کنترل بهینه
دکتر تقی زاده

منابع: Kirk : ترجمه دکتر نیکروش
Lewis: optimal control

www.utk-control.blogfa.com

از اینترنت 4 فصل (1 و 2 و 4 و 5) را پرینت بگیرید

تمرین + شبیه سازی با متلب

5 ~~4~~ 6 نمره برای ارائه مقاله

در آزمون دکترا بیشتر از کتاب Kirk می‌آید.

جلسه اول:

خواص ماتریس ها:

1) $(AB)^T = B^T . A^T$

2) $(AB)^{-1} = B^{-1} . A^{-1}$ برای قاعده 2 شرط معکوس پذیری را داریم.

- رتبه ماتریس: تعداد سطرهای مستقل یا ستون‌های مستقل را رتبه ماتریس می‌گویند.

برای تشخیص رتبه ماتریس روش زیر را داریم:

a) فرض $\det A \neq 0$ باشد یعنی رتبه ماتریس A کامل است.
یعنی تمام سطرها و ستون‌ها مستقل از هم هستند.

$$A^{-1} = \frac{Adj'(A)}{\det A}$$

Example: $A=\begin{bmatrix}0&1&2\\5&0&3\\1&1&1\end{bmatrix}$ $\det A = 8 \neq 0$

رتبه کامل است.

b) روش تبدیل به ماتریس قطری توسط عملیات سطری و ستونی (ضرب سطح) برای تشخیص

مستقل از هم بودن سطرها و ستون‌ها

$$A=\begin{bmatrix}0&1&2\\5&0&3\\1&1&1\end{bmatrix} \xrightarrow{\times -5,\ +} \begin{bmatrix}0&1&2\\0&-5&-2\\1&1&1\end{bmatrix} \xrightarrow{\times 5,\ +} \begin{bmatrix}0&1&2\\0&0&8\\1&1&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\times -\frac{1}{4},\ +} \begin{bmatrix}0&1&2\\0&0&8\\1&0&-1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&8\\1&0&0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&8\end{bmatrix}$$

$\times\frac{1}{8}$ (سعی می‌کنیم سطرها را طوری که فقط یک درایه داشته باشند (یا صفر) ماتریس را از روی آن تبدیل به قطری می‌کنیم. (وقتی دارای سطر صفر شد)

رتبه A شد 3 یعنی هر سه سطر و ستون‌ها مستقل از هم هستند اگر دو سطر یا دو ستون

به هم وابسته می‌شدند rank A برابر 2 می‌شد. یعنی به ازای هر تعداد وابستگی یک

واحد از رتبه ماتریس کم می‌شود.

3) $x \in R^n$ $(x=[x_1, x_2, \dots, x_n]^T)$

$y \in R^n$ $(y=[y_1, y_2, \dots, y_n]^T)$

$M \in R^{n\times n}$

منظور $y_{n\times 1}$ است

$$x^T \cdot M \cdot y = y^T \cdot M \cdot x \longrightarrow$$ حاصل یک اسکالر است.

4) possitive definite

ماتریس معین مثبت

ماتریس حقیقی $A_{n \times n}$ ، p.d است اگر به ازای هر $\underset{n \times 1}{y} \neq 0$ داشته باشیم

$$y^T \cdot A \cdot y > 0$$

5) possitive semi-definite

مثبت نیمه معین

ماتریس حقیقی $A_{n \times n}$ ، p.s.d است اگر به ازای هر $y \neq 0$ داشته باشیم

$$y^T \cdot A \cdot y \geq 0$$

نکته: اگر A متقارن باشد شرط لازم و کافی برای p.d بودن آن است که کلیه مقادیر ویژه آن اکیداً مثبت باشد ✓

$$|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

معادله مشخصه

که یک معادله درجه n است با n تا مقدار ویژه

if $\lambda_i > 0 \longrightarrow$ p.d

if $\lambda_i \geq 0 \longrightarrow$ p.s.d

برای ماتریس A اگر $\det A = 0$ ماتریس را ویژه یا singular می‌گوییم.
اگر $\det A \neq 0$ ماتریس را nonsingular می‌گویند.

اگر ماتریس خیلی بالا بره معمولاً به Actuator اشباع می‌رود

6) $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

نتیجه اینکه وقتی A، p.d است پس معکوس پذیر است چون در واقع $\det A \neq 0$ می‌باشد.

7) $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ مجموع عناصر روی قطر اصلی

trace

if $tr(A) < 0 \Longrightarrow$ یقیناً A، p.d نیست

8) $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$

9) $\det(A.B) = \det(A) . \det(B)$ به شرط مربع بودن A و B

10) $\underset{1\times1}{f(x)} = \underset{1\times n}{x^T} . \underset{n\times n}{Q} . \underset{n\times1}{x}$

اسکالر

$\longrightarrow \dfrac{d f_{1\times1}}{dx} = ?$

Q را معمولاً متقارن می‌گیرند. $f(x)$ مشتق‌پذیر باشد.

Example: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} q_{11} & c \\ c & q_{22} \end{bmatrix}$

c را به خاطر اینکه Q متقارن شود انتخاب شده است.

اثبات: $f(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & c \\ c & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} q_{11}x_1 + cx_2 & cx_1 + q_{22}x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q_{11}x_1^2 + 2cx_1x_2 + q_{22}x_2^2 \end{bmatrix}_{1\times 1}$$ اسکالر

فرم مربعی شده است.

$$\frac{df(x)}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{df(x)}{dx_1} \\ \frac{df(x)}{dx_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2q_{11}x_1 + 2cx_2 \\ 2cx_1 + 2q_{22}x_2 \end{bmatrix}$$

$$= 2 \begin{bmatrix} q_{11} & c \\ c & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2Qx$$

