if (ch != '\n')
		xyz();
	putch(ch);
}
```

input: ABC   [enter]

output : CBA

**مثال ۹)** محاسبه مجموع اعداد صفر تا n:

$$S(n) = \begin{cases} 0 & n=0 \\ n+s(n-1) & n>1 \end{cases}$$

**مثال ۱۰)** محاسبه $a^b$ :

$$P(a,b) = \begin{cases} 1 & b=0 \\ a*p(a,b-1) & b>=1 \end{cases}$$

**مثال ۱۱)** محاسبه a*b :

$$m(a,b) = \begin{cases} a & b=1 \\ a+m(a,b-1) & b>1 \end{cases}$$

**مثال ۱۲)** محاسبه a/b :

$$Q(a,b) = \begin{cases} 0 & a < b \\ Q(a-b,b)+1 & a >= b \end{cases}$$

**مثال ۱۳)** محاسبه b٪a :

$$M(a,b) = \begin{cases} a & a < b \\ M(a-b,b) & a >= b \end{cases}$$

**مثال ۱۴)** k(4,2)=? :

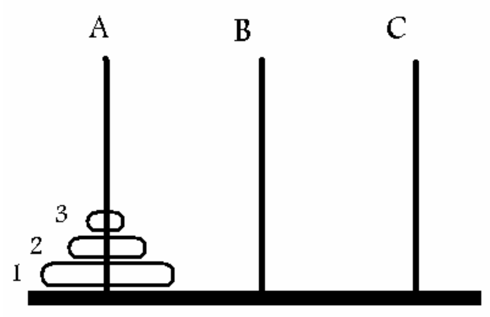
```
k(n,m)
{
        if (m==n) | | (m==0)
                return(1)
        else
                return(k(n-1,m)+k(n-1,m-1))
}
```

$$\binom{m}{n} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!*2!} = \frac{4*3}{2} = 6$$

**کوئیز ۱:**

```
Algorithm FUN (n)
begin
        if(n>0) then
                if(n=1) then
                        put "X"
                else if (n=2) then
                        put "Y"
                else
                        put "A"
                        FUN (n-1)
                        put "B"
                        FUN (n-2)
                        put "C"
                end if
        end
end
```

n = 3  : AYBXC
n = 4 : AAYBXCBYC
n = 5




**برج هانوی (۱۸۸۳ لوکاس):**

۱- حلقه بزرگتر روی حلقه کوچکتر قرار نگیرد.

۲- هر مرحله فقط یک حرکت انجام شود.

$$(2,C,B)\rightarrow\begin{cases}3\xrightarrow{A}C\\2\xrightarrow{A}B\\3\xrightarrow{C}B\\1\xrightarrow{A}C\perp\\3\xrightarrow{B}A\\2\xrightarrow{B}C\perp\\3\xrightarrow{A}C\perp\end{cases}$$

n=3 ➔ f(n)=7
۷ حرکت

n=4 ➔ f(n)=7+1+7=15
۱۵ حرکت

f(n) = 2f(n-1) + 1    (n=1   f(n)=1)

$$f(n)=2^n-1$$

**راه حل بازگشتی:**

۱) n-1 حلقه را به کمک C از Aبه B منتقل می کنیم.

۲) حلقه n ام را از A به C منتقل می کنیم.

۳) حلقه باقیمانده را از B به C منتقل می کنیم.

f(n, A, C, B)    =>    f(کمکی ,مقصد ,مبدا ,تعداد حلقه)

```
{
	f(n-1,A,B,C)
	انتقال دیسک آخر از مکان مبدا به مکان مقصد...
	f(n-1,B,C,A)
}
```

**رابطهٔ بازگشتی مسالهٔ برجهای هانوی:**

$$f(n) = \begin{cases} 2f(n-1)+1 & n>1 \\ 1 & n=1 \end{cases}$$

حل رابطهٔ بازگشتی هانوی:

$$\begin{aligned} f(n) &= 2f(n-1)+1 \\ &= 2(2f(n-2)+1)+1 \\ &= 2^2 f(n-2)+1+2 \\ &= 2^3 f(n-3)+1+2+4 \\ &\dots \\ &= 2^{n-1} f(1) +1+2+2^2+\dots+2^{n-2} \\ &= 2^{n-1} + (2^{n-1}-1) = 2^n-1 \end{aligned}$$

$1+2+2^2+\dots+2^n = \sum_{I=0}^{n} 2^i = 2^{n+1}-1$

=>

$O(2^n)$

**مثال)**

$$f(n) = \begin{cases} 1 & n=2 \\ 2f(n-2) & n>2 \end{cases}$$

1) $O(n)$ 2) $O(2^n)$ 3) $O(2^{n/2})$ ✓ 4) $O(n\log n)$

## فصل سوم — آرایه و مرتب سازی Array & Sorting

### آرایه:

- ✓ ساختمان داده ای جهت ذخیره سازی عناصر همنوع (همگن)
- ✓ عناصر آرایه بکمک یک اندیس قابل دسترس می باشند(چون پشت سرهم در حافظه ذخیره می شوند).

### آرایه یک بعدی (لیست-بردار):

**X:Array[L..U] of <type>**

w=sizeof(type)

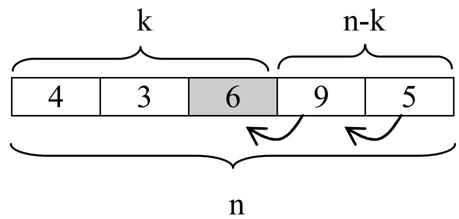
تعداد عناصر = U-L+1

حافظه = (U-L+1)*w

- **جستجو:**
  - ترتیبی:
    - بهترین حالت: O(1)
    - بدترین حالت: O(n)
  - دودویی:
    - بهترین حالت: O(1)
    - بدترین حالت: O(log(n))     (مقدار دقیق: [Log(n)]+1 )
- **مرتب سازی**

---

مثال ۱) برای حذف عنصر k ام آرایه ای بطول n به چند عمل جابجایی نیاز داریم:




1)n    2)7    ➔3)n-k    4)n-k+1

مثال۲) اگر طول آرایه ۲۰۰ باشد ، حداکثر اعمال مقایسه برای پیدا کردن یک عنصر به روش دودویی چندتاست؟

1)200    2)7    ➔3)8    4)9

**[log 200]+1 = [7…]+1 = 8**

---

مثال۳) در صورتیکه آرایه مورد جستجو در روش جستجویی دودویی بصورت زیر باشد ، متوسط تعداد مقایسه ها برای جستجوی موفق چندتاست؟

**-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7**

1)27/9 ➔2)25/9 3)31/9 4)29/9

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | |
| **3** | **2** | **3** | **4** | **1** | **3** | **2** | **3** | **4** |

توضیح: تعداد همه مقایسه ها تقسیم بر تعداد کل عناصر

**تابع جستجوی دودویی بصورت بازگشتی:**

```
int BS(int x[], int a, int b, int item)
{
        int mid;
        mid = (a+b) /2;
        if (a<=b)
        {
                if (x[mid]>item)
                        return(BS(x, a, mid-1, item));
                elseif (x[mid]<item));
                        return(BS(x, mid+1, b, item));
                else
                        return (mid);
        }
        else
                return(-1);
}
```

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ T(n/2) + C & n >= 1 \end{cases}$$

$n=2^k$ ➔ $k = \log n$

$T(n) = T(n/2) + c$

$= T(n/2^2) + c + c$

…

$=T(n/2^k) + k*c$

$=T(0)+(k+1)*c$

➔ $T(n) = 1 + (k+1)*c = 1+(\log n+1)*c$

$= 1 +c * \log n + c = c * \log n + d$

➔ $O(\log n)$

**تمرین)** روش جستجوی خطی را بصورت بازگشتی بنویسید و پیچیدگی آنرا بدست آورید.

```
linear (a[], int a, int b, int item)
{
        if(b>=a)
        {
                if(x[a]==item)
                        return(a);
                else
                        return(linear(x,a+1,b,item);
        }
        else
                return(-1);
}
```

$$T(n)=\begin{cases} 0 & n=0 \\ T(n-1)+1 & n>=1 \end{cases}$$

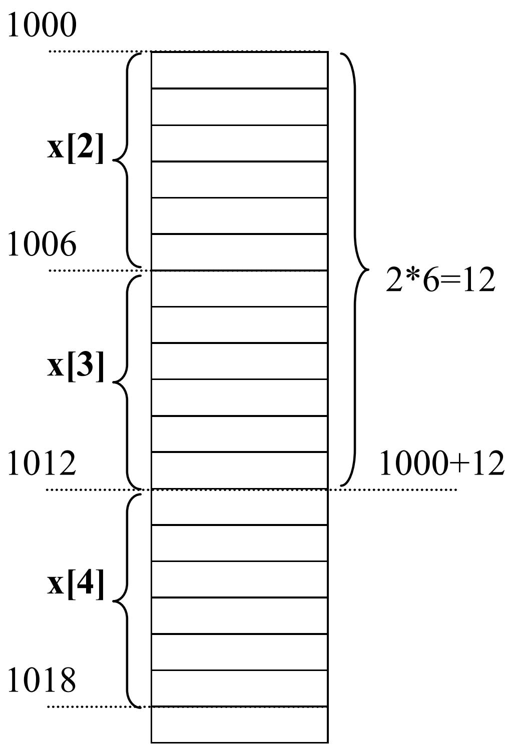
T(n) = T(n-1) + 1
= T(n-2) + 2
…
=T(n-n) + n
= 0 + n

➔ O(n)

**نحوه ذخیره سازی آرایه ها در حافظه:**

**X: [2..8] of real**
**w=6**
**size = 42 byte**

**Add(X[i]) = Base + (I-L)*w**



**مثال)** اگر آرایه x دارای ۱۰ عنصر باشد که هر عنصر آن یک رشته سه کاراکتری است و آرایه از موقعیت ۱۰۰ حافظه ذخیره شده باشد ، موقعیت شروع عنصر ششم کدام است؟

**1)118　　2)112　　→3)115　　4)121**

5*3=15
add=100+15=115

## آرایه دو بعدی:

**X:Array[$L_1$..$U_1$, $L_2$..$U_2$] of type**

**تعداد سطرها: $U_1-L_1+1= r_1$**

**تعداد ستون ها: $U_2-L_2+1= r_1$**

**تعداد عناصر = $r_1*r_2$**

**میزان حافظه= $r_1*r_2*w$**

## نحوه ذخیره سازی در حافظه:

- روش سطری Row Major (C,Pascal,...)
- روش ستونی Column Major (Cobol,Fortran,...)

| X | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|
| 2 | **1** | **2** | **3** |
| 3 | **4** | **5** | **6** |
| 4 | **7** | **8** | **9** |

R.M

| | |
|---|---|
| R2 | 1 |
| | 2 |
| | 3 |
| R3 | 4 |
| | 5 |
| | 6 |
| R4 | 7 |
| | 8 |
| | 9 |

C.M

| | |
|---|---|
| C3 | 1 |
| | 4 |
| | 7 |
| C4 | 2 |
| | 5 |
| | 8 |
| C5 | 3 |
| | 6 |
| | 9 |

**مثال)**

**X:Array [2..4,3..5] of word;**
**Add(x[2,3])= Base = 100**
**W=2**
**Add(x[4,4])=?**

**سطری:** ۲×۷ = ۱۴ ← آدرس: ۱۰۰+۱۴ = ۱۱۴

**ستونی:** ۲×۵ = ۱۰ ← آدرس: ۱۰۰+۱۰ = ۱۱۰

**بدست آوردن تعداد عناصر قبل از عنصر x[I,j] در روش سطری:**

عناصر سطرهای بالایی : (i-L1).(U2-L2+1)

عناصر سطر i ام که قبل از عنصر x[i,j] است: j-L2

آدرس خانه اول= Base

آدرس x[i,j] = ؟

**تعداد کل عناصر: Num= (i-L1)(U2-L2+1)+j-L2**

**Add(X[i,j])= Base + [(i-L1)(U2-L2+1) + j – L2)]*w**

**روش ستونی:**

**Add(X[i,j])= Base + [(j-L2)(U1-L1+1) + i – L1)]*w = Add(x[i,j]])**

**تمرین)** فرمول های سطری و ستونی ۳ بعدی را بدست آورید.

**X:[L1..U1, L2..U2, L3..U3] of <type>**

**روش سطری:**

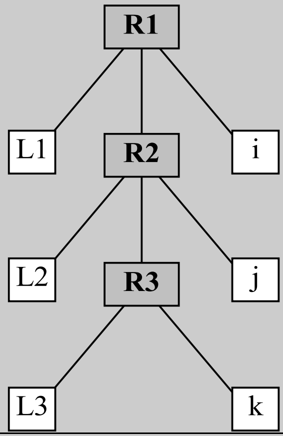
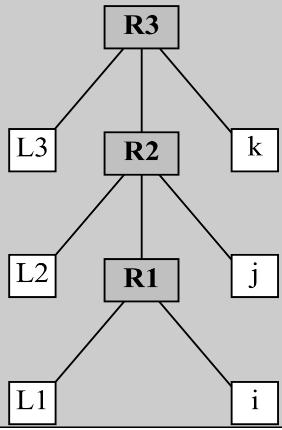
$$Add(X[i,j,k]) = Base + [((i-L1)*r2 + j - L2)*r3 + k - L3]*w$$

**روش ستونی:**

$$Add(X[i,j,k]) = Base + [((k-L3)*r2+ j-L2)*r1 + i - L1]*w$$

**X:Array[L1..U1, L2..U2, L3..U3]**

**سطر $U_i-L_i+1 = R_i$**

| | |
|---|---|
| **سه بعدی سطری:**<br> | **سه بعدی سطری:**<br>$((i-L1)R2+(j-L2))R3 + k - L3$<br>$= (i-L1)R2R3+(j-L2)R3 + k - L3$<br>**چهار بعدی سطری:**<br>$(i-L1)R2R3R4+(j-L2)R3R4 + (k - L3)R4 + l-L4$ |
| **سه بعدی ستونی:**<br> | **سه بعدی ستونی:**<br>$(k-L3)R2R1+(j-L2)R1 + i - L1$<br>**چهار بعدی ستونی:**<br>$(l-L4)R3R2R1+(k-L3)R2R1 + (j-L2)R1 + i - L1$ |

**مثال)** اگر تخصیص حافظه به آرایه بصورت سطری باشد ، و دو آرایه X[9,2,4] و Y[24] از یک نوع بوده و در حافظه روی هم تعریف شوند ، خانه X(2,1,3) معادل کدام خانه Y می باشد؟

1) Y[10]  ➔2)Y[11]  3)Y[15]  4)Y[20]

**$(i-L1)R2R3+(J-L2)R3+k-L3$**
**$(2-1)*2*4+(1-1)4+3-1 = 8+2 = 10$**

**مثال۲)** اگر Base=20,000 و M[30*20*10] که بصورت ستونی ذخیره شده باشد و w=4 آنگاه آدرس X[21,11,9] چند میشود؟

1) 20480 2)40480 3)40840 4)20840

**num = (k-3)R2R1+(j-L2)R1+i-L1 = 5120**
**Add = 20,000 + 4*5120 = 40480**

## ماترس های خلوت (اسپارس):

اگر در یک ماتریس ، تعداد صفرها از تعداد یکها خیلی بیشتر باشد به آن ماتریس اسپارس گویند.

روشهای ذخیره سازی ماتریسهای اسپارس:

۱- نامنظم
- ✓ هر عنصر بصورت یک سه تایی (i,j,value) ذخیره میشود.

۲- منظم: مختص ماتریسهایی است که دارای شکل منظمی می باشند.
- ✓ قطری
- ✓ سه قطری
- ✓ پایین مثلثی
- ✓ بالا مثلثی
- ✓ متقارن

## روش غیرمنظم:

$$X:\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}_{3*4}$$

| | سطر | ستون | عناصر غیرصفر |
|---|---|---|---|
| سرآیند Heading | 3 | 4 | 4 |
| body بدنه | 1 | 3 | 4 |
| | 2 | 2 | 1 |
| | 2 | 4 | 5 |

- اگر k تعداد عناصر غیر صفر باشد ، نیاز به 3*(k+1) عنصر جهت ذخیره ماتریس اصلی داریم.

در مثال فوق اگر w=2 (اندازه هر عنصر) آنگاه ماتریس اصلی ۲۴ بایت و ماتریس اسپارس ۳۰ بایت حافظه اشغال می کند. یعنی حافظه بیشتر بخاطر این است که تعداد عناصر غیر صفر از تعداد صفرها خیلی کمتر نیست.

بنابراین باید ببینیم که چه زمانی ذخیره اسپارس به اینصورت بصرفه تر است.

**مثال)** ذخیره سازی اسپارس یک ماتریس قطری به ازای چه اندازه ای (n=?) بصرفه است؟

k=n ➔ n*n > (n+1)*3 ➔ n >= 4

**مثال۲)** n مناسب را برای ماتریس سه قطری بدست آورید:

$$\begin{bmatrix} \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

$n^2 < [3n-2+1] * 3$ ➔ $n^2 - 9n + 3 > 0$
➔ n>=9

برخی عملیاتی که می توان روی اسپارس انجام داد:

- ✓ ترانهاده
- ✓ جمع
- ✓ ضرب

**مثال۱)** بدست آوردن ترانهاده یک ماتریس اسپارس:

- **A[1,1] ➔ AT[1,2]**
- **A[1,2] ➔ AT[1,1]**
- **A[1,3] ➔ AT[1,3]**

```
L:=2;
for i:=1 to m do
      for j:=2 to k do
            if i=A[j,2] then
            begin
                  AT[L,3] := A[j,3];
                  AT[L,2] := A[j,1];
                  AT[L,1] := A[j,2];
                  L:=L+1;
            end;
```

---

**مثال۲)** جمع دو ماتریس اسپارس:

- Xindex1 > Xindex2 => K2
- Xindex1 < Xindex2 => K1
- Xindex1 = Xindex2 => Yindex1 > Yindex2 => K2
- Yindex1 < Yindex2 => K1

- Yindex1 = Yindex2 => K1+K2

**کوئیز:**

**در تابع زیر اگر $n=2^k$ آنگاه پیچیدگی را بدست آورید O(?)**

$$T(n)=\begin{cases}1 & n=1\\ 2T(\frac{n}{2})+6n-1 & n\ge 2\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2T(\frac{n}{2})+6n-1\\
&= 2[2T(\frac{n}{4})+6*\frac{n}{2}-1]+6n-1\\
&= 2^2T(\frac{n}{2^2})+(6n-2)+(6n-1)\\
&= 2^3T(\frac{n}{2^3})+6\frac{n}{4}-1]+(6n-2)+(6n-1)\\
&= 2^kT(\frac{n}{2^k})+6kn-(2^0+2^1+2^2+...+2^{k-1})\\
&= nT(1)+6n\log n-2^k+1\\
&= 6n\log n+1
\end{aligned}$$

➔ **O(nlogn)**

**ادامه مبحث اسپارس:**

تعداد عناصر غیر صفر در ماتریس سه قطری:

سطر اول: ۲ — سطر آخر: ۲

بقیه: ۳

تعداد عناصر: 4+(n-2)*3

عناصر سطرهای یک تا i-1: 2+(i-2)*3

سطر i ام و قبل از عنصر: j-i+1

تعداد کل: 2i+j-3

آدرس عنصر: 2i+j-2

$$\begin{array}{cc} i & \begin{bmatrix}\ddots&\ddots&0&0\\ \ddots&\ddots&x&0\\ 0&\ddots&\ddots&\ddots\\ 0&0&\ddots&\ddots\end{bmatrix}\\ & j\end{array}$$

**مثال**: اگر عنصر x[1,1] در خانه اول آرایه y ذخیره شده باشد ، آدرس عناصر زیر را بدست آورید.
(نوع عناصردو آرایه یکسان است و x یک ماتریس سه قطری است)

**X:Array[1..60, 1..60] of word;**

1) X[10,10] ➔ L=28
2) X[31,30] ➔ L=90
3) X[40,42] ➔ L=120 ➔ |i-j|>1 در آرایه ذخیره نمی شود

**تمرین:** ویژگیهای مربوط به تعداد عناصر قبل از عنصر i,j و آدرس عنصر دلخواه را برای ماتریس های اسپارس زیر بدست آورید:

**۱) بالامثلثی:**

**۲) ۵ قطری:**

**۳) k قطری:**

**<u>مرتب سازی:</u>**

**<u>Bubble:</u>**

```
for i:=1 to n do
        for j:=1 to n-I do
        if x[j+1]<x[j]
                inchange…
```

| تعداد مقایسه: | تعداد جابجایی: |
|---|---|
| -بهترین: $\frac{n(n-1)}{2}=O(n^2)$ | -بهترین: $O(1)$ |
| -بدترین: $O(n^2)$ | -بدترین: $O(n^2)$ |

**<u>Optimized Bubble!</u>**

```
f:=true;
i:=1
while(i<n) and f do
begin
        f:=false;
        for j:=1 to n-i do
                if x[j]>x[j+1] then
                begin
                        f:=true;
                        Exchange;
                end
end
```

| تعداد مقایسه: | تعداد جابجایی: |
|---|---|
| -بهترین: $O(n)$ | -بهترین: $O(1)$ |
| -بدترین: $O(n^2)$ | -بدترین: $O(n^2)$ |

**Selection:**

```
for(i=0; i<size; i++)
{
        min=i;
        for(j=1; j<size; j++)
                if (arr[j]<arr[min])
                        min=j;
        inchange(arr[i],arr[min]);
}
```

| تعداد مقایسه: | تعداد جابجایی: |
|---|---|
| -بهترین: $\frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$ | -بهترین: $O(1)$ |
| -بدترین: $O(n^2)$ | -بدترین: $O(n)$ |

**نکته:** در روش انتخابی اگر آرایه به ترتیب عکس باشد ، با n/2 جابجایی آرایه مرتب میشود

**Insertion:**

```
for(i=0; i<size; i++)
        for(i:=1; i<size; i++)
        {
                index=arr[i];
                j=i;
                while((j>0) && (arr[j-1]>index))
                {
                        arr[j]=arr[j-1];
                        j--;
                }
                arr[j]=index;
        }
```

| تعداد مقایسه: | تعداد جابجایی: |
|---|---|
| -بهترین: $O(n)$ | -بهترین: $O(1)$ |
| -بدترین: $O(n^2)$ | -بدترین: $O(n^2)$ |

**نکته:**

۱-روش درجی برای تعداد داده کم بهترین کارایی را دارد

۲-ترتیب عناصر هم کلید را عوض نمی کند.

**سئوال)** آیا میتوان در طی یکی از فازهای میانی Selection مرتب شدن آرایه را تشخیص داد؟

```
void SeletionSord(int arr[], int size)
{
        int i=0, j, min, temp, flag;
        do{
                min=i;
                flag=0;
                for(j=i+1 ; j<size; j++)
                {
                        if(arr[j]<arr[min])
                        {
                                min=j;
                                flag=1;
                        }
                        else if(arr[j-1]>arr[j])
                                flag=1;
                }
                exchange(arr[i], arr[min]);
        }while(flag);
}
```

## مرتب سازی سریع Quick:

۱-ابتدا یک عنصر به عنوان عنصر محور انتخاب میشود (pivot)

۲-کل عناصر آرایه به دو بخش تقسیم میشود

۱- عناصر کوچکتر یا مساوی محور به سمت چپ منتقل میشود

۲- عناصر بزرگتر از محور به سمت راست منتقل میشود

۳-همین روش به شیوه بازگشتی برای هر یک از دو نیمه راست و چپ انجام میشود.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **50** | 40 | 60 | 30 | 45 | 70 | 65 | 55 |
| pivot | | L→ | | ←R | | | |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **50** | 40 | 45 | 30 | 60 | 70 | 65 | 55 |
| | | L | | R | | | |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **50** | 40 | 45 | 30 | 60 | 70 | 65 | 55 |
| | | | ←R | L→ | | | |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 40 | 45 | **50** | 60 | 70 | 65 | 55 |
| | | | pivot | | | | |

```
int partition(int arr[], int lx, int rx)
{
  int pivot = lx;

  while (lx < rx)
  {
        while (arr[lx]<=arr[pivot])
              lx++;
        while (arr[rx]>arr[pivot])
              rx--;
        if(lx<rx)
exchange(&arr[lx],&arr[rx]);
  }
  exchange(arr[rx],arr[pivot]);
  return(rx);
}
```

O(n)

```
void quickSort(int arr[], int lx, int rx)
{
  if (lx<rx)
  {
        int pivot=partition(arr,lx,rx);
        quickSort(arr,lx,pivot-1);
          quickSort(arr,pivot+1,rx);
  }
}
```

بهترین حالت:

$$T(n)=\begin{cases}1 & n=1\\ 2T(\frac{n}{2})+n & n>1\end{cases} \rightarrow$$

O(nlogn)

بدترین حالت:

$$T(n)=\begin{cases}1 & n=1\\ T(n-1)+n & n>1\end{cases} \rightarrow O(n^2)$$

**نکته:** اگر آرایه مرتب شده باشد ، بدترین حالت برای QucikSort است.

اما بهترین حالت زمانی است که عنصر pivot بعد از جابجایی دقیقا وسط قرار گیرد.

**سئوال۱)** اگر بعد از تابع Partition بجای تابع QuickSort از Insertion استفاده کنید ، چه وضعیتی پیش می آید؟ (برای اینکه آرایه بصورت صعودی مرتب شود)

۱) همواره از Quick بهتر است

۲)اگر آرایه بصورت صعودی مرتب شده باشد از Quick بهتر است

۳) اگر آرایه بصورت نزولی مرتب شده باشد از Quick بهتر است

۴)...

---

**سئوال۲)** آرایه ای داریم بطول 1..N و همچنین داریم 1<=k,L<=N که K+L<=N

با درنظرگرفتن موارد مقابل بگویید که L,K چه ویژگی داشته باشد تا این سه دستور همیشه آرایه را مرتب کنند.

```
Sort(X,K+1,N)
Sort(X,1,L+K)
Sort(X,K+1,N)
```

**1) k<=L** **➔2)k=L** **3)n=3k=3L** **4) L>=k**

**سئوال۳)** آرایه ای داریم بطور N..1 آرایه از یک تا D (D>>N/2) مرتب شده است. کدام روش مرتب سازی بهترین کارآیی را دارد.

1)Bubble ➔2)Insertion 3)Selection 4)Quick

**سئوال۴)** در کدامیک از روشهای زیر ، پیچیدگی در حالت متوسط و بدترین حالت متفاوت است؟

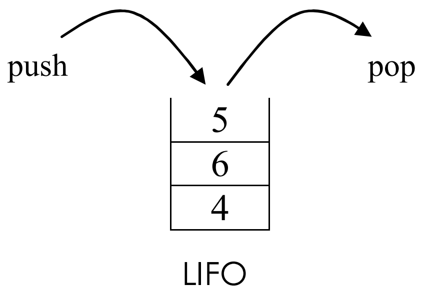
**1)Bubble** ($n^2$) **2)Insertion**($n^2$) **3)Selection** ($n^2$) **➔4)Quick** (nlogn)

**سئوال۵)** الگوریتم ضرب دو ماتریس را در نظر بگیرید:

```
for i:=1 to n do
        for j:=1 to k do
        begin
                s:=0;
                for L:=1 to m do
                        s += x[i][L] * y[L][j];
                z[i][j]=s;
        end;
```

پیچیدگی این الگوریتم از مرتبه $O(n^3)$ است. روشی بنام starassen وجود دارد که پیچیدگی آن از مرتب $O(n^{2.8})$ است. آنرا تحقیق کنید...

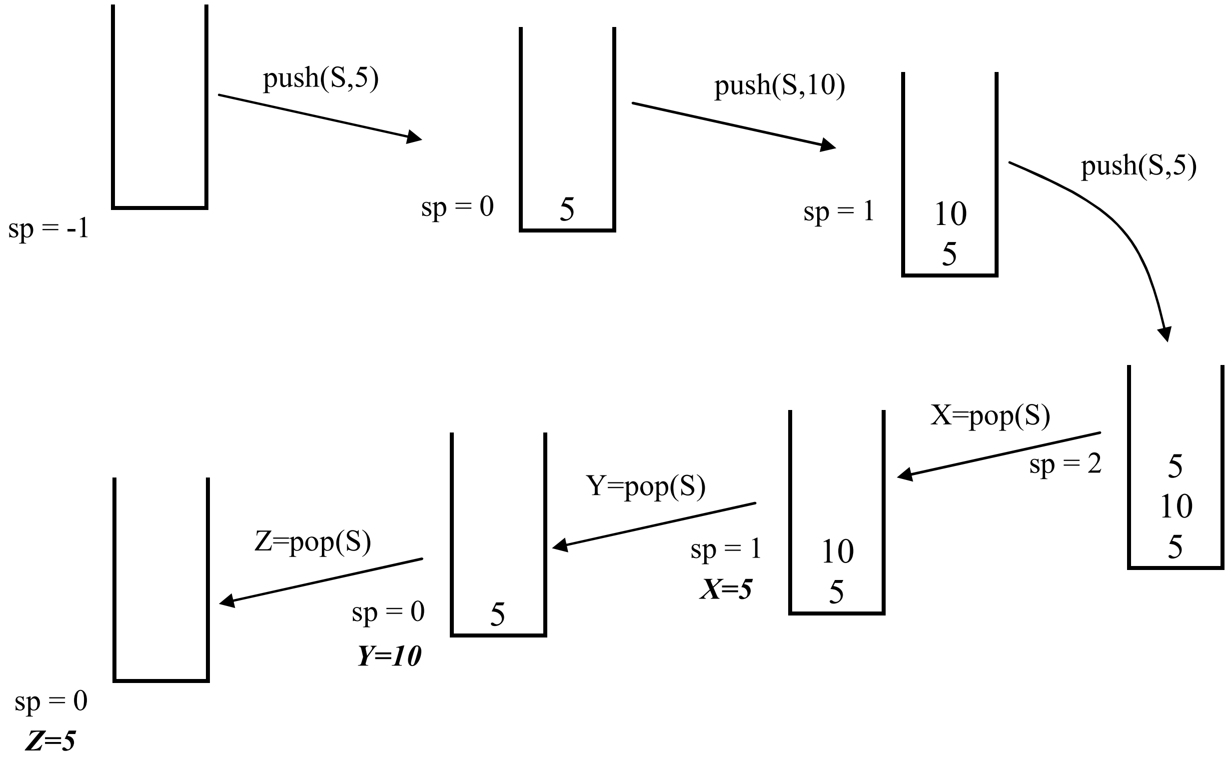
## پشته Stack: (Last in First Out)




ساختمان داده ای که اعمال حذف و اضافه آن فقط از یک طرف (بالا) انجام می شود.