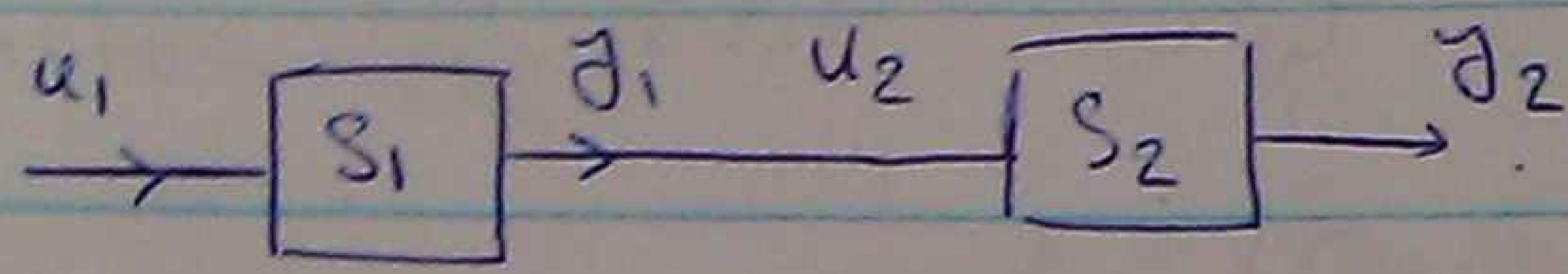
حتی اگر ماتریس x n بعدی هم باشد در نهایت (با فرض متقارن بودن Q) خواهیم داشت:

$$\frac{df(x)}{dx} = 2Qx$$

11) $\frac{d}{dx}(Ax) = A$

— ترکیب سیستم‌ها

سری : cascad



معادله سیستم

$$S_1: \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 & \text{معادله حالت} \\ y_1 = C_1 x_1 + D_1 u_1 & \text{معادله خروجی} \end{cases}$$

$$S_2: \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 u_2 \end{cases}$$

رابطه سری : $u_2 = y_1$ ✓

$y = y_2$ ✓

$$\rightarrow \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1$$

$$\dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 (C_1 x_1 + D_1 u_1)$$

$$y = y_2 = C_2 x_2 + D_2 (C_1 x_1 + D_1 u_1)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix} u_1$$

$$y = \begin{bmatrix} D_2 C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_2 D_1 \end{bmatrix} u_1$$

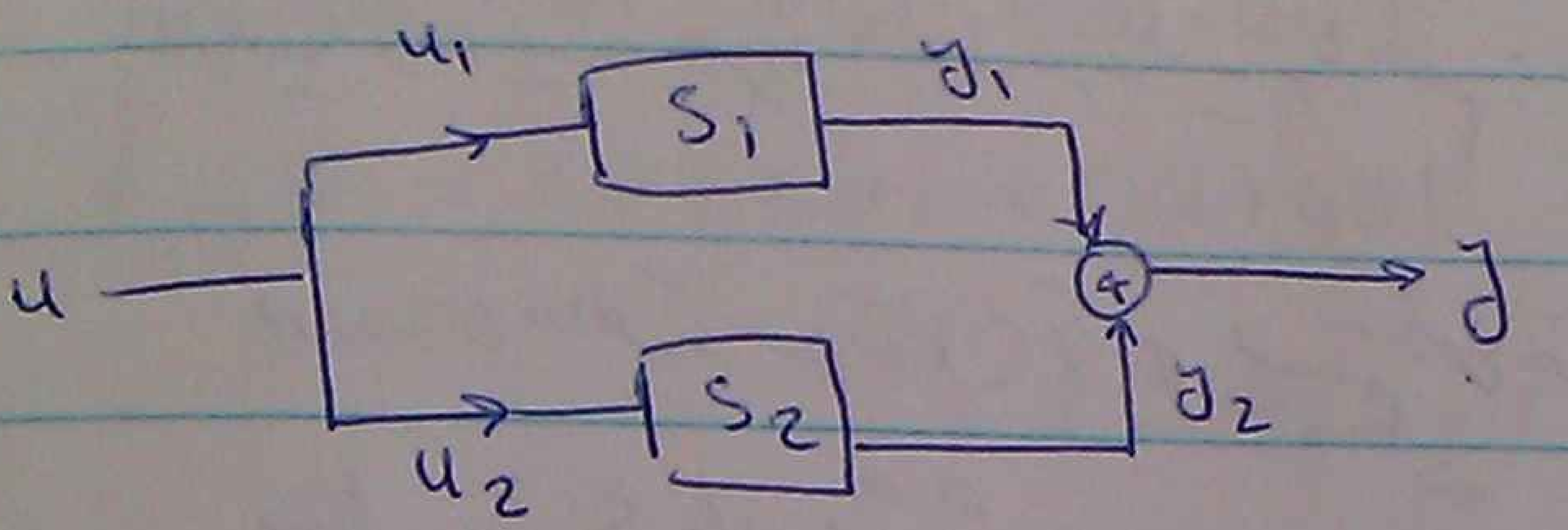
if $u_1 \neq u_2$: Decentralized control

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \ \& \ B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \ \& \ D = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \end{bmatrix}$$

حاصل 2n بعدی است یعنی 2 تا سیستم n بعدی داریم که با هم سری شده اند.