```
struct stack{
        <type> item[max];
        int sp;
};
```

نحوه عملکرد در زبان C:




**مثال ۱)** پشته S عناصر از نوع int است. در بازه [1,5] کدامیک از خروجیهای زیر را نمی توان با این اعمال تولید کرد:

۱) 5,4,3,2,1 ۲) 1,2,3,4,5

۳) 1,2,4,3,5 ۴) 4,3,5,1,2 ➔

**مثال۲)** کدامیک را نمی توان تولید کرد: (push کوچکترین مقدار ورودی را به پشته منتقل میکند)

۱) 2,1,5,3,4,6 ➔ ۲) 1,2,3,5,6,4

۳) 3,2,4,6,5,1 ۴) 4,3,2,1,6,3

**مثال۳)** کم هزینه ترین روش از نظر حافظه مصرفی برای اینکه عناصر یک پشته S1 را به پشته S2 منتقل کنیم بگونه ای که ترتیب عناصر حفظ شود کدام است؟

۱) یک متغییر کمکی ۲) چند متغییر اضافی ۳) دو پشته اضافی ۴) یک پشته اضافی

➔

**مثال۴)** اگر n عملی از اعمال مشخص شده با ترتیب دلخواه بر روی پشته S (که در ابتدا خالی است) باشد مجموع هزینه در بدترین حالت کدام است؟

| | |
|---|---|
| **push(s,x): اضافه کردن x به پشته s با هزینه O(1)**<br>**pop(s,x): حذف عنصر بالای پشته با هزینه O(1)**<br>**mpop(S,k): حذف k عنصر بالای پشته با هزینه O(k)** | ۱) O(n) ➔ ۲) O(nk)<br>۳) O(logn) ۴) O(nlogn) |

(n-1)O(1) + O(n-1) ➔ O(n)
n/2O(1) + n/2 O(1) ➔ O(n)

---

**عبارات ریاضی:**

**چک توازن عبارات از نظر پرانتز:**

- **در حالت معمولی شمارنده صفر و در حین اجرا منفی نشود**
- **در روش پشته باید در انتها پشته خالی شود**

**برای تطبیق پرانتز و کروشه و آکولادهای عبارت زیر ، به یک پشته با حداقل چند عنصر نیازمندیم؟**

**{a-(b+[x-y]*z+[(m-n)])}**

جواب: ۴ عنصر

| | |
|---|---|
| **پیاده سازی پشته:**<br>– **آرایه**<br>– **لیست پیوندی** | **Type**<br>**stack=RECORD**<br>**item:Array[1..MAX];**<br>**sp:0..MAX;**<br>**end;** |

**مثال۱)** روالی بنویسید که پشته خالی را ایجاد نماید:

```
Procedure CreateStack(Var s:stack);
Begin
      s.sp= 0;
end;
```

**مثال۲)** تشخیص خالی بودن پشته:

```
Procedure isFull(s:stack):Boolean;
Begin
      IF s.sp=MAX then return true
```

```
        else return false;
end;
```

**مثال۳)** افزودن به پشته:

```
Procedure push(Var s:stack; x:integer);
Begin
        if isFull(s) then
        begin
                // پیغام خطا
        end
        INC (s.sp);
        s.item[s.sp] := x;
end;
```

**مثال۴)** خواندن از پشته

```
POP→
        اگر پشته خالي نباشد
        {
                x=s.item[s.sp]
                DEC (s.sp)
        }
```

**مثال۵)** تابعی که عنصر بالای پشته را برمیگرداند (اما حذف نمی کند)

```
TOP →
        اگر پشته خالي نباشد
        {
                return (s.item[s.sp])
        }
```

---

## نمادگذاری لهستانی:

**infix: عملگرد بین دو عملوند**

**postfix: عملگر بعد از دو عملوند**

**prefix: عملگر قبل از دو عملوند**

**in → post**

***in:    A*(B+C)/D**

پرانتزگذاری:

**[ (A* (B+C) ) / D ]**

انتقال علامت های داخل هر پرانتز به مقابل آن:

[ ( ( A * ( B + C ) ) / D ]

**ABC+*D/**

اولویت های محاسباتی یکسان از چپ به راست انجام میشوند بجز توان و انتساب:

2^3^4        ,        x=y=z=2

**مثال ۱)**

[A-[((C+(D*A)) * (E-f)]]        ➔        **ACDA*+EF-*-**

**in ➔ pre**

۱: پرانتز گذاری

۲: هر عملگر به قبل از پرانتز باز مربوطه منتقل شود

A / ( c – d * ( f + e ) )        ➔        **[A / (c-(d*(f+e)))]**        ➔        **/A-c*d+fe**

---

**post ➔ in**

۱: بت پیمایش از چپ به راست ، هر عملگر، با دو عملوند قبلی در یک پرانتز گذاشته شود.

۲: عملگر هر پرانتز بین دو عملوند قرار داده شود.

ABC - * DE / +        ➔        **[(A(BC-)*) (DE/)+]**        ➔        **A*(B-C)+D/E**

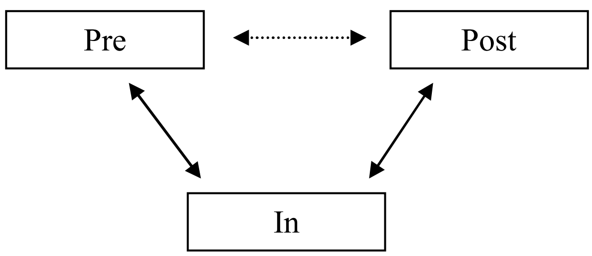
---

**pre ➔ in**

۱: با پیمایش از راست به چپ ، هر عملگر، با دو عملوند قبلی در یک پرانتز گذاشته شود.

۲: عملگر هر پرانتز بین دو عملوند قرار داده شود.

/ a – c * d + f e        ➔        **[/ a (– c (* d (+ f e)))]**        ➔        **a/(c– d *(f+e))**



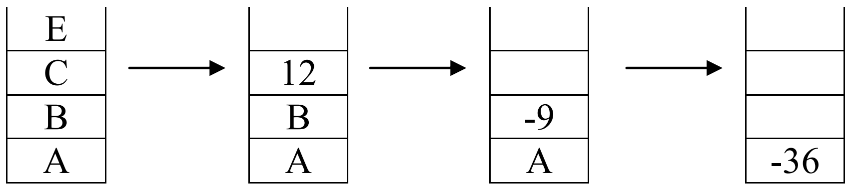

---

**الگوریتم ارزیابی عبارات پسوندی:**

**A=4 , B=3 , C=6 , E=2**

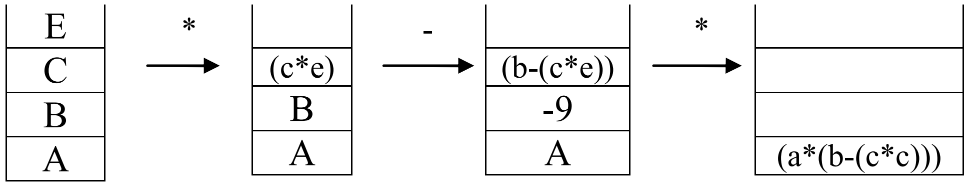
**EX:    ABCE*-***

- عبارت از چپ به راست پیمایش شود
- عملوندها به ترتیب push شوند
- به ازای هر عملگر دو عملوند بالای پشته pop شود و پس از اعمال عملگر ، نتیجه push شود

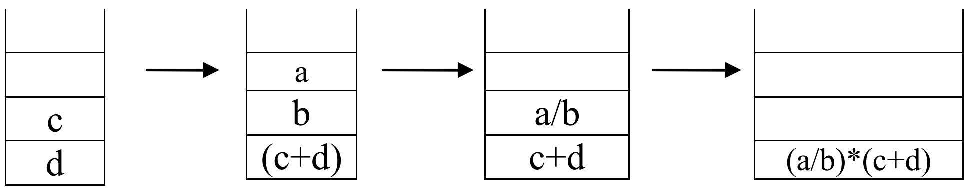



**الگوریتم تبدیل post به in:**

**رشته: ABCE*-***




pre: */AB+CD → in




**تمرین)** برنامه ای بنویسید که پرانتزهای اضافی را حذف کند.

**پشته چندگانه:**

روش اول: آرایه را به دوقسمت تقسیم کنیم:

S1 : {sp=0.. Max/2} S2 : {sp=Max/2..Max}

روش دوم: از دو طرف آرایه استفاده کنیم:

S1 : {sp=0 , push→INC(sp)} S1 : {sp= max , push→DEC(sp)}

شرط پر شدن پشته در حالت دوم: sp1 = sp2

**مثال ۱)** عبارت infix زیر را به polish تبدیل کنید:

**A * ( B + D) / E – F * (G + H / K)**

جواب:

→ ABC+*E/FGHK/+*-

**مثال۲)** تبدیل از infix به post:

**(A + B) * D + E / (F + A * B)**

**مثال۳)** تبدیل از pre به in :

**+ - * ↑ A B C D / E / F + G H**

جواب:

→ A↑B*C-D+E/F/(G+H)

**مثال۴)** نتیجه عبارت post مقابل چیست؟

**12 , 7 , 3 , - , / , 2 , 1 , 5 , + , * , +**

۱) ۸	→ ۲)۱۵

۳) ۰	۴) هیچکدام

**مثال۵)** مینیمم تعداد متغییرهای میانی در محاسبه عبارت جبری زیر ، که بصورت polish می باشد، برابر چند است؟

**a b + c d * / a +**

۱) ۱	۲) ۲	→ ۳) ۳	۴) ۴

**مثال۶)** اگر اولویت عملگرها بصورت / ⊗ ± باشد ، شکل post عبارت مقابل چگونه است؟

**a + b ⊗ c / (d – a ⊗ (f + b) + b)**

جواب:

→ abcdafb +⊗-   b+/⊗+

**مثال۷)** معادل میانوندی (infix) عبارت مقابل چیست؟

**/ * + a b c - a b**

→ (a+b)*c/(a-b)

**مثال۸)** تبدیل از پیشوندی به پسوندی:

**++a/b-cd*-ab-+c*d5/a-bc**

جواب:

→ abcd-/+ab-cd5*+abc-/-/+

---

**مثال۹)** الگوریتم اشتباه برای چک متوازن بودن پرانتزها را در نظر بگیرید:

```
Declare a stack
while(more input is available)
{
	read a character → ch
	if (ch='c') then
		push ch on the stack
	else if ((ch=')' and stack is not empty) then
		pop a char from stack
	else
		print "unbalanced" and exit
	print "Balanced"
```

}

کدامیک از رشته های نامتوازن زیر توسط الگوریتم فوق ، متوازن در نظر گرفته میشوند:

1: (()()))) 
2: (())))() 
3: ())(() 
4: ((()) ← زیرا در انتها ، خالی بودن پشته بررسی نمیشود

---

**مثال۱۰)** سه پشته داریم که هر کدام شامل دو عدد است:

S1 : 1 , 2　　　　S2 : 3 , 4　　　　S3: 5 , 6

و دو عملگر داریم:

pop(i) : از پشته i–ام مقداری را pop میکند

poppush(i,j) : از پشته i–ام pop کرده و در پشته j–ام قرار میدهد

برای چاپ اعداد یک تا شش بصورت 1,3,5,2,4,6 عملگر poppush حداقل چند بار مورد استفاده قرار میگیرد:

۱) ۳　　۲) ۵　　۳) ۶　　۴) ۴ ←

---

**مثال۱۱)** N گلوله داریم که باید بصورت صعودی مرتب کنیم (به کمک ترازو ). کدام گزینه صحیح است؟

۱) ۳ گلوله را همواره با دوبار توزین می توان مرتب کرد　　۲) ۴ گلوله را در بعضی مواقع می توان با سه بار توزین مرتب کرد

۳) ۵ گلوله را همیشه با ۴ بار توزین می توان مرتب کرد　　۴) هیچکدام

---

**مثال۱۲)** حداقل n گلوله با چندبار عمل توزین مرتب میشوند؟

**مثال۱۳)** ۱۰ عدد کبسه طلا داریم که ۹ عدد سالم (شامل ۱۰ سکه ۱۰ گرمی) و یکی تقلبی(شامل ۱۰ سکه ۹ گرمی). حداقل با یک بار وزن کردن کیسه تقلبی را پیدا کنید.

**مثال۱۴)** ۱۲ گلوله داریم که یکی خراب است (وزن آن کمتر و یا بیشتر است). حداکثر با ۳ بار توزین آنرا پیدا کنید.

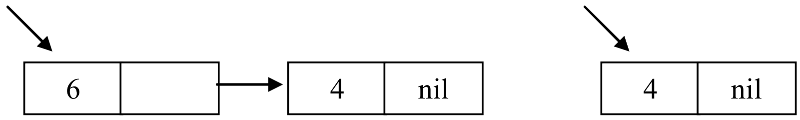
**مثال۱۵)** حدس یک عدد: حداکثر با چند بار سئوال پرسیدن ( و استفاده از عملگرهای > <) می توان به جواب رسید؟

جواب: Log n

## پیاده سازی پشته با لیست پیوندی (پشته پیوندی):

پشته خالی: لیست خالی

(L=nil)




اضافه کردن به ابتدای

لیست: push(s)

حذف از ابتدای لیست:

pop()

## الگوریتم تبدیل in به post:

۱) پشته ای خالی با نام s در نظر میگیریم

۲) عبارت میانوندی را از چپ به راست پیمایش می کنیم ، (تازمانی که به انتهای عبارت نرسیدیم)

۳) کاراکتر بعدی از عبارت را دریافت می کنیم

۳-۱) اگر کاراکتر ) بود به داخل پشته push میشود

۳-۲) اگر کاراکتر عملوند بود به عبارت پسوندی اضافه می شود

۳-۳) اگر عملگر بود:

چنانچه پشته خالی باشد یا اولویت عملگر از عملگر بالای پشته نیز بیشتر باشد ، این عملگر به درون پشته push میشود. در غیراینصورت عملگر بالای پشته pop و در خروجی نوشته میشود تا زمانیکه به عملگر برسیم که اولویتش از عملگر خوانده شده کمتر است یا اینکه پشته خالی شود.

۳-۴) اگر کاراکتر ( بود از پشته pop کرده و در عبارت postfix می نویسیم تا به یک پرانتز باز در پشته برسیم.

۴) تا زمانیکه به انتهای رشته ورودی نرسیدیم عملیات ۳ تکرار شود

در انتها کل محتوای باقیمانده رشته به عبارت پسوندی اضافه میشود.

**نکته: پرانتز بازی که داخل پشته است ، کمترین و بیرون پشته بیشترین اولویت را دارد.**

**نمونه تمرین:**

اولویت ها:

^ rtl

* / % ltr

- + ltr

1) in → post
2) in → pre
3) post → pre
4) pre → post
5) post → in
6) pre → in
7) حذف پرانتزهای اضافی
8) پرانتز گذاری کامل عبارت
9) ارزیابی مقدار یک عبارت پسوندی
10) ارزیابی مقدار یک عبارت پیشوندی

## صف Queue (FIFO):

ساختمان داده ای است که عناصر به انتها اضافه شده و از ابتدا حذف می شوند.

EnQ: اضافه کردن به صف (از انتها)

DeQ: حذف کردن از صف (از ابتدا)

IsEmpty: تشخیص خالی بودن صف

IsFull: تشخیص پر بودن صف

CreateQ: ایجاد یک صف خالی

ابتدای صف: front

انتهای صف: rear

| | A | B | C | D | |
|---|---|---|---|---|---|
| | front | | | rear | |

EnQ('A') ; EnQ('B') ; EnQ('C') ; EnQ('D')

سئوال) فرض می کنیم دو صف Q1 و Q2 با مقادیر زیر داریم:

Q1 = 20, 15, 14, 31, 29, 16
Q2= 2, 10, 4, 1, 30, 7

اگر A و B عناصر صف باشند ، محتوی صف Q3 بعد از دستورات زیر چیست؟

```
make(Q3)
I:=0
while (not empty(Q1) and not empty(Q2))
Begin
        I:=I+1
        A=DeQ(Q1)
        B=DeQ(Q2)
        If (B=I+1) then
                AddQ(Q3,A-B)
End While
```

| | | | |
|---|---|---|---|
| Q3 | 8 | 10 | 9 |

| I | A | B |
|---|---|---|
| 1 | 20 | 2 |
| 2 | 15 | 10 |
| 3 | 14 | 4 |
| 4 | 31 | 1 |
| 5 | 29 | 30 |
| 6 | 16 | 7 |

## پیاده سازی صف با آرایه:

```
type
Queue=Record
        item: Array[0..(max-1)] of <type>;
        f, r: integer; {-1..max}
end;
```

**خالی بودن: f=0**

**مکان آخرین عنصر:**

**r=-1**

| 0 | | | | | max-1 |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

**EnQ(4)**
**EnQ(6)**

| ↓ | | | | | max-1 |
|---|---|---|---|---|---|
| **4** | **6** | **8** | | | |
| | | ↑ | | | |

**صف حلقوی:** در زمان رسیدن f به انتها ، مجددا از اول شروع کرد.

r: اندایس اولین مکان خالی

اگر r=f آنها صف خالی است. همچنین برای پر بودن باید شرط زیر بررسی شود:

**پر بودن:** f=(r+1) mod max

**حذف عنصر:** بررسی خالی بودن ، f=(f+1)mod max

**اضافه کردن:** بررسی پر نبودن ، r=(r+1) mod max ، اضافه کردن در مکان r –ام

**صف اولویت:**

-آرایه

-لیست

-درخت

-Heap

عناصر به هر ترتیبی قابل اضافه کردن است. اما حذف عناصر تحت یک سری ضوابط انجام میشود

- صعودی : عناصر از کوچک به بزرگ حذف می شوند
- نزولی: عناصر از بزرگ به کوچک حذف می شوند

**صعودی:**

- پیدا کردن عنصر کوچک، O(n)
- حذف
    - بعد از حذف ، بقیه عناصر shift داده شوند و r یکی کم شود. O(n)
    - حذف منطقی : از عنصر شاخص استفاده کرد (مثلا عدد 1-)
    - (در صورت استفاده از حذف منطقی می توان روشهایی نظیر فشرده سازی و یا جایگزینی را نیز بکار برد)
    - استفاده از صف دایره ای مرتب

# فصل ششم — لیست های پیوندی Linked List

## ساختار های داده ای:

**۱) ایستا**

- ✓ رکورد
- ✓ آرایه

**۲) پویا**

- ✓ گراف
- ✓ درخت
- ✓ لیست پیوندی

**۳) نیمه ایستا**

- ✓ صف
- ✓ پشته

**مشکلات ساختارهای ایستا (static):**

۱-اتلاف حافظه

۲-ذخیره سازی عناصر پشت سر هم (که در زمان درج و یا حذف باید عناصر دیگر shift داده شوند)

در ساختار های پویا هر جا نیاز باشد از سیستم حافظه گرفته و هرجا نیاز نبود به سیستم برگرداننده میشود. در این ساختار از مفهومی بنام اشاره گر استفاده میشود.

$$C = \begin{cases} malloc \\ free \end{cases} \qquad C++ = \begin{cases} new \\ delete \end{cases} \qquad pascal = \begin{cases} new \\ dispose \end{cases}$$

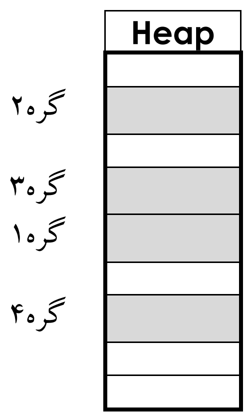
## لیست پیوندی:

به لیستی از عناصر که به کمک اشاره گر به هم مرتبط شده اند ، لیست پیوندی گفته میشود:

$$node = \begin{cases} Data \\ Link \end{cases}$$

| Data | Link |
|---|---|

در قسمت link آدرس گره ای که منطقا بعد از گره فعلی قرار دارد ، باید مشخص شود.




برای پیاده سازی ساختار لیست پیوندی ، نیاز به رکورد یا ساختار داریم:

$$node = \begin{cases} \text{info : integer} \\ \text{next : pointer} \end{cases}$$

:C

```
Struct Node{
        int info;
        Node *next;
}
```

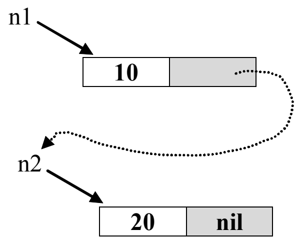
پاسکال:

```
Type
        nptr= ^node;
        node= Record
                info: integer;
                next: nptr;
        end;
```

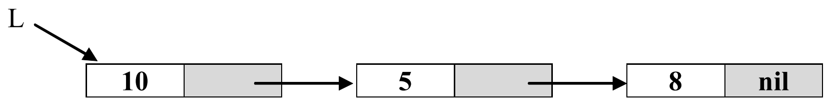
```
Var n1,n2: nptr;
```

به اشاره گر n1 که جزء گره ها نیست اشاره گر خارجی گویند که به کمک آن به کل مجموعه دسترسی داریم.

```
new(n1);
n1^.info :=10 ;
new(n2);
n2^.info :=20 ;
n1^.next :=n2;
n2^.next :=nil ;
```




دسترسی به عناصر لیست و پیمایش:




داده گره اول **writeln(L^.info);**

داده گره دوم **writeln(L^.next^.info);**

اشاره گر برای پیمایش **P:=L;**

بین گره ها **P:=P^.next;**

**مثال ۱)** تابعی بنویسید که اشاره گر خارجی به لیست پیوندی را دریافت کرده و مجموع عناصر لیست را چاپ کند.

```
function sum(L:nptr):integer;
var
        s:integer;
        p:nptr;
begin
        s:=0; p:=L;
        while p<>nil do
        begin
                s:=s + p^.info;
                p:= p^.next;
        end
        writeln(s)
end;
```

**مثال۲)** روالی بنویسید که عنصری با مقدار داده شده X را به ابتدای لیست اضافه کند.

```
Var
       n1:nptr;
begin
       new(n1);
       n1^.info:=x;
       n1^.next:=L;
       L:=n1;
end
```

**مثال۳)** عنصری با مقدار Xرا به عنوان گره انتهایی لیست اضافه نمایید:

```
P=L;
while P^.next<>nil do              //اشاره گر به گره آخر
       P:=P^.next;
new(n);
n^.info:=x;
n^.next=nil;
P^.next:=n;
```

**مثال۴)** اضافه نمودن گره با مقدار Xبعد از گره n ام لیست:

```
P:=L;
for i:=1 to n-1 do                 // انتقال روی گره مورد نظر
       P:=P^.next;
new(n);
n^.info:=X;
n^.info:=P^.next;                  // تنظیم اشاره گرها
P^.next:=n;
```

**مثال۵)** چگونه میتوان گره ای با مقدار X را قبل از عنصری با اشاره گر q اضافه کرد؟

```
P:=L
while P^.next<>q do
       P:=P^.next;
//…
ترتیب تنظیم اشاره گرها فرق نمی کند//
```

**مثال۶)** حذف گره انتهایی لیست Lو برگرداندن مقدار آن:

```
function RE(var L:nptr):integer;
var
       P:nptr;
       S:integer;
begin
       P:=L;
       While P^.next^.next<>nil do
              P:=P^.next;
       q:=P^.next;
```

```
        P^.next=nil;
        S:=q^.info;
        dispose(q);
        RE:=S;
end
```

**مثال۷**)حذف عنصر از ابتدای لیس‌ت:

بهتر است که در ابتدا پیوند عنصر اول را از بین ببریم

```
P:=L
L:=L^.next;
P^.next=nil;
dispose(P);
```

**مثال۸**)حذف عنصر k ام لیست:

```
P:=L;
for i:=1 to k-2 do
        P:=P^.next;
q:=P^.next;
P^.next:=q^.next;
q^.next=nil;
dispose(q);
```

**مثال۹**)فرض کنید L1 و L2 اشاره گر به دو لبست پیوندی خطی باشند:

الف)دو لبست پیوندی را به همدیگر متصل کنید:

```
P:=L1;
while p^.next<>nil do
        P=P^.next;
P^.next:=L2;
L2:=nil;
```

ب)لیست بنام L3 ایجاد نمایید که حاوی عناصر لیست ها L1 و L2 بصورت یک در میان باشد:

```
void alternateJoin(nptr *L, nptr *L1,nptr *L2){
  nptr *p=L,*q;
  while(L1 != NULL || L2 != NULL)
  {
        if(L1 != NULL){
                p->next = new nptr;
                q = p;
                p->data = L1->data;
                p = p->next;
                 L1 = L1->next;     }
        if(L2 != NULL){
                p->next = new nptr;
                q = p;
                p->data = L2->data;
                p = p->next;
                L2 = L2->next;     }
  }
  q->next=NULL;
```

```
}
```

ج)لیستی بنام L3 ایجاد نمایید که ابتدای لیست حاوی عناصر دو لیست L1 و L2 و بخش دوم لیست حاوی عناصر زوج L1 و L2 باشد.

```
void oddeven(nptr*L, nptr*L1,nptr*L2){

  nptr *k = L, *p, *q, *endi;
  for(int i=0; i<2; i++)
  {
        p=L1;
        q=L2;
        while(p != NULL)
        {
                if(p->data % 2 != i)
                {
                   k->data = p->data;
                   k->next = new nptr;
                   endi = k;
                   k = k->next;
                }
                p = p->next;
        }
        while(q != NULL)
        {
                if(q->data % 2 != i)
                {
                   k->data = q->data;
                   k->next = new nptr;
                   endi = k;
                    k = k->next;
                }
                q = q->next;
        }
  }
endi->next = NULL;
}
```

د) لیست L1 را مرتب نمایید.

```
 void bubbleSort(nptr *L){
        nptr *p,*q;
        int flag;
        do{
                flag=0;
                p=L;
                q=p->next;
                while(q!=NULL){
                        if(p->data > q->data){
                                inchange(&p->data,&q-
>data);
                                flag=1;
```

```
                    }
                    p=p->next;
                    q=q->next;
               }
  }while(flag);
```

**مثال۱۰)** عملکرد الگوریتم زیر چیست:

```
Procedure what (L:nptr);
begin
        if L<>nil then
        begin
                write (L^.info);       //1
                what (L^.next);        //2
        end;
end;
```

**جواب: عناصر لیست را بصورت بازگشتی چاپ می کند**

**اگر جای ۱ و ۲ عوض شود ، از آخر به اول چاپ خواهند شد.**

---

**مثال۱۱)** خروجی زیر چیست؟

```
p:=L;
q:=nil;
while p<>nil do
begin
        r:=q;
        q:=p;
        p:=p^.next;
        q^.next:=r;
end;
L:=q;
```

**جواب: لیست را معکوس میکند.**

**در مرحله آخر p به گره آخر اشاره می کند که به کمک آن مکان L را اصلاح می کنیم.**

---

## لیست های حلقوی:

**مثال۱)** محاسبه مجموع مقادیر گره های لیست حلقوی:

```
P:=L;
Repeat
        S:=S+P^.info;
        P:=P^.next;
Until P=L;
```

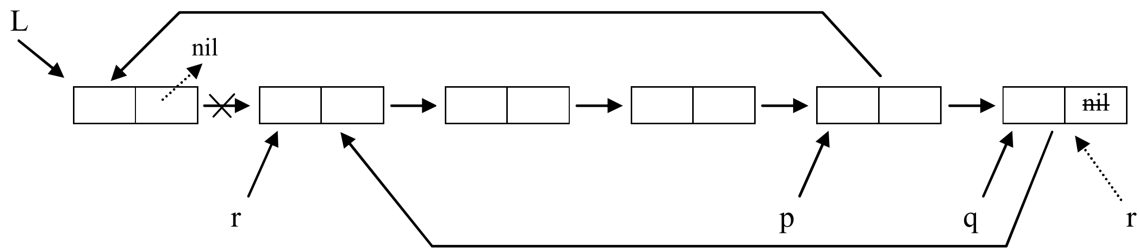
**مثال۲)** اضافه کردن عنصر به ابتدای لیست.

```
new(p);
p^.info:=x;
q:=L
while q^.next<>L do
```

```
        q:=q^.next;
q^.next:=p;
p^.next:=L;
L:=p;
```
هنگام اضافه کردن به انتها به این خط نیازی نیست//

**نکته:** اگر اشاره گر خارجی به گره آخر اشاره کند ، پیچیدگی O(1) می شود ، زیرا نیاز به پیمایش نخواهد بود. در غیر اینصورت پیچیدگی O(n) است.

**تمرین)** جابجایی عناصر اول و آخر لیست:




r := L^.next;

حلقه<=

- آخریq
- ماقبل آخریp

L^.next := nil;

---

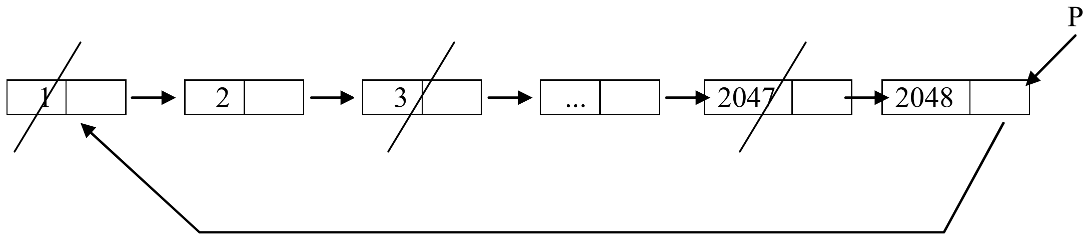
**مثال)** اگر لیست مقابل را داشته باشید ، خروجی الگوریتم چیست؟

۱) ۲۰۴۷

۲) ۱

۳) ۱۰۲۴

۴) ۲۰۴۸ <=




```
while p^.next<>p do
begin
        p^.next := p^.next^.next;
        p:=p^.next;
end;
write(p^.info)
```

دفعه اول عنصر یک حذف میشود ، و بعد روی عنصر دو قرار میگیرد سپس عنصر جلوی آنرا حذف می کند ... تا در نهایت همه عناصر فرد حذف شوند.

دفعه دوم یک در میان مضارب ۲ را حذف می کند (ضریب ۲ باشد و ضریب ۴ نباشد) دفعه بعد ضریب ۴ باشد و ضریب ۸ باشد...

... ضریب ۲۰۴۸

**مثال۲)** در حلقوی گره های با مقادیر فرد را حذف کنید:

```
P:=L;
Repeat
        while(P^.next^.info) mod 2=1 do
                P^.next := P^.next ^.info;
        P:=P^.next;
Until P=L;
```

حالت خاص زمانی است که همه فرد باشند. پس باید بیرون حلقه آن را چک کنید.

همچنین اگر اولین عنصر فرد باشد ، باید اشاره گر خارجی را نیز اصلاح کنید.

**<u>لیست دو پیوندی(Double Linked List) :</u>**

**هر گره _node :**

- داده : info
- اشاره گر به گره بعدی: next
- اشاره گر به گره قبلی: prew

| ساختار در C: | ساختار در پاسکال: |
|---|---|
| typedef struct dnode *dnptr;<br>    struct dnode{<br>        int info;<br>        dnptr, next, prev;<br>    } | Type<br>    Dnptr = ^node;<br>    node = Record;<br>        info: Integer;<br>        next, prev: pnptr;<br>    end; |

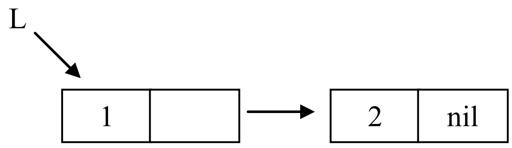
**مثال۱)** مجموعه دستوراتی بنویسید که گره ای با مقدار Xرا به ابتدای لیست دو پیوندی L اضافه نماید.

| :C | پاسکال: |
|---|---|
| dnptr p;<br>p=new struct dnode;<br>p->info = x;<br>p->next = L;<br>p->prev = NULL;<br>L=p; | p:dnptr;<br>new(p);<br>p^.info:=x;<br>p^.prev:=nil;<br>p^.next:=L;<br>L^.prev:=p;<br>L:=p; |

**مثال۲)** حذف یک گره:

```
p^.prev^.next := p^.next;
p^.nexy^.prev := p^.prev;
```

**مثال۳)** خروجی برنامه زیر چیست؟




```
Procedure k(L)
begin
	if L<>nil then
	begin
		k(Link(L));
		write(Data(L));
		k(Link(L));
		write(Data(L));
	end;
end;
```

۱) 221221 ➔

۲) 121212

۳) 221122

۴) 221222

**مثال۴)** نتیجه p چه میشود؟

```
Procedure k(m, n: pointer; var p:pointer);
var
	integer;
begin
	t:=m;
	while(t^.link<>nil) do
		t:=t^.link;
// 1
	t^.linkL:=n;
	p:=m;
end;
```

۱) الحاق دو لیست حلقوی

۲) الحاق دو لیست پیوندی خطی

۳) الحاق دو لیست حلقوی غیر تهی

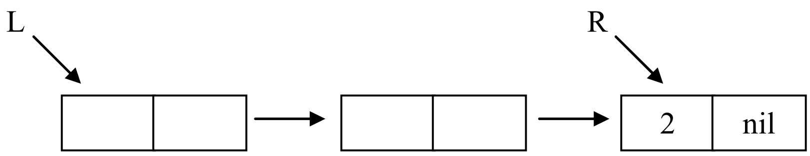
۴) الحاق دو لیست پیوندی خطی که حداقل یکی از آنها غیرتهی باشد

نکته: اگر **m=nil** خطا دارد

اگر در مکان ۱ دستور **if(m!=nil) t^.link=n** قرار داده شود

، آنگاه گزینه ۲ صحیح است

**مثال۵)** هزینه کدام یک از اعمال زیر واسبته به تعداد عناصر لیست است؟



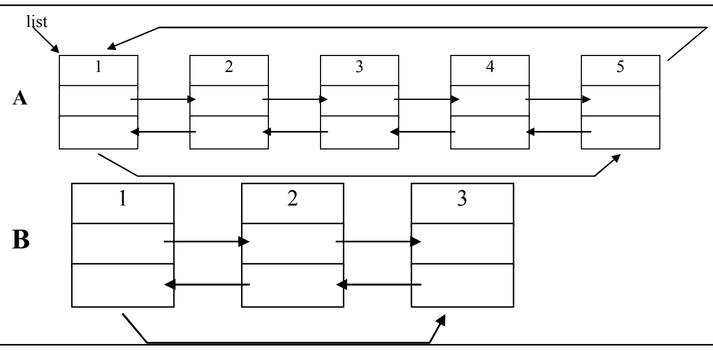

۱) حذف اولین عنصر

۲) حذف آخرین عنصر ➔

۳) درج یک عنصر در انتهای لیست

۴)درج یک عنصر در ابتدای لیست

**مثال۶)** کدام دستور لیست A را به B تبدیل می کند.




۱) list->next->next->next=list->prew

۲) list->prev=list->next->next ➔

۳) list->next=list->prev->next->next

**مثال۷)** برای حذف یک عنصر در لیست دو پیوندی چند آدرس باید جابجا شود؟ **۲ تا**

**مثال۸)** برای اضافه کردن یک عنصر حداکثر چند آدرس باید جابجا شود؟ **۴ تا**

**مثال۹)** اگر X اشاره گری به لیست دو پیوندی باشد ، دستورات زیر چه عملی انجام می دهند؟