موازی : parallel



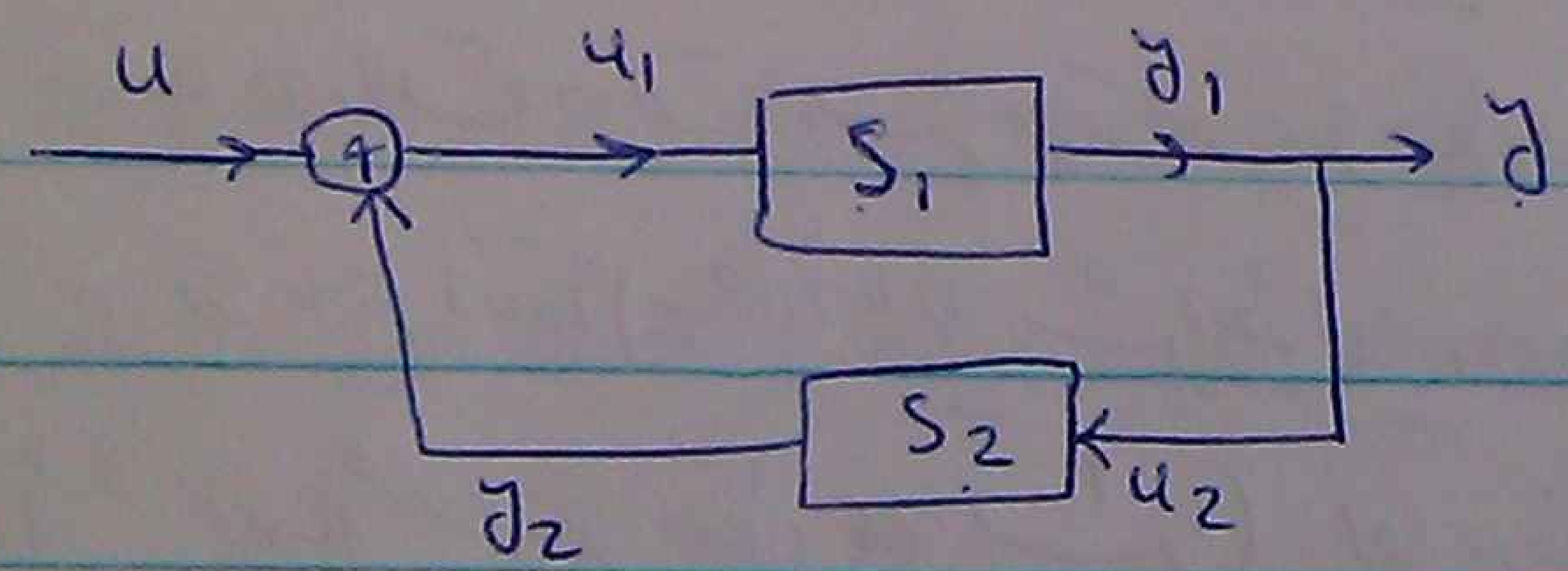
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} D_1 + D_2 \end{bmatrix} u$$

$u = u_1 = u_2$, $y = y_1 + y_2$

ترکیب 2n بعدی می شود.

ساختار فیدبکی : feedback



از دو جزء Slector

$y = y_1$ & $u_2 = y_1$ & $u_1 = u - y_2$

مقایسه فضای کلاسیک با فضای حالت :

$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$: $n \times 1$

$y(t) = g(x(t), u(t), t)$

در فضای کلاسیک توصیف سیستم با تابع تبدیل سیستم است. یعنی اگر معادلات دیفرانسیل استفاده نشود ۱ معادله دیفرانسیل از درجه n داریم.

تابع انتقال $H(s) = \dfrac{\text{تبدیل لاپلاس خروجی } Y(s)}{\text{تبدیل لاپلاس ورودی } X(s)}$

یا $G(s)$ حلقه باز

در فضای حالت حداکثر درجات ۱ است اما n بعدی هستیم.

مزیت و معایب هردو فضا در مقایسه با هم:

در فضای حالت می‌توان تمام سیستم‌های خطی و غیرخطی را پوشش داد اما تابع انتقال فقط خطی‌ها را پوشش می‌دهد. یعنی اگر سیستم غیرخطی باشد نمی‌توان تبدیل لاپلاس آن سیستم را گرفت.

اگر تابع انتقال LTI باشد باید تمامی ضرایب ثابت با زمان باشند.

در معادلات حالت سیستم می‌تواند غیرخطی و متغیر با زمان باشد.

در تابع انتقال حتماً باید شرایط اولیه صفر باشند (اگر شرایط اولیه صفر نباشند اصلاً سیستم خطی نمی‌باشد) اما در فضای حالت لازم نیست $X(0)=0$ باشد.

مزیت دیگر تابع انتقال نسبت به فضای حالت در سیستم‌هایی که تأخیر رخ می‌دهد یعنی سیستم‌هایی که خطی و تغییر ناپذیر با زمان باشد در فضای تابع تبدیل راحت‌تر حل می‌شوند و تأخیر را در این فضا راحت‌تر نمایش داده می‌شود در صورتی که در فضای حالت نمی‌توانیم تأخیر را بررسی کنیم.

GM , PM = ?

سیستم خطی با متغیر با زمان

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\cdot u(t) \\ y(t) = C(t)\,x(t) + D(t)\,u(t) \end{cases}$$

ماتریس های ۱ با n بعدی

$\Phi(t,t_0)$ ماتریس انتقال حالت (آینده حالت)

$$x(t) = \Phi(t,t_0)\cdot x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau$$

$$\dot{\Phi}(t,t_0) = A(t)\cdot\Phi(t,t_0)$$

اگر سیستم LTI باشد و $t_0=0$ باشد: ماتریس ثابت هستند یعنی

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$\Phi(t) = e^{At}$$

$$\dot{\Phi}(t) = A\,\Phi(t)$$

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau$$

$$\checkmark\ \Phi(t,t_0) = \Phi(t-t_0)$$

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)\,d\tau$$

روش اول:

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots$$

اگر سیستم LTI باشد و $t_0=0$ باشد $x(t)=L^{-1}\{(SI-A)^{-1}x(0)+(SI-A)^{-1}BU(s)\}$

$$x(t)=L^{-1}\{\Phi(s)x(0)+H(s)U(s)\}$$

زمانی از این روش استفاده می‌کنیم (البته بهتر) که A صفر داشته باشد. که به توان بالاتر که می‌رود به صفر برسد.

روش دوم:

$$L(e^{at})=\frac{1}{s-a}=(s-a)^{-1}$$

$$L(e^{At})=(SI-A)^{-1} \Rightarrow e^{At}=L^{-1}((SI-A)^{-1})$$

روش سوم: قطری سازی

$$e^{At}=e^{\lambda_i t}$$

کنترل پذیری و رویت پذیری:

کنترل پذیری یعنی ورودی می‌توان یافت که متغیرهای حالت را در فضای x بتوان از یک نقطه دلخواه به نقطه دلخواه دیگر ببرد.

نکته: اگر $t_1>t_0$ (t_1 محدود) و سیگنال کنترل $u(t)$ برای $t\in[t_0,t_1]$ وجود داشته باشد که x_0 را در زمان t_1 به مبدأ منتقل کند آنگاه x_0 کنترل پذیر نامیده می‌شود. (اگر به ازای هر x_0 سیستم کنترل پذیر باشد به طور کامل کنترل پذیر نامیده می‌شود.)