```
p->link=x
p->rlink = x->rlink
x->rlink ->llink= p
x->rlink = p
```

۱) حذف گره قبلی

۲) حذف گره بعدی

۳)حذف خود x ➔

۴)درج x

---

**مثال۹)** می خواهیم تغییراتی در لیست تک پیوندی اعمال کنیم که عمل افزودن عنصر به ابتدا یا انتهای لیست با عملیاتی از مرتبه D(1) قابل انجام باشد. لیست پیوندی را. . .

۱) دوطرفه می کنیم ۲)حلقوی می کنیم

۳)معکوس می کنیم ➔۴)حلقوی + اشاره گر خارجی به گره آخر

$$O(1) \Rightarrow \begin{cases} p->next = L\text{^}.next \\ L->next = P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} first : L = P \\ last : nochange \end{cases}$$

**مثال۱۰)** سه تابع و سه اشاره گر داریم:

– first: اشاره گر به گره اول را می دهد

– next: اشاره گر به گره بعدی را می دهد

– end: اشاره گر به گره انتهای لیست را می دهد

تعداد دفعات اجرای تابع first چنداست؟

(طول لیست=n)

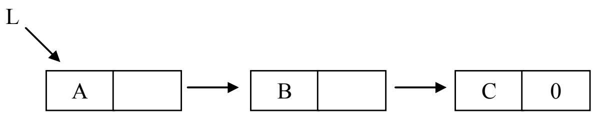
```
P1:=first(L);
While P1<>end(L) do
begin
        P2:=P1;
        while P2<>end(L) do
        begin
                P2:=next(P2,L);
                P3:=first(L);
                while P3<>P2 do
                        P3:=Next(P3,L);
        endl;
        P1:=next(P1,L);
end;
```

$$\frac{n(n-1)}{2}+1$$

---

**مثال۱۱)**روال زیر چه کاری انجام میدهد؟

```
Procedure W(L)
begin
        if L<>0 then
        begin
                W(Link(L));
                Print(Data(L));
                W(Link(L));
                Print(Data(L));
        end;
end;
```




CCBCCBACCBCCBA

# فصل ششم

# لیست های پیوندی Linked List

## کاربرد لیست ها:

- ✓ چندجمله ای
- ✓ محاسبات اعداد بزرگ
- ✓ حل مسئله جوزف (Josephus)

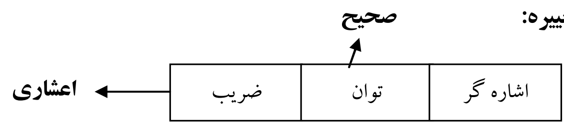
## محاسبات اعداد بزرگ:

$ASSUME: e_n > e_{n-1} > e_{n-2} > ... > e_0$

$$P(x) = a_n X^{e_n} + a_{n-1} X^{e_{n-1}} + ... + a_0 X^{e_0}$$

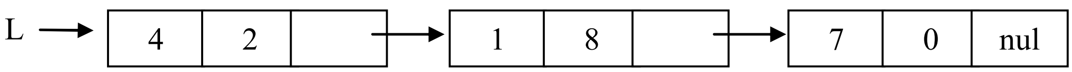
$$P(x) = 4X^{12} + X^8 + 7$$

**یک متغییره:**




**دو متغییره:**

| ضریب | توان x | توان y | اشاره گر |
|---|---|---|---|




## عملیات بر روی چند جمله ای:

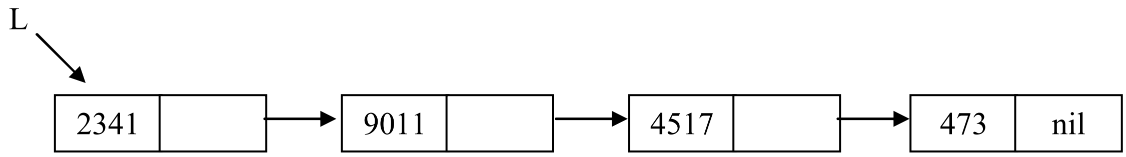
۱- ارزیابی چند جمله ای

۲- جمع دو چند جمله ای

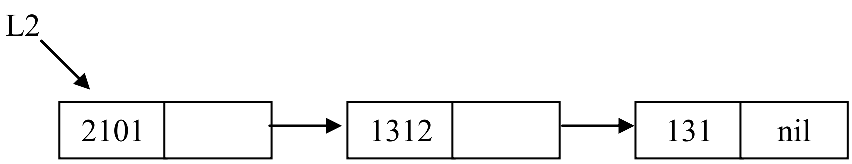
۳- ضرب دو چند جمله ای

## اعداد بزرگ:

**X = 4 7 3 4 5 1 7 9 0 1 1 2 3 4 1**




## جمع با L2:



$C = 0$

$$\begin{cases} sum \xrightarrow{9999} \begin{cases} > \\ <= \end{cases} \\ sum = L->Data + L2->Data + C; \\ C = sum/10000; \\ sum = sum\%10000; \\ AddLast(L3, sum); \end{cases}$$

**L1 } اضافه کردن بقیه گره ها + کری**

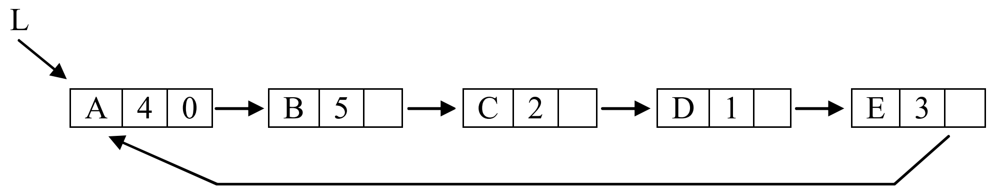
**L2 } اضافه کردن بقیه گره ها + کری**

**افزودن گره به انتها ➔**

---

**مساله جوزف:**

ایجاد لیست حلقوی شامل n عنصر




از یک نقطه بصورت تصادفی شروع می کنیم به شمردن. اولین گره ای که sum را به بیش از S رساند حذف می کنیم و از گره بعدی (با sum=0) شمارش را مجددا ادامه می دهیم.

خروجی: عناصری که حذف می شوند.

---

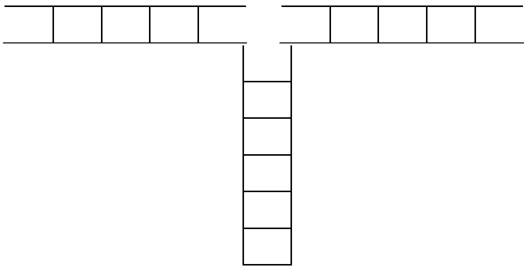
**تمرین)** تابعی بنویسید که تعداد فراخوانی های فیبوناچی را حساب کند:

```
int fibo(int n)
{
	if(n==1 || n==2)
		return(1);
	else if(n>2)
		return(f(n-2)+f(n-1));
}
```

**تمرین۲)** لیست خطی: توابعی بنویسید که اشتراک ، اجتماع و تفاضل دو لیست خطی را محاسبه کنند.

**تمرین ۳)** تابعی بنویسید که لیست خطی را بصورت بازگشتی معکوس کند.

**تمرین۴)** برنامه ای بنویسید که برای n متغییر تعداد همه جایگشت های ممکن جهت ورود به پشته و سپس انتقال به صف دوم را بدست آورد:



e.g. n=2:
a1,a2
a2,a1

**تمرین۵)** تابع زیر را بصورت بازگشتی و غیر بازگشتی بنویسید:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2} & x\%2=0 \\ f(f(3*x+1)) & else \end{cases}$$

e.g: f(5) = 4
f(7) = f(f(22)) = f(11) = f(f(34)) = f(17) = f(f(52)) = f(26) = 13

بازگشتی:

```
int f1(int n)
{
        if(n%2 == 0)
                return (n/2);
        else
                return (f(f(3*n+1)));
}
```

غیربازگشتی:

```
int f2(int n)
{
        while(n%2!=0)
                n=(n*3+1)/2;

        return(n/2);
}
```

## گراف:

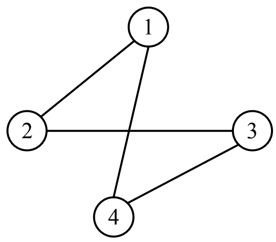
### پیاده سازی گراف:

- مجموعه ها
- ماتریس همجواری
- لیست پیوندی

در گراف بدون جهت ماتریس مجاورت: متقارن است ، پس کافیست فقط بالا یا پایین آنرا ذخیره کرد:

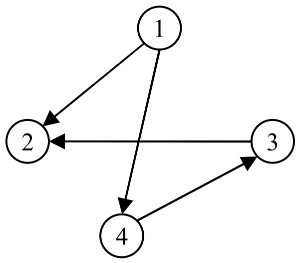
$$T_{n*n} \rightarrow T[i,j]\begin{cases}0 & e \notin E \\ 1 & e \in E\end{cases}$$

$$T_{4*4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$




متقارن است: $n^2$

برای صرفه جویی در ذخیره سازی می توان آنرا بصورت بالا مثلثی و یا پایین مثلثی ذخیره کرد (n(n+1)/2)




$$T_{4*4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

توجه : گراف جهت داری که در آن دور وجود داشته باشد DAG گفته میشود.

---

## درجه راس:

**جهت دار:**

$$v_i \rightarrow \begin{cases} in & row(i) \\ out & col(i) \end{cases}$$

**بدون جهت:**

$$v_i \rightarrow \begin{cases} row(i) \\ col(i) \end{cases}$$

---

**مثال ۱)** آیا مسیری بطول ۲ بین i و j وجود دارد یا نه؟

```
f:=false;
for k:=1 to n do
        f:=f OR (T[i,k] and T[k,j])
```

**معادل است با:**

(T[i,1] and T[1,j]) or (T[i,2] and T[2,j]) or … or (T[i,n] and T[n,j])

**مثال۲)** پیدا کردن مسیر بطول k:

T=همجواری

$T_2[i,j] = T*T$ حاصلضرب ماتریس

…

$T_k=T*T_{k-1}$

| | |
|---|---|
| پیچیدگی الگوریتم ضرب از مرتبه ۲ : $O(n^4)$ | پیچیدگی الگوریتم ضرب از مرتبه بالاتر از ۲ : $O(n^3)$ |

```
P=t ;   adj=T
for k:=1 to n-1 do
begin
        m ← Tk+1       [adj=adj.T ]  O(n3)
        p=p or m
end;
```

**ماتریس مسیر:** آیا مسیری با طول معین k بین دو گره i و j وجود دارد؟

وجود مسیر بین دو گره P[i,j]=1 وجود یال بین دو گره T[i,j]=1

P[i,j] هنگامی یک است که مسیری بین گروه های ۱ تا k وجود داشته باشد که i را به j وصل کند:

آیا مسیری بین i و j وجود دارد؟

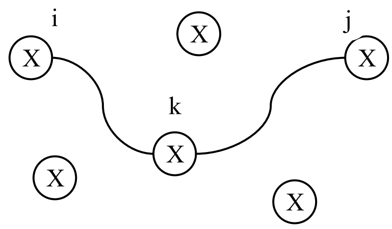
**$T_k=T_{k-1}+T$**

```
P=T1 or T2 or T3 or …  or Tn
for k=1 to n-1 do
begin
        M=[Tk+1]
        P=P or m
end;
```

یالی وجود داشته باشد:

$P_{k-1}[i,j] = 1$

$P_k[i,j] \begin{cases} P_{k-1}[i,j]=1 \\ P_{k-1}[i,k] \,\&\, P_{k-1}[k,j] \end{cases}$




$P_k$ هنگامی یک است که: $P_k = P_{k-1}[i,j]$ or $(P_{k-1}[i,k]$ and $P_{k-1}[k,j])$

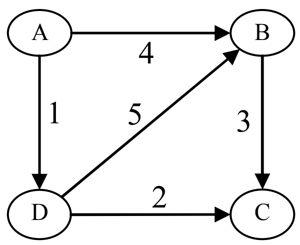
```
for k:=1 ro N do
        for i:=1 ro n do
                if (p[i,k]=True)
```

```
for j:=1 to n do
        p[i,j]=P[i,j] or (p[i,k] and p[k,j])
```

## گرافهای وزن دار:

- وارشال: کوتاهترین مسیر بین کلیه گره ها
- Dijkstra: کوتاهترین مسیر (کم هزینه ترین) بین دو گره مشخص

## وارشال:




$$Q_0 = \begin{bmatrix} 100 & 4 & 100 & 1 \\ 100 & 100 & 3 & 100 \\ 100 & 100 & 100 & 100 \\ 100 & 5 & 2 & 100 \end{bmatrix}$$

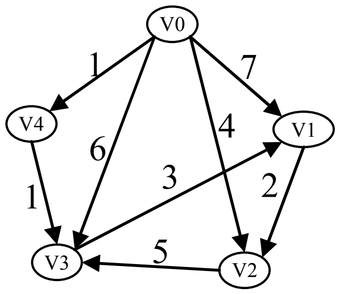
کوتاهترین مسیر به I و J بطوریکه گره ۱ را میانی بگیریم:

Q₁[I,j]=Min{Q₀[I,j], Q₀[I,1]+Q[1,j]}

$Q_1[I,j]=Min\{Q_0[I,j],\ Q_0[I,1]+Q[1,j]\}$

…

**Dijkstra:** پیدا کردن کوتاهترین مسیر بدون درنظر گرفتن گره های میانی




$$w = \begin{bmatrix} 100 & 7 & 4 & 6 & 1 \\ 100 & 100 & 2 & 100 & 100 \\ 100 & 100 & 100 & 5 & 100 \\ 100 & 3 & 100 & 100 & 100 \\ 100 & 100 & 100 & 1 & 100 \end{bmatrix}$$

$d_0$ : کوتاهترین فاصله بین گره صفر تا گره مبدا

$d_4$ : کوتاهترین فاصله بین گره 4 تا گره مبدا

1) $p=\{V_0\}$ $T=\{V_1,V_2,V_3,V_4\}$
$min=\{d_0+w_{01}\ ,\ d_0+w_{02}\ ,\ d_0+w_{03}\ ,\ d_0+w_{04}\}$
$min\{7,4,6,1\}=1$

2) $p=\{V_0\ ,\ V_4\}$ $T=\{\ V_1,V_2,V_3\}$
$min=\{d_0+w_{01},d_0+w_{02},d_0+w_{03},d_4+w_{41},d_4+w_{41},d_4+w_{42},d_4+w_{43}\}$
$min\{7,4,6,101,101,2\}=2$

3) $p=\{V_0\ ,\ V_4\ ,\ V_3\}$ $T=\{V_1\ ,\ V_2\}$
$min=\{7,4,101,101,5,102\}=4$

…

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| V0=0 | V1=5 | V2=4 | V3=2 | V4=1 |

**با شروع از گره V0:**

**الگوریتم وارشال:**

```
P=T
for k:=1 to N do
        for i:=1 to n do
                for j:=1 to n do
                        P[i,j]=P[i,j] or (P[i,j] and P[k,j])
```

→ **$O(n^3)$**

الگوریتم بهبود یافته:

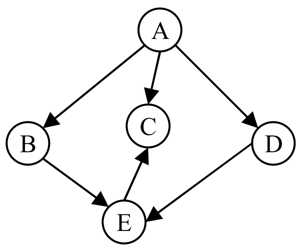
```
P=T
for k:=1 to N do
        for i:=1 to n do
          if P[i,j]=True then
                for j:=1 to n do
                        P[i,j]=P[i,j] or (P[i,j] and P[k,j])
```

**پیمایش گراف (تعیین درخت پوشا)**

- پیمایش عرضی(BFS)
- پیمایش عمقی (DFS)

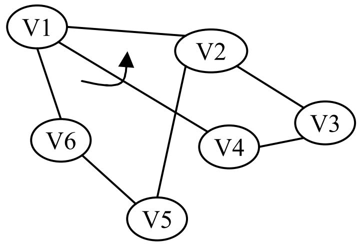
**پیمایش عرضی bfs (پیاده سازی با صف):**