انواع کنترل پذیری: خروجی - تابعی - حالت.

در کنترل پذیری تابعی: چک می‌کنیم که آیا می‌تواند یک ورودی سینوسی یا پله یا ... را دنبال کند یا نه

برای حالت باید رتبه $G(s)$ کامل باشد.

در کنترل پذیری حالت: آیا یک ورودی یافت می‌شود که هر $x(t_0)$ را در زمان

محدود به هر $x(t)$ دلخواه ببرد (اصلاً کاری به خروجی ندارد).

$$\Phi_c = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

اگر رتبه Φ_c برابر با n باشد آنوقت سیستم کنترل پذیر حالت است.

$$\text{if } \rho(\Phi_c) = n \Longrightarrow \text{کنترل پذیر حالت است}$$

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Example:
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + 5u \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 3x_2 + u \end{cases} \longrightarrow \rho\Phi_c = 2$$

در کنترل پذیری خروجی:

$$\Phi_{c_o} = [CB \quad CAB \quad \dots \quad CA^{n-1}B]$$

رتبه Φ_{c_o} باید برابر با تعداد خروجی ها باشد تا کنترل پذیر باشد.

اگر با داشتن ورودی و خروجی بتوانیم متغیر حالت را بدست آوریم می‌توانیم بگوییم رویت پذیر است. یا اگر از ورودی و خروجی نتوانیم بفهمیم دقیقاً سیستم چه کار می‌کند رویت ناپذیر می‌شود.

تعریف: فرض کنید برای $t \geq t_0$ داشته باشیم $u(t)=0$ اگر مقدار

اولیه حالت x_0 از روی خروجی $y(t)$ در بازه زمانی $[t_0 , t_1]$ قابل محاسبه

باشند x_0 رویت پذیر باشد. (اگر به ازای هر t_0 سیستم رویت پذیر باشد به طور

کامل رویت پذیر نامیده می‌شود.)

$$x(t) = \Phi(t,t_0)\,x(t_0) + \underbrace{\int \times 0}_{u(t)=0 \text{ گرفتیم}}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

رتبه کامل باشد ← رویت پذیر است

شناسایی سیستم: ورودی و خروجی را داریم می‌خواهیم $H(t)$ را بدست آوریم

یعنی مدل سیستم را شناسایی کنیم.

مشخصه: در اینجا شاخص‌های دیگر overshoot و زمان نشست و ... نیست

در اینجا می‌خواهیم در کمترین زمان و با کمترین انرژی به نقطه صفر برسیم

بحث‌های رگولاتوری (به صفر رسیدن) و

tracking (دنبال کردن) و مقید و نامقید بودن مطرح می‌شوند

در کنترل بهینه می‌خواهیم بهترین مسیر را برای متغیر حالت پیدا کنیم و شاخص

عملکرد را بهینه یا optimal کنیم

جلسه دوم 91,7,3

در حالت کلاسیک شاخص برای عملکرد کنترل کننده ، زمان نشست t_s ، rise time و زمان خیز

overshoot ، delay ، traking ، خطای حالت دائم و خطای seteling time

در حوزه فرکانس PM و GM و ... را داریم . و هدف این بود که حداکثر شیب را دنبال کند. لذا مثلاً $\sqrt{t}$ و sint را دنبال کند نداریم اکثراً ورودی پله یا شیب بود.

کنترل کننده برای MIMO در حوزه کلاسیک داریم.

لذا در کنترل بهینه traking نیز بحث می شود.

تابع انتقال را به صورت ماتریسی داریم (ابتدا ما).

در طراحی کنترل کننده فیدبک حالت داشتیم از آن استفاده می کنیم که قطب ها را جا یابی می کند. (pole assign)

در کنترل بهینه 3 قسمت برای فرموله کردن داریم:

فرموله کردن مسأله:

1. مدل ریاضی سیستم را لازم داریم در فضای حالت

$$\dot{x} = a(x(t), u(t), t)$$

2. قیود فیزیکی (چه قیدهایی داریم ، زمان رسیدن و زمان پایانی آیا آزاد هست یا نه ، آیا نقطه پایانی آزاد هست یا نه ، آیا انرژی محدود است یا آزاد و ...)

3. معیار کارایی

Performance Index

شاخص کارایی

$$x(t) \triangleq [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \dots \quad x_n(t)]^T$$

فرض کنید فقط n بعدی باشد

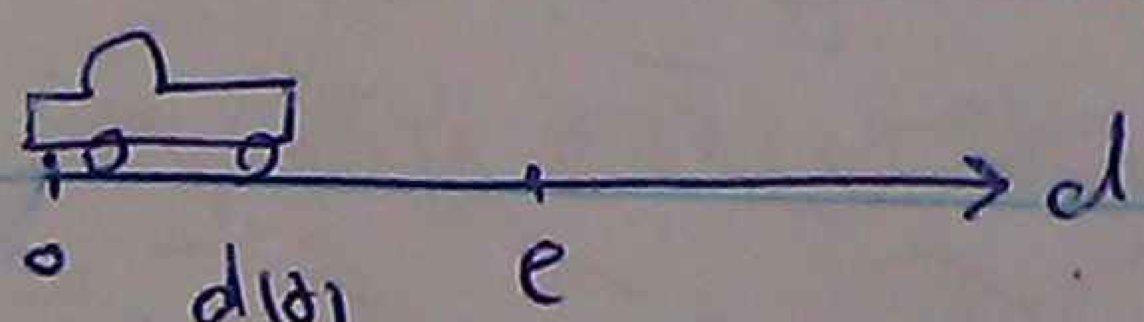
متغیرهای حالت

$$u(t) \triangleq [u_1(t) \quad u_2(t) \quad \dots \quad u_m(t)]^T$$

ورودی کنترل

m تعداد ورودی

Example : فرض کنید یک اتومبیل داریم در لحظه t_0 در نقطه صفر است و می‌خواهد به اندازه e متر جلو برود.



$d(t)$: فاصله از مبدأ در لحظه t

$m = 1$ جرم اتومبیل (نرمالیزه)

$\alpha(t)$: شتاب مثبت (از پدال گاز می‌آید) ورودی است.