```
EnQ(A);
while not Empty(Q) do
Begin
        DeQ(Q)
        کلیه گره های همجوار گره حذف شده به صف اضافه شوند
End;
```



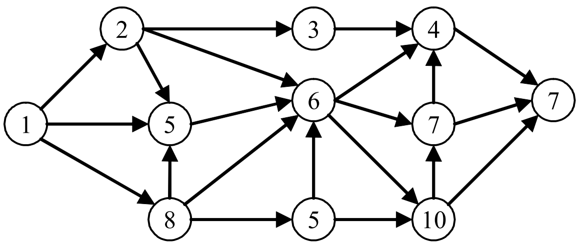

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B | C | D | E | | |

→ ABCDE




از چپ به راست:

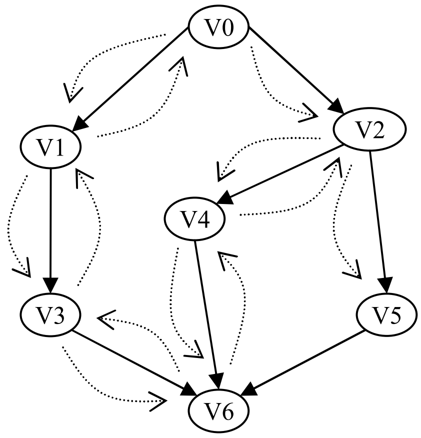
V1 V6 V4 V2 V5 V3




S=1

1,2,5,8,3,6,9,4,7,10,11

## پیمایش عمق درخت dfs (depth first search):




visited:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **f** | **f** | **f** | **f** | **f** | **f** | **F** |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

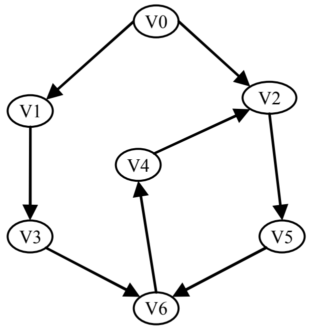
V0 , V1 , V3 , V6 , V2 , V4 , V5

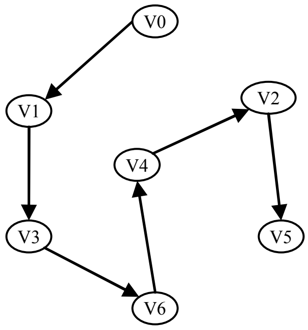
```
dfs(int n)
{
        visited[n]:=true;
        for each w vertix adjacent with n
                dfs(w);
}
```

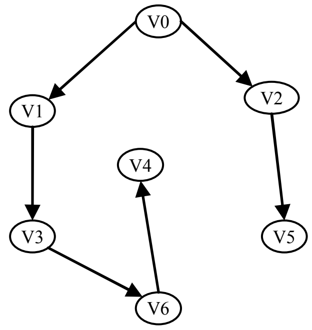
## درخت پوشا (Spanning tree):

درخت همبندی که حداقل تعداد یال را داشته باشد.

Graph DFS BFS



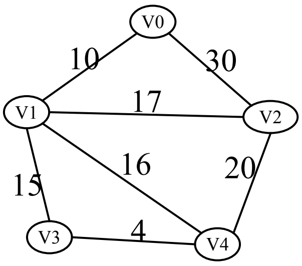



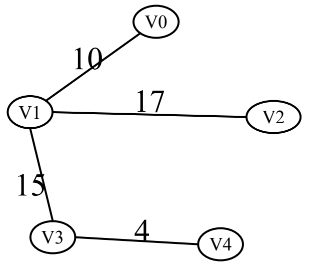

**<u>درخت پوشای بهینه:</u>** minimum spanning tree

**(در گراف های وزن دار)**

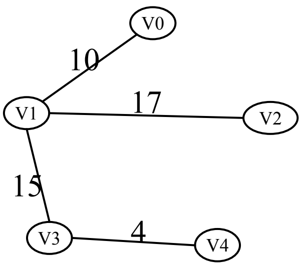
- کراسکال kruskul
- prim




➔ در روش کراسکال ➔
اگر جهت دار نباشد به
ترتیب یالها را از وزن کم تر
انتخاب می کنیم
تا جایی که سیکل ایجاد
نشود



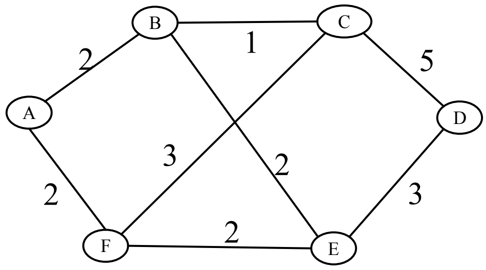

prim: از یک راس شروع می کنیم و هربار کم وزن ترین یال با گره بعدی انتخاب میشود (سیکل ایجاد نشود) ➔




توجه: دو مجموعه داریم که گره مبدا از مجموعه اول و گره مقصد از مجموعه دوم انتخاب می شوند.

مثلا در ابتدا این دو مجموعه بصورت {v0} و {V1,..V4} است.

**سئوال ۱)** اگر A مبدا باشد و از دو روش prim و کراسکال استفاده کنیم ، گره های انتخاب شده چگونه خواهد بود:




۱) K: BC,BE,FE,AF,ED

P: AF,FE,BE,BC,ED

۲) ➔ K: BC,BA,AF,FE,ED

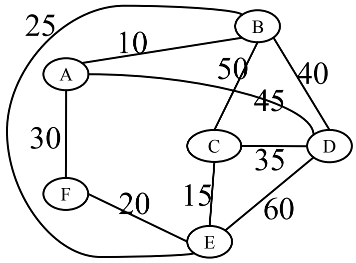
➔ P: AF,FE,EB BC,ED

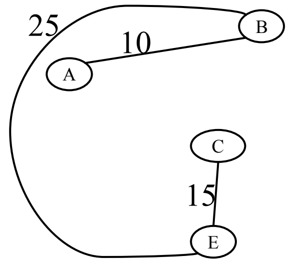
۳) K: BC,FE,AF,AB,ED

P: AB,AF,FE,BC,ED

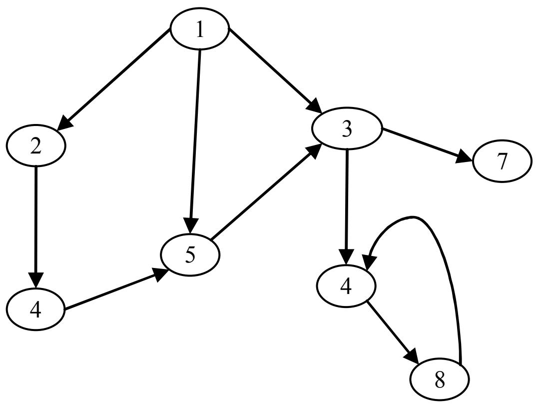
---

**سئوال۲)** در انتهای مرحله سوم prim:




**سئوال ۳)** طبق الگوریتم زیر ، شماره گره ۴ چند است؟




```
count:=0;
Dfs(v:vert x)
        w:vert;
begin
        mark v as visited
        for all verties  w adjacent
to v do
                if (w is not visited)
then
                        Dfs(w);
        count:=count+1;
        DFN[V]:=count;
end;
```

۱) ۴ ۲) ۳ ➔ ۳) ۶ ۴) ۵

---

**سوال ۴)** یک گراف کامل با ۱۰ راس داریم که بدون جهت است و یال های آن بصورت زیر تعریف شده است:

$$w_{ij} = w_{ji} = \begin{cases} i+j & i+j \ge 5 \\ i^2 + j^2 & i+j < 5 \end{cases}$$

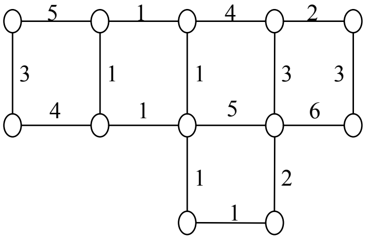
وزن درخت پوشای مینیمال (MST) چند میشود؟

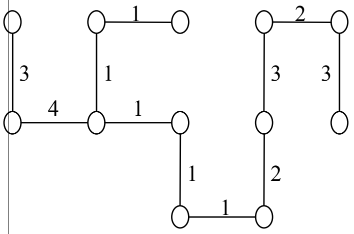
۱) ۷۶ ۲) ۷۵ ۳) ۶۶ ۴) ۶۵

**سئول ۵)** وزن درخت پوشای مینیمال چند میشود؟

۱)۲۲ ➔ ۲)۲۴

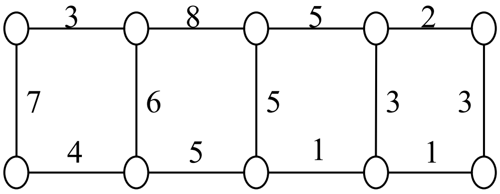
۳) ۲۵    ۴) ۲۰





**سئوال۶)** گراف ساده غیر جهت دار بدون حلقه Gرا در نظر بگیرید که شامل ۱۰ مولفه همبند است. اگر تعداد رئوس گراف برابر ۶۰ باشد در این صورت مجموع درجه های راس های گراف چند است؟

**سئوال۷)** وزن درخت MST چند است؟

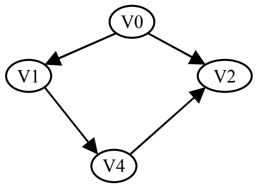


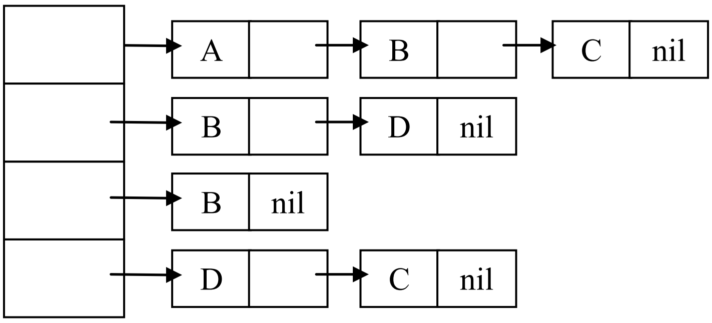
۱) ۳۰ ➔    ۲) ۳۵

۳) ۲۵    ۴) ۳۳

## پیاده سازی گراف:

- آرایه : M[n*n]
- لیست پیوندی (n گره)




```
nptr=^node;
node=RECORD
        item:<int>;
        adj:nptr;
end;
```

```
X:Array[1..n] of nptr;
```

## پیاده سازی Dfs :

آرایه:

حافظه $O(n^2)$

پیمایش $O(n^2)$

لیست پیوندی:

حافظه $O(V+E)$

پیمایش $O(E)$

## درخت:

مجموعه ی یک یا چند گره که:

۱- یکی از گره ها از بقیه متمایز بوده و ریشه نامیده میشود

۲- بقیه گره ها به صفر یا چند زیر مجموعه مجزا تقسیم میشوند ($T_0,\ldots T_n$) که هر کدام از $T_i$ ها خود درخت بوده و زیر درخت ریشه نامیده میشود.

- درجه هر گره: تعداد زیر درخت ها
- درجه درخت: بیشترین درجه موجود بین کلیه نودها
- برگ: گره ای با درجه صفر
- فرزندان یک گره: ریشه های زیر درخت های یک گره
- نیاکان یک گره: کلیه گره های موجود در مسیر منتهی به ریشه (بجز خودش)
- گره های همزاد sibling (هم پدر)« گره هایی که یک ریشه مشترک داشته باشند.

## سطح Level:

سطح ریشه= ۱

سطح هر گره= سطح گره پدر + ۱

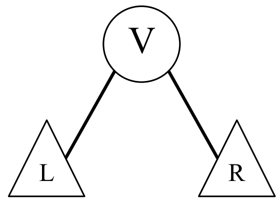
ارتفاع درخت (depth) = ماکزیمم سطح موجود بین کلیه گره ها

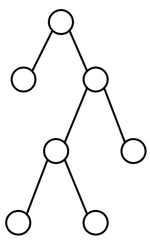
## درخت دودویی:

درجه هر گره حداکثر ۲ است.

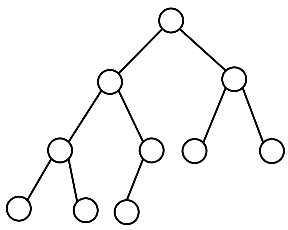
1) تهی

2)



- پر Full: هر گره یا فرزند ندارد یا دقیقا دو فرزند دارد

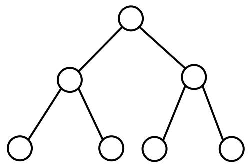


- کامل Complete: تا سطح h-1 یک درخت perfect است و گره های سطح آخر از چپ به راست چیده شده

- تمام Perfect: کلیه گره ها (بجز برگ) دقیقا دو فرزند داشته باشند و

# فصل هشتم درخت Tree

همه برگها در سطح آخر هستند



**نکته۱)** درختی کامل است که اگر آنرا شماره گذاری کنیم ، شماره ها متناظر با شماره های perfect باشد.

**نکته۲)** در درخت perfect اگر یک گره در مکان iباشد فرزند چپ آن در مکان 2i و فرزند راست در مکان 2i+1 است و پدر در مکان i/2 است.

**نکته۳)** حداکثر گره های موجود در سطح i ام : $2^{i-1}$

**نکته۴)** تعداد گره های درخت perfect به عمق h:

$2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{h-1}=2^h-1$ ➔ $1+q+q^2+\ldots+q^k=\frac{1-q^{k+1}}{1-q}$

**نکته۵)** حداقل تعداد گره های درخت کامل به ارتفاع h:

$2^{h-1}-1+1=2^{h-1}$

## پیاده سازی درخت کامل و تمام با آرایه:

X[1..$2^{h-1}$]

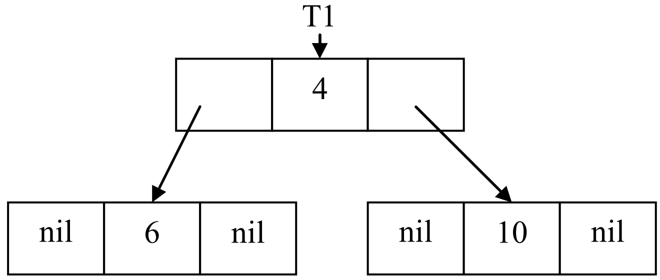
$$X[i]\rightarrow\begin{cases}X[i/2]\rightarrow Parent\\ X[2i]\rightarrow LeftChild\\ X[2i+1]\rightarrow RightChild\end{cases}$$

این روش برای درخت های مورب به هیچ وجه مقرون به صرفه نیست.

## پیاده سازی با لیست:

```
Type
        Tptr=^tree;
        Tree=Record
                item: char;
                Left,Right: Tptr;
        end;

T1,T2,T3:Tptr;
T^.item:=4;
new(T1);
T1.^item:=6;
T1^.Left:=nil;
T1.^Right:=nil;
T^.Left=T1;
```



# فصل هشتم درخت Tree

## روابط درخت:

$n_0$= تعداد گره های برگ

$n_1$= تعداد گره های تک فرزندی

$n_2$= تعداد گره های دو فرزندی

$\mathbf{n=n_0+n_1+n_2}$

➔ B=n-1 تعداد یال ➔ $B=n_1+2n_2$ ➔ $n_1+2n_2+1=n$ ➔ $n_0+n_1+n_2=n_1+2n_2+1$

➔ n0=n2+1

Perfect ➔ تعداد کل گره=n ➔ h=?

$2^h-1=n$ ➔ $h=[\log_2 n+1]$

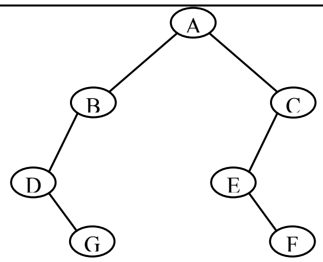
## پیمایش درخت:

عمقی: LVR (in) ، VLR (pre) ، LRV (post) ، RVL ، VRL ، RLV

**سطحی (Level) : BFS ←**