$\beta(t)$: شتاب منفی (ترمز) ورودی است.

$$\ddot{d}(t) = \alpha(t) + \beta(t)$$

d مسافت - $\dot{d}$ سرعت - $\ddot{d}$ شتاب

$$x_1(t) = d(t)$$

$$x_2(t) = \dot{d}(t) = \dot{x}_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{d}(t) = \alpha(t) + \beta(t)$$

$$u_1(t) = \alpha(t) \quad ; \quad u_2(t) = \beta(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u_1 + u_2 \end{cases} \qquad \dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \& \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

قیود حدی برای این مثال:

فرض کنید در نقطه e توقف کند

شرایط اولیه
- $x_1(t_0) = 0$: چون در لحظه اول در مبدا قرار دارد.
- $x_2(t_0) = 0$: چون در لحظه سکون می‌خواهد حرکت کند (سرعت صفر)

شرایط نهایی
- $x_1(t_f) = e$: در زمان نهایی به نقطه e رسیده است t_f: final time
- $x_2(t_f) = 0$: در لحظه t_f که به e رسیده ساکن شده است.

$$\Longrightarrow \quad x(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \& \quad x(t_f) = \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix}$$

اگر فرض شود که ماشین مستقیماً به جلو حرکت کرده تا به e برسد یعنی حرکت عقب وجود نداشته باشد در نهایت overshoot نخواهد داشت.

در واقع داریم:

$0 \leq x_1(t) \leq e$ $\&$ $0 \leq x_2(t)$: یعنی به عقب برنگشته

اگر برمی‌گشت $x_2(t)$ (سرعت) منفی می‌شد.

فرض کنید قدرت موتور محدود است یعنی شتاب محدودی می توان ایجاد کند

درنتیجه : قدرت موتور محدود ⟸ $M_1 > 0$ بیشترین شتاب مثبت ⟸

$$0 \le u_1(t) \le M_1$$

ونیز فرض کنید قدرت ترمز محدود باشد ⟸ $M_2 > 0$ بیشترین شتاب منفی

$$-M_2 \le u_2(t) \le 0$$

فرض کنید ماشین با G گالن بنزین شروع به حرکت کند. (شتاب و گاز روی مصرف سوخت ماشین تاثیر دارد اما ترمز تاثیری در مصرف سوخت ندارد)

$$\int_{t_0}^{t_f} (\underbrace{k_1 u_1(t)}_{\text{گاز و شتاب مثبت}} + k_2 x_2(t))\, dt \le G$$

چرا x_2؟ چرا x_1 نمی کنیم؟

معیار کارایی یا شاخص عملکرد (Performance Index) (PI)

برای این مثال: درواقع هدف اینه که در کمترین زمان و با کمترین مصرف سوخت

$J = t_f - t_0$ را

به مقصد برسیم. یعنی باید

مینیمایز کنیم. یعنی باید J کمترین مقدار خود را داشته باشد اگر

بخواهد Maximaze شود باید $-J$ را بدست آوریم.

$$J = \int_{t_0}^{t_f} 1\, dt$$

$$J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t)\, dt$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} 1\, dt$$

که در ساده‌ترین حالت $h=0$ و $g=1$ را داریم یعنی حال

هدف این است که بدست آوریم یک ورودی کنترل بهینه یا سیاست بهینه $u(t)$ را باید به گونه‌ای بیابیم که اولاً قیود رعایت شوند ثانیاً J کمینه شود و ثالثاً $x(t)$ در مدل ریاضی صدق کند (مسیر بهینه یا مسیر قابل قبول)

x^* : مسیر بهینه

u^* : ورودی کنترل بهینه

(وقتی * می‌گذاریم یعنی بهینه شده است)

امکان دارد بعضی وقت‌ها همچین uای باشد بعضی وقت‌ها نباشد یا قیود رعایت شوند و یا چند uای باشد و منحصر به فرد نباشد.

باید x^* و u^* باشد $\Leftarrow$ J^* بدست آید. (تابع هزینه cost function یا تابع جریمه)

در واقع J^*، J بهینه شده است که در آن J کمینه است یعنی کمترین مقدار را دارد.

زمان آزاد

در قیود بعضی وقت‌ها t_f را آزاد می‌گذاریم یعنی مسیرش برایمون مهم است. اما زمان به مقصد رسیدنش برایمون مهم نیست

و یا $\boxed{x(t_f) = e \pm \varepsilon}$ یا t_f را آزاد می‌گذاریم مثلاً در زدن موشک به هواپیمای هدف برخورد است و مدت زمان رسیدن به هدف برایمون مهم نیست.

در اینجا زمان برایمون مهم است اما اینکه با مقصد ۲ یا ۳ اختلاف داشته باشد برایمون مهم نیست t_f آزاد

بعضی وقت‌ها track کردن برامون مهم است.

فصل دوم: معیار عملکرد.

۱. حداقل زمان:

اولین مسأله اینکه در حداقل زمان می‌خواهیم به هدفمون برسیم $J = t_f - t_0$

2. کنترل پایانه:

دومین مسأله خطای پایانی باشد بعضی وقت‌ها می‌گیم خطا صفر باشد بعضی وقت‌ها می‌گیم خطا نزدیک صفر باشد.

حداقل کردن اختلاف حالت نهایی سیستم از مقدار مطلوب $r(t_f)$

refrence

$$J = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i(t_f) - r_i(t_f)\right]^2$$ همیشه اکثراً است.

final state ; refrence terminal vector

$$= \left[x(t_f) - r(t_f)\right]^T_{1 \times n} \left[x(t_f) - r(t_f)\right]_{n \times 1} = \|x(t_f) - r(t_f)\|^2$$

اگر بعضی از متغیرهای حالت مهم‌تر باشند از ضریب وزنی H استفاده می‌شود:

$$J = \left[x(t_f) - r(t_f)\right]^T \cdot H \cdot \left[x(t_f) - r(t_f)\right] = \|x(t_f) - r(t_f)\|_H^2$$

H را معمولاً قطری و با توجه به اینکه کدام متغیر برامون مهم‌تر است در نظر گرفته می‌شود.

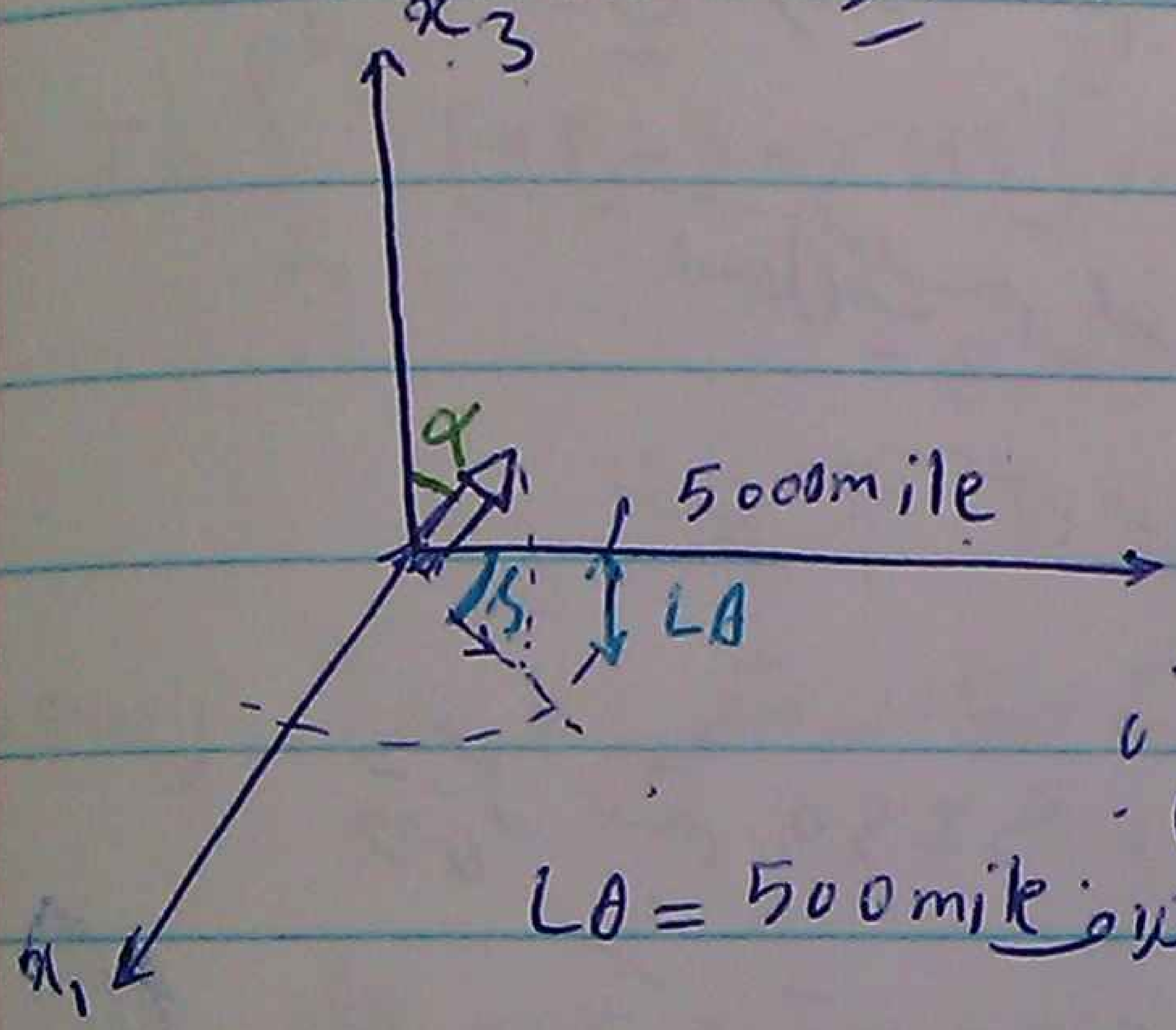
$H_{n \times n}$: ماتریس حقیقی متقارن مثبت نیمه معین

مثال: $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ یعنی متغیر سوم $x_3(t_f)$ اصلاً برامون مهم نیست

که ضریب صفر رسید و متغیر دوم ۱۰ برابر متغیر اول

برامون اهمیت داره.

Example: فرض کنید موشکی پرتاب می‌شود به صورت زیر



هدف اینه که $\theta = 0$ بشود موقع پرتاب تا

به هدف برخورد کند در غیر این صورت

$L\theta$ از هدف فاصله خواهد داشت یعنی در واقع با

فرض $\theta = 0.1$ rad (یا $\theta = 6^\circ$) معادل انحراف $L\theta = 500$ mile

$\pi = 3.14$ $\quad \frac{180}{\pi} \rightsquigarrow ? \quad \frac{18}{3} = 6^\circ$

$0.1 \quad ? \; \theta$ در درجه خواهد شد

$$J = k_1 \left(R(t_f) - 5000 \right)^2 + k_2 \theta^2$$

θ را به توان 2 رساندیم چون منفی‌اش برامون مهم نیست و با علامت مثبت

آن کار داریم تا min رو محدود کنیم. که مقدار کمتر از صفر را نداشته باشد در واقع

می‌خواهیم کمترین مقدار صفر باشد.

می‌خواهیم تنظیم k_1 و k_2 را چنان انجام دهیم که تأثیر $R(t_f)$ و θ یکسان باشد

پس داریم:

θ در 0.1 rad $\longrightarrow$ تأثیرش در J = ?

$L \longrightarrow$ تأثیرش در J = ?

$0.1 \Longrightarrow 500 \text{ mile} \Longrightarrow \frac{500}{0.1} = 5000$

توضیح $\rightsquigarrow$

$\longrightarrow k_2 = (5000)^2 k_1$

θ حداکثر $2\pi = 6^\circ$ می‌تواند تغییر کند.

در اینجا ورودی‌ها همچون α و $A(t)$ هستند.

3. حداقل تلاش کنترل:

با کمترین انرژی سیستم را می‌خواهیم به مقدار نهایی‌اش برسونیم یعنی

انتقال یک سیستم از $x(t_0) = x_0$ به S با حداقل سعی (هزینه یا انرژی)

در این حالت J برابر انرژی سیگنال ورودی است.

$$J = r\int_{t_0}^{t_f} u^2(t)\,dt$$

r فاکتور تصحیح واحد — $u(t)$ ورودی

وقتی که سیستم SISO باشد.