```
EnQ(Q,T);
while not IsEmpty(Q) do
Begin
        T1:=DeQ(Q);
        write(T1^.item);
        if T1^.left <> nil then
                EnQ(Q,T1^.Left);
        if T1^.Right <> nil then
                EnQ(Q,T1^.Right);
End;
```

۱)

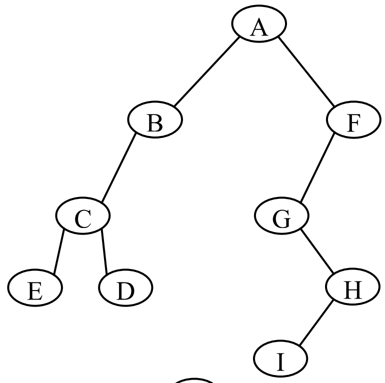



Inorder(LVR): DGBAEFC

# ساختمان داده ها

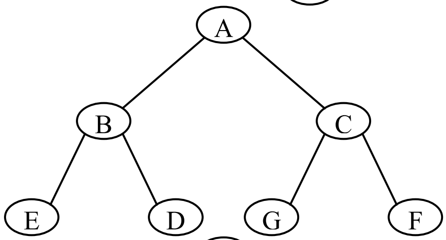
## فصل هشتم — درخت Tree

۲)



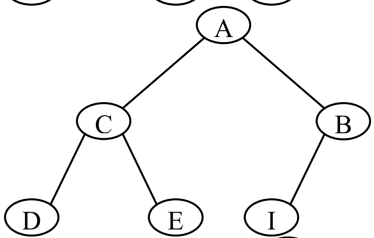
InOrder (LVR): ECDBAGIHF

۳)



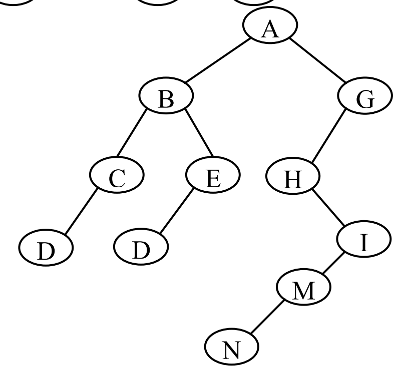
PreOrder (VLR) : ABEDCGF

۴)



PostOrder (LVR) : DECFBA

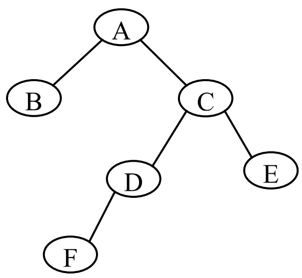
۵)



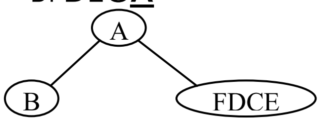
LVR: DCBFEAHNMIG
LRV: DCFEBNMIHGA
VLR: ABCDEFGHIMN
RLV: NMIHGFEDCBA
RVL: GIMNHAEFCDB
VRL: ABHIMNBEFCD

۶) درخت را رسم کنید:

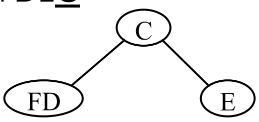
IN(LVR): BAFDCE
Post(LRV): BFDECA
Graph ➔ ?



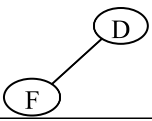
1) LRV: BFDEC**A**



2) LRV: FDE**C**

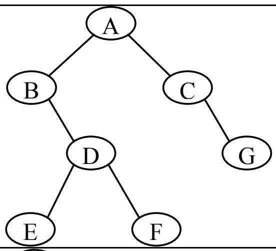


3) LRV: F**D**



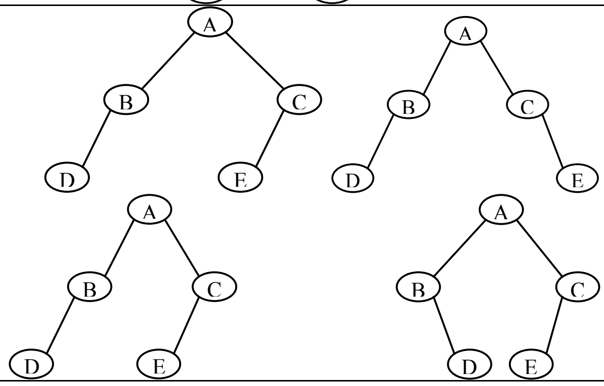
۷) درخت را رسم کنید

IN: BEDFACG
Pre: ABDEFCG




۸) همه درخت های ممکن را رسم کنید:

Pre: ABDCE
Post: DBECA

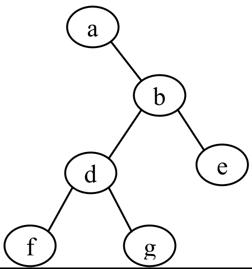


۹) پیمایش InOrder آرایه مقابل چیست؟

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | | b | | d | e | | f | G | |

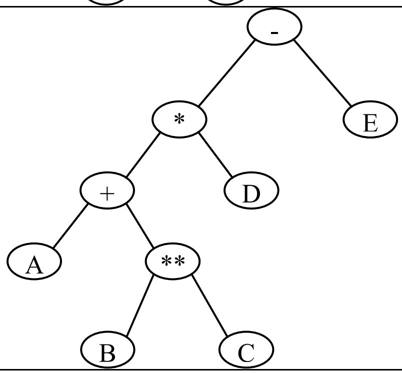
فرزند چپ: $r_i$

فرزند راست: $r_i+1$ afdgbe




۱۰) نتیجه پیمایش میانوندی درخت مقابل چیست؟

Posr: ABC^+D*E
Pre: -*+A^BCDE
In: A+B^C*D-E




۱۱) پیمایش post بصورت مقابل است. کدام گزینه

نمیتواند پیمایش pre باشد؟

D E B F C A

1) ABDECF 2) ABCDEF
3) BADCEF 4) DBEFAC

**پیمایش بصورت بازگشتی:**

```
Procedure InOrder(T:Tptr);
Begin
        if T<>nil then
        begin
                InOrder(T^.Left);
                write(T^.item);
                InOrder(T.right);
        end;
```

```
end;
```

```
Procedure PostOrder(T:Tptr);
Begin
        if T<>nil then
        begin
                PostOrder(T^.Left);
                PostOrder(T.right);
                write(T^.item);
        end;
end;
```

```
Procedure PreOrder(T:Tptr);
Begin
        if T<>nil then
        begin
                write(T^.item);
                PreOrder(T^.Left);
                PreOrder(T.right);
        end;
end;
```

مثال۱)الگوریتم مقابل کدام پیمایش را انجام میدهد؟

```
Procedure Traverse(T);
{
        while T<>nil do
        {
                Traverse(Lchild(T));
                visit(T);
                T:=Rchild(T);
        }
}
```

➔ Inorder

مثال۲) الگوریتم مقابل کدام روش پیمایش را انجام میدهد؟

```
Procedure Traverse(T)
Begin
        P:=T;
        F:=FALSE;
        Repeat
                while(P<>nil) do
                Begin
                        push(P,s);
                        P:=Lchild(P);
                End;
                If not IsEmpty(S) then
                Begin
                        pop(P,s);
                        write(data(P));
                        P:=Rchild(P);
                End;
                else
                        F:=TRUE;
        Until F;
End;
```

➔ LVR

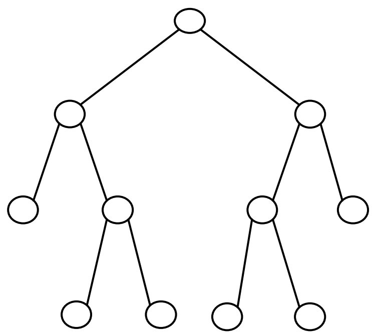
مثال۳)

```
Procedure tst(T)
Begin
        push(s,T);
        while(stack s is not empty)
        begin
                T:=pop(s);
                while T<>nil do
                begin
                        Push(s,T^.right);
                        visit(T);
                        T:=T^.Left;
                end;
        end;
end;
```

➔ VLR

**مثال۴)** با توجه به درخت ، خروجی را مشخص کنید.

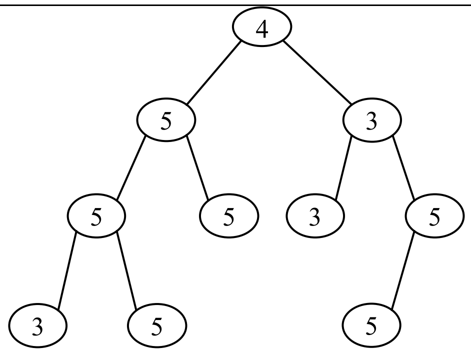
1)12 2)8 3)10➔ 4)6



```
Function k(T):Integer;
Begin
        if T=nil then
                k:=0
        else
                k:=k(Rchild(Lchild(T)))
                +3*k(Lchild(Rchild(T))+2;
End;
```

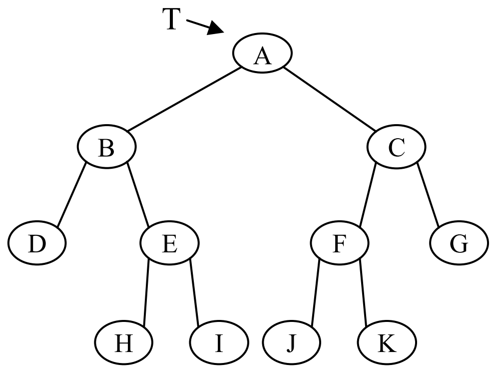
**مثال۵)** این تابع چندبار مقدار ۵ را برمیگرداند؟

**جواب:** ۶ بار




```
function k(a):Byte;
Begin
        if a has weight then
                k:=weight(a);
        else
                k:=k(parent(a));
End;
```

**مثال۶)** مقدار بازگشتی تابعی زیر چند است؟




1) 4　　2)5　　3)6　　**<u>4)8</u>**

```
Function count(T);
Begin
        if T<>nil then
         count:=2count(Lchild(Rchild(T)));
              +count(Rchild(Lchild(T)))+1;
        else
                count:=0;
End;
```

**درخت عبارت جبری:**

عملگر: دودویی / × − +　　　یکتایی ! ~ −

**مثال۷)** اگر تعداد کل گره های درخت ۱۴ باشد ، کدام گزینه درست است؟

۱) تعداد عملگرهای دودویی همواره فرد است.

۲) تعداد عملگرهای دودویی همواره زوج است.

۳)تعداد عملگرهای یکتایی همواره زوج است

۴) تعداد عملگرهای یکتایی همواره فرد است ➔

اثبات:

$n=n_0+n_1+n_2$

$n_0=n_2+1$ در هر درخت تعداد برگ ها مستقل از تعداد گره های تک فرزندی است

$14= n_0+n_1+n_2$

$14=n_2+1+n_1+n_2$

$13=2n_2+n_1$

فرد+زوج = فرد

**مثال۸)** اگر $n_4=5$ و $n_3=6$ و $n_2=5$ آنگاه تعداد برگها چندتاست؟ ($n_0=?$)

$n=n_4+n_3+n_2+n_1+n_0$

$B=n-1$

$B=n_1+2n_2+3n_3+4n_4$ ➔ $n=n_1+4n_2+3n_3+4n_4+1$ ➔ $n_0=3n_4+2n_3+n_2+1$

➔ $n_0=15+12+5+1 = 33$

$$n_0=n_2+2n_3+3n_4+\dots+(k-1)n_k$$

**درخت FULL:**

هر گره : -برگ -دوفرزندی

اگر تعداد برگ ها n باشد ، تعداد گره ها 2n-1 است. اگر تعداد گره های غیربرگ n باشد ، تعداد گره ها 2n+1 است.

**مثال۹)** در حالت فوق اگر پیمایش Pre و برگ ها را داشته باشیم ، کدام گزینه صحیح است؟

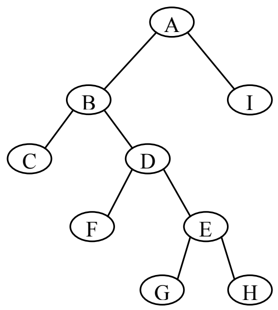
۱) میتوان درخت را ایجاد نمود ولی درخت حاصل واحد نیست.

۲) میتوان درخت را ایجاد نمود و درخت حاصل واحد است ➔

۳) نمی توان آنرا ایجاد نمود

۴) فقط اگر درخت بالانس باشد ،میتوان آنرا ایجاد کرد.

مثال:




Pre: A B C D F E G H I

برگها: { C F I H G }

**مثال۱۰)** عمق درخت عبارت جبری را بدست آورید:h=6

(-a)*b*c – d/e*g +h

**اندازه درخت:** تعداد گره های درخت.

```
Function TreeSize(T:Tptr):integer;
begin
        if T=nil then
                TreeSize:=0;
        else
                TreeSize= 1+TreeSize(T^.  Left)+TreeSize(T^.  Right);
End;
```

تعیین تعداد گره های برگ:

```
function NumofLeaves(T:Tptr):integer;
Begin
        if T=nil them
                NumofLeaves:=0;
        else if (T^.Left=nil) and (T^.Right=nil) then
                NumofLeaves:=1;
        else
                NumofLeaves:=NumofLeaves(T^.Left)+NumofLeaves(T^.Right);
End
```

آیا دو درخت مساوی هستند؟

```
int Cmp(Tptr T1,Tptr T2)
{
        if (T1==NULL && T2==NULL)
                return(1);
        else if (T1!=NULL && T2!=NULL && Data(T1)==Data(T2))
                return(Cmp(Left(T1),Left(T2) && Cmp(Right(T1),Right(T2));
        else
                return(0);
}
```

تابع زیر چه مقداری را برمیگرداند؟ **ارتفاع درخت**

```
Function k(t:pointer):integer;
Begin
        if t=nil then
                k:=0;
        else
                k:=1 + max(k(T.Left),k(T.Right));
End;
```

تابعی بنویسید که یک کپی از درخت T1 ساخته و اشاره گر T2 را به آن برگرداند.

```
Function CopyTree(T1:Tptr):Tptr;
Var
        T:Tptr;
```

```
Begin
	if T1<>nil then
	Begin
		new(T);
		T^.info = T1^.info;
		T^.left=CopyTree(T1^.Left);
		T^.Right=CopyTree(T1^.Right);
		CopyTree := T;
	End;
	else
		CopyTree:=nil;
End;
```

هر گره درخت :

- برگ
- k تا فرزند دارد

n: تعداد کل گره ها

- تعداد برگ : $n_0 = n - \left\lceil \frac{n-1}{k} \right\rceil$
- تعداد غیر برگ: $\left\lceil \frac{n-1}{k} \right\rceil$

مثال: k=3　　$n_0 = 10 - \frac{9}{3} = 7$

اثبات:

$n=n_0+n_k$　　, $B=n-1$　　, $B=kn_k$ ➔ $\frac{n-1}{k} = n_k$ ➔ $n_0 = n - \frac{n-1}{k}$

۲) یک درخت ۳ تایی داریم (هر گره ۳ لینک دارد). اگر این درخت شامل ۱۰ گره باشد ، چند اتصال null و چند غیر null دارد.

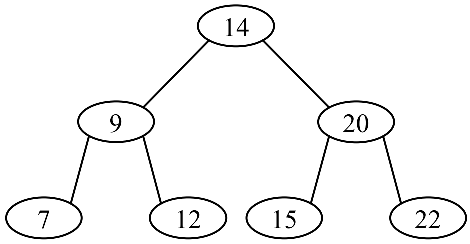
n-1=nilغیر=9 ➔ n*3=کل اشاره گرها=30　　　➔ nil=30-9=21

**نتیجه:** n گره k تایی: کل اشاره گرها:nk ، اشاره گرهای غیر nil: n-1 ، اشاره گرهای nil : nk-(n-1)

**<u>BST (binary search tree):</u>**

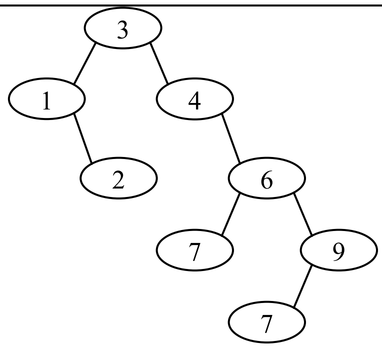
## <u>درخت جستجوی دودویی:</u>

مقدار گره ریشه از مقدار فرزند چپ بیشتر و از مقدار فرزند راست کمتر باشد:



**مثال۱)** با اعداد مقابل یک درخت BST ایجاد کنید.

3,1,4,6,9,2,5,7



**مثال۲)** با k کلید چند درخت BST میتوان ساخت؟

جواب: ۲ تا

با سه تا کلید چطور؟ ۵ تا

رابطه مربوط به تعداد درخت های BST متفاوت که با n کلید میتوان ساخت؟ $\frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$

چند درخت ارتفاع n دارند؟ $2^{n-1}$

اگر داده ها مرتب شده باشند ، ارتفاع همیشه n است.

## حذف گره در BST:

- برگ (گره = nil)
- تک فرزندی: کافیست اشاره گری از پدر به فرزند متصل شود
- دو فرزندی: پیمایش inorderرا نگاه میکنیم. گره ای که در inorder بعد از گره موردنظر آمده است بجای عنصر حذف شده می نشیند که حتما یا برگ است یا تک فرزندی است.

LVR: 7 8 9 10 12 13 15 16 17 <u>20</u> 24 25 (نتیجه پیمایش به ترتیب صعودی است)

برای ترتیب نزولی می توان از RLV استفاده کرد.

**مثال۳)** اگر اعداد یک تا هزار در یک درخت BST درج شده باشند و بدنبال عدد **۳۶۳** بگردیم ، کدامیک از ترتیب های زیر نمی تواند بیانگر ترتیب دسترسی به عناصر درخت در این جستجو باشد؟

۱) 924,220,911,244,898,258,362,363

۲) 925,202,911,240,912,245,363 ←

...

## پیاده سازی:

```
Tptr: left , right , info

function find(X:integer; T:Tptr):Tptr;
Begin
        if T=nil then
                find:=nil
        else if T^.info>X then
                find:=find(T^.Left)
        else if T^.info<X then
                find:=find(T^.Right)
        else
                find:=T
End;
```

بصورت غیر بازگشتی:

```
While(T!=nil && T^.info!=x)
{
        if(T^.info>X)
                T=T^.Left;
        else(T^.info<X);
                T=T^.Right;
}
```

**مثال ۱)** تابعی بنویسید که مقدار min را بدست آورد

```
function findmin(T:Tptr):Tptr
Begin
        while(T^.Left!=nil)
                T=T^.Left;
        return T;
End
```

```
Tptr K(T)
{
        if (T==NULL) return NULL
        else if (T.Left==NULL)
                return T
        else Return (K(T.Left))
}
```

## افزودن به درخت BST:

- ابتدا گره را جستجو می کنیم
- اضافه کردن در صورت وجود نداشتن گره
- اگر X<q^.item سپس q^.Left=temp
- در غیر اینصورت q^.Right=temp

```
int Insert(Tptr T,int X)
```

```
{
        Tptr P= T, temp;
        while(T!=NULL && Data(T)!=X)
        {
                if(Data(T)>X)
                {
                        P=T;
                        T=Left(T);
                }
                else if(Data(T)<X)
                {
                        P=T;
                        T=Right(T);
                }
        }
        if (T==NULL)
        {
                temp=new Tptr;
                Data(temp)=X;
                Right(temp)=NULL;
                Left(temp)=NULL;
                if( Data(p)<X )
                        Right(P)=temp;
                else
                        Left(P)=temp;
        }
        else
                پیغام خطا
}
```

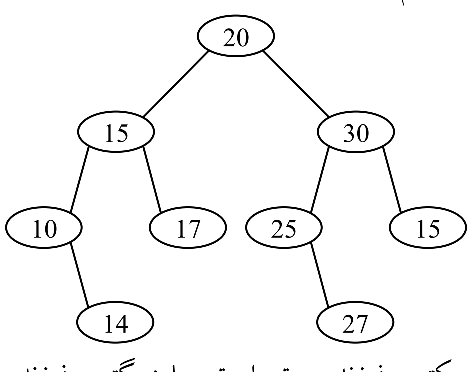
**تمرین ۱)** در صورت حذف ریشه ، کدام گره می توان بجای ریشه قرار گیرد تا درخت BST باقی بماند (هدف پیدا کردن آدرس یکی از گره های درخت Tمیباشد که اگر بجای ریشه درخت بنشیند ، درخت T یک درخت جستجوی دودویی باقی بماند) کدام یک از کدهای زیر این کار را انجام میدهد.

۱)

```
P:=Left(T);
While right(p)!=nil do
        P:=Right(P);
```

۲)

```
P:=Right(T);
While Left(P)!=nil do
        P=Left(P);
```




باید یا کوچکترین فرزند سمت راست و یا بزرگترین فرزند سمت

چپ را پیدا کند...

**تمرین۲) درج بصورت بازگشتی:**

```
Procedure Insert(X:Integer; Var T:Tptr);
var
        Tptr *temp;
Begin
        if T=nil then
        Begin
                new(temp);
                temp^.info:=X;
                temp^.Left:=nil;
                temp^.Right:=nil;
                T:=temp;
        End;
        Else
        Begin
                if X<T^.info then
                        Insert(X,T^.Left);
                else if X>T^.info then
                        Insert(X,T^.right);
                Else
                        پیغام خطا
        End;
End;
```

**تابع حذف از BST:**

```
Procedure Delete(X:Integer; Var T:Tptr);
Var
        temp:Tptr;
Begin
        if T=nil then
        Begin
                Error Halt
        End
        Else if  X<T^.info then
                Delete(X,T^.Left)
        Else if  X>T^.info then
                Delete(X,T^.Right)
        Else                                    {//x=T^.info}
        Begin
                if T^.Left=nil then
                Begin
                        temp:=T;
                        T:=T^.Right;
```

```
            dispose (temp);
        End
        Else if T^.right=nil then
        Begin
            temp:=T;
            T:=T^.Left;
            dispose(temp);
        End;
    Else                                { // 2 child }
        Begin
            temp:=findmin(T^.Right);
            T^.info:=temp^.info;
            Delete(T^.info, T^.Right);
        End;
    End;
End;
```

اگر درخت BST کاملا بالانس باشد ارتفاع آن $\log_2 n$ خواهد بود.

این درخت AVL نام دارد که در آن حداکثر اختلاف هر زیر درخت آبرابر یک است.

$|h(L)-h(R)|<=1$

حداقل گره مورد نیاز برای ایجاد درخت AVL به ارتفاع h:

h=2 n=2
h=3 n=4
h=4 n=7

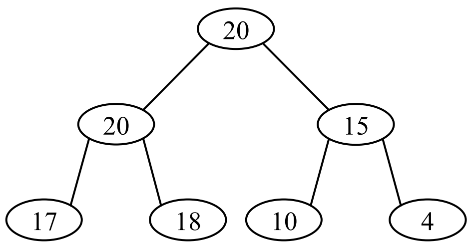
**n(h)=n(h-1)+n(h-2)+1** (n(1)=1 , n(2)=2)

## هرم کپه (HEAP):

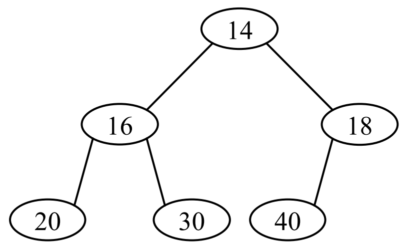
درخت دودویی کامل:

min-heap: اگر مقدار گره ریشه از مقدار فرزندانش بزرگتر نباشد

max-heap: اگر مقدار گره ریشه از مقدار فرزندانش کوچکتر نباشد




max-heap




min-heap

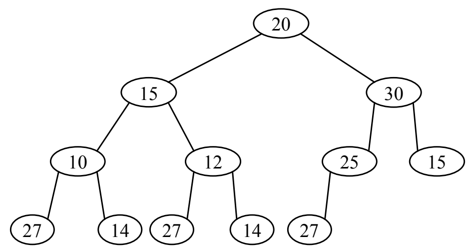
اگر تعداد کل گره ها nباشد : $h=\lfloor \log_2 n \rfloor+1$

همیشه تعداد گره های برگ: $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor+1$

غیربرگ: $\frac{n}{2}$

جستجوی بزرگترین عنصر را باید در برگها انجام داد.

در بدترین حالت n/2 مقایسه انجام میشود. !!




| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1 | 6 | 4 | 10 | 15 | 7 | 9 | 17 | 20 | 16 | 30 | 10 |

ریشه: ۱

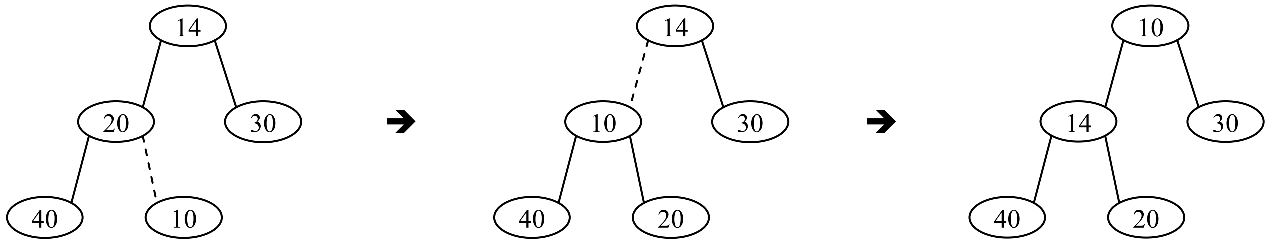
فرزند چپ گره i: 2i ، فرزند راست گره i: 2*i+1

پدر گره i: i/2

- Insert
- Delete

## اضافه کردن:

گره جدید را به انتها اضافه می کنیم. در این حالت درخت کامل است اما از حالت heap خارج شده است. پس باید آنرا به مکان صحیح منتقل کرد...




پیچیدگی عمل اضافه کردن $\log_2 n$ است (همان ارتفاع درخت است)

پیچیدگی ایجاد درخت $n\log_2 n$ است (برای n عنصر)

**سئوال۱)** با اضافه کردن عنصری با مقدار 95 چند عمل جابجایی انجام میشود.

۱) ۲ ←	۲) ۴	۳) ۶	۴) ۸

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 100 | 90 | 82 | 85 | 74 | 75 | 73 | 68 | 70 | |

**سئوال۲)** یک max heap شامل nعنصر که با آرایه پیاده سازی شده است داریم. مناسبترین گزینه برای پیدا کردن عنصر min کدام است.

۱) O(Logn)	۲) حداکثر n-1 مقایسه

۳) ← حداکثر n/2 مقایسه	۴) هیچکدام

**سئوال۳)** یک max-heap شامل nعنصر متمایز داریم. چهارمین بزرگترین عنصر در کدامیک از داریه های زیر می تواند باشد؟

۱) ۲ یا ۳	۲) ۸ تا ۱۵	۳) ۴ تا ۷	۴) همه موارد ←

## Delete (حذف از heap):

همیشه ریشه حذف میشود. پس آخرین عنصر بجای آن قرار گرفته و درخت مجددا بازسازی میشود.

## مرتب سازی Heap:

ابتدا عناصر در یک heap درج شده و سپس به ترتیب حذف میشوند. (پیچیدگی nlogn)

صعودی : minheap	نزولی: maxheap

## ساختمان داده ها

فصل هشتم درخت Tree

**تمرین ۱)** آرایه ای شامل n عنصر داریم که برای ذخیره سازی عناصر درخت دودویی کامل مورد استفاده واقع شده است. الگوریتمی بنویسید که بررسی کند درخت heap است یا نه؟ (پیچیدگی را بدست آورید)

**تمرین ۲)** کدام گزینه صحیح است؟

۱) حداکثر عمق درخت BST برابر O(logn) است

۲) حداکثر عمق درخت heap برابر O(n) است ➔

۳) حداکثر عمق درخت BST برابر O(n) است

۴) حداکثر عمق درخت Heap و BST برابر O(Logn) است

**تمرین ۳)** یک درخت BST داریم. X: برگ a=value(x) و Y:پدر گرهx ، b=value(y)

کدام گزینه صحیح است؟

۱) b بزرگترین کلید در T است که کوچکتر از a می باشد.

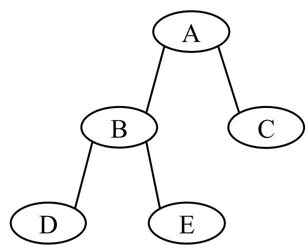
۲) a کوچکترین کلید در Tاست که بزرگتر از b می باشد

۳) b کوچکترین کلید در T است که بزرگتر از a میباشد

۴) هیچکدام ➔

**تمرین ۴)** درخت را با توجه به الگوریتم داده شده پیمایش کنید:

```
Procedure tst(T)
Begin
    if T<>nil then
    Begin
        write (Data(T))
        tst (Rchild(T))
        write (Data(T))
        tst (Lchild(T))
    End
End
```




ACCABEEBDD

**تمرین ۵)** n عنصر با مقادیر مختلف داریم که میتوان با استفاده از یک درخت BST که در ابتدا تهی است آنها را مرتب کرد. الف) درج عناصر به ترتیب در درخت T ب) پیمایش به روش inorder

پیچیدگی این الگوریتم را بدست آورید: **بهترین حالت $n^2$** **بدترین حالت: nlogn**

**ادامه مبحث Heap:**

```
Procedure Insert (X:<Type>; Var H:Heap);
var
	i:Integer;
Begin
	Inc(H.size);
	i:=H.size;
	while H.Elemen[I Div 2] > x do          // تا زمانی که مقدار ریشه از فرزند بیشتر است
	begin                                   // باید گره فرزند را به بالا انتقال داد
		H.Element[i]:=H.Element[I Div 2];
		i:=I Div 2;
	end;
	H.Element[i]:=x;
End;
```

---

```
Function DeletMin (var H:Heap): <Type>;
var
	I,child: Integer;
	flag: Boolean;
	tmp, last : <type>;
	Begin
		tmp:=H. Element[1];
		last := H.Element[H.size];
		Dec(H.size);
		i:=1;
		flag:=false;
		while (2*I < H.size) and (not flag) do
		begin
			child:=2*I;
			if child <> H.size then
				if H.Element[child+1] < H.Element[child] then
					child :=child +1;
			if lastElement>H.Element[child] then
			bgin
				H.Element[i] := H.Element[child];
				i:=child;
			end;
			else
				flag:=True;
		end; {while}
		H.Element[i]:=lastElement;
End;
```

## مرتب سازی Heap:

در این روش ابتدا کلیه عناصر در یک min-heap یا max-heap درج میشوند. با توجه به اینکه بخواهیم عناصر را صعودی مرتب نماییم یا نزولی؟

مثلا جهت مرتب سازی صعودی کلیه عناصر را به ترتیب با n بار فراخوانی تابع Insert در یک min-heap درج می کنیم ، سپس nبار تابع Delete را فراخوانی می کنیم که در هر مرحله عنصر minرا به ما میدهد.

- پیچیدگی عمل درج حداکثر O(logn) است
- پیچیدگی عمل حذف نیز O(logn) است
- ساخت heap از مرتبه O(nlogn) است.

## مرتب سازی Merge:

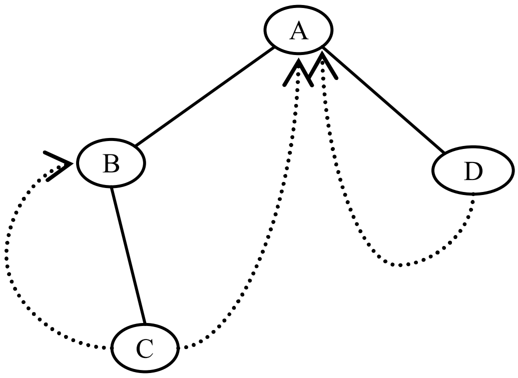
در این روش آرایه به دو تکه مساوی تقسیم شده سپس هر قسمت مرتب شده و نتایج مرتب سازیها با هم ادغام میشوند. در این حالت به یک آرایه کمکی با حداکثر اندازه n نیاز داریم.

```
mergeSort(A, L, U)
begin
        اگر تعداد عناصر کمتر از ۲ باشد
                return ;
        else
                mid := (L+U) Div 2;
        mergeSort(A,L,mid);
        mergeSort(A,mid+1,U);
        merge(A,L,mid,U);
end;
```

روتین merge آرایه های مرتب شده A[L..mid] و A[mid+L..U] را در هم ادغام می نماید. بگونه ای که پس از فراخوانی آن آرایه A از اندیس L..U مرتب شده است

## درخت نخی:

چون در یک درخت دودویی از میان 2n اشارهگر فقط n-1 اشاره گر آن مورد استفاده قرار میگیرد و عملا از بقیه استفاده نمی شود ، میتوان از این اشاره گرها جهت ساده سازی در اعمال پیمایش ها استفاده نمود. مثلا میتوان جهت استفاده در پیمایش inorder استفاده نمود که در اینصورت اشارگر سمت راست اگر nilباشد کاری می کنیم که به گره بعدی در پیمایش inorder اشاره نماید و اگر اشاره گر چپ nil باشد کاری می کنیم که به گره قبلی در پیمایش inorder اشاره نماید.




InOrder: BCAD

جهت تشخیص اینکه آیا اشاره گر یک گره اصلی هستند یا اینکه اشاره گر نخی ، میتوانیم از دو متغییر اضافی در ساختار گره ها استفاده نماییم.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| lf | left | info | right | rf |

rf=0 : left یک اشاره گر اصلی است

rf=1: left یک اشاره گر نخی است