لذا در حالت کلی‌تر داریم: (برای چند ورودی) $J = \int_{t_0}^{t_f} u^T(t) \cdot Ru(t)\,dt$

مشتق $= 2Ru$

R: ماتریس متقارن مثبت معین است. (باید معین باشد چون می‌خواهیم بعداً ازش معکوس بگیریم.)

خیلی وقت‌ها روی u قید داریم یعنی نمی‌توانیم مثلاً u داشته باشیم برای همین R اینجا در نیمه معین باشد (یعنی صفر نداشته باشد).

$$J = \int_{t_0}^{t_f} |u(t)|\,dt$$

4. حداقل سوخت

برای حداقل کردن مصرف سوخت سفینه — مشتق ندارد.

(این مثال رگولاتوری تنظیم کننده بودن) که در آن $u(t)$ نیروی رانش موتور است که اندازه آن متناسب با مصرف سوخت فرض شده است.

حالا می‌رسیم به عنوان مهم است مسئله تعقیب یا tracking نیز:

5. ردیابی (تعقیب) tracking

می‌خواهیم مسیر حالت سیستم $(x(t))$ در زمان $t \in [t_0 , t_f]$ نزدیک به مسیر حالت مطلوب $r(t)$ نگه داریم.

$$J=\int_{t_0}^{t_f} [x(t)-r(t)]^T Q[x(t)-r(t)]\,dt=\int_{t_0}^{t_f} \|x(t)-r(t)\|_Q^2 \,dt$$

Q ماتریس وزنی

Q: ماتریس حقیقی متقارن مثبت نیمه معین

لازم نیست ماتریس وزنی دائما ثابت باشد می‌تواند متغیر هم باشد ($Q(t)$ باشد)

حال اگر بهینه‌سازی انرژی را نیز وارد کنیم:

$$J=\int_{t_0}^{t_f} \left[(x(t)-r(t))^T Q\,(x-r)+\underbrace{u^T R u}_{\text{بهینه‌سازی انرژی}}\right] dt \qquad R>0$$

اصل حرف رگولاتوری اینه که می‌خواهیم متغیر حالت سیستم به صفر برسد

همچنین با وارد کردن کنترل پایانی داریم:

$$J=\|x(t_f)-r(t_f)\|_H^2+\int_{t_0}^{t_f}\left\{\|x(t)-r(t)\|_Q^2+\|u(t)\|_R^2\right\} dt$$

6. رگولاسیون:

$$J=\int_{t_0}^{t_f} x^T(t)\, Q\, x(t)\, dt$$

تلاش کنترل باعث می‌شود که x به صفر برسد و J کمینه شود.

در اصل همان ردیابی است که $r(t)=0$ است.

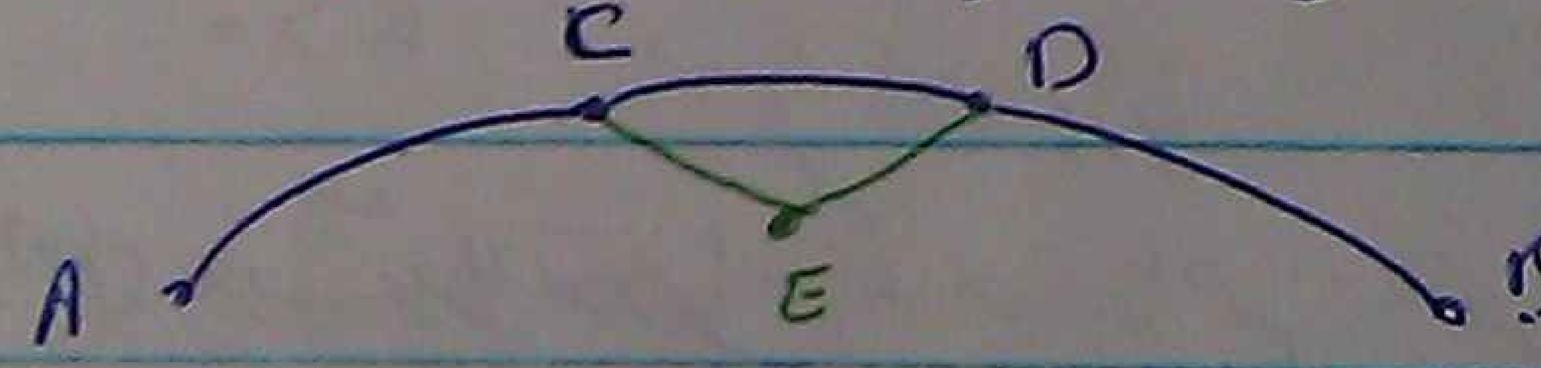
برنامه ریزی پویا

Dynamic programing

روش backward در اصل مسئله ای است که باید سیستم discreet باشد نمی توان به صورت پیوسته حل کرد. از t_f شروع می کنیم به ابتدا می رویم یعنی اول باید ببینیم چه u ای می توان تعریف کرد که به t_f برسیم از t_{f-1} یک مقدار ورودی را برای t_{f-1} پیدا می کنیم و ...

اصل بهینگی: هر قسمتی از یک سیاست بهینه ، بهینه است (بلمن)

Example: می خواهیم از A به B برویم و بهترین مسیر آن است که از C و D بگذریم:



از فرض ما $\Longrightarrow$ $J^*_{AB} = J^*_{AC} + J^*_{CD} + J^*_{DB}$

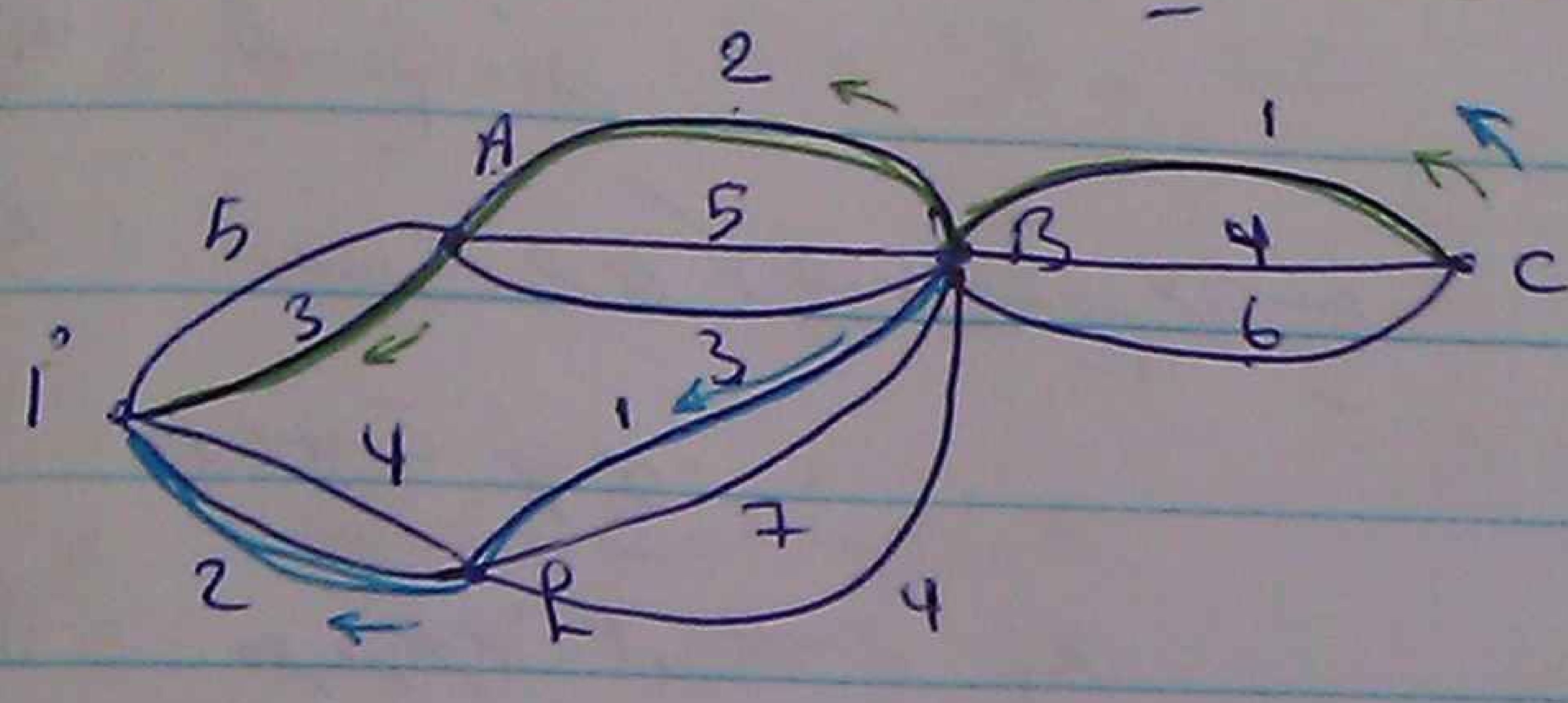
یعنی مسیر ACDB مسیر بهینه شناسایی شده است اگر مسیر بهینه مسیر ACEDB فرض شود خواهیم داشت

$$J^*_{AB} = J^*_{AC} + J^*_{CE} + J^*_{ED} + J^*_{DB} < J^*_{AC} + J^*_{CD} + J^*_{DB}$$

یعنی به تناقض و حالت خلف رسیدیم پس از زیر مسیرها نیز باید همه بهینه باشند تا کل سیستم بهینه شود.

یعنی: در هر گام باید سیاست بهینه را انتخاب کرد تا هزینه کل کمترین مقدار شود.

Example :



در مسیر سبز $J = 6$ و مسیر آبی $J = 4$ پس کمترین مسیر از i تا C مسیر پایینی است.

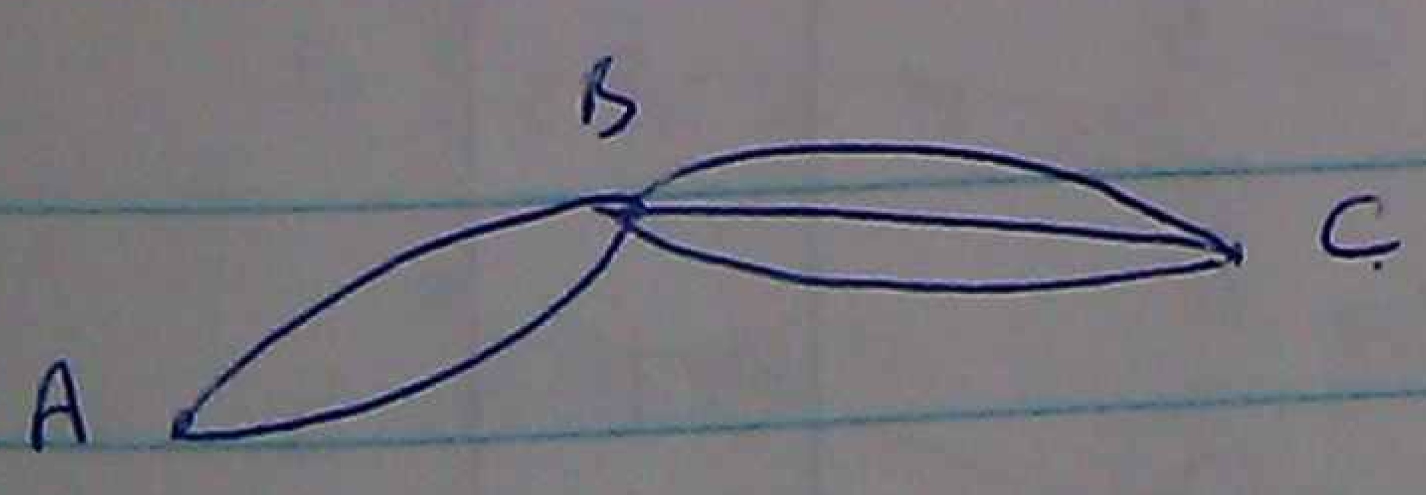
یعنی $J_{ABC} = J_{AB} + J^{*}_{BC}$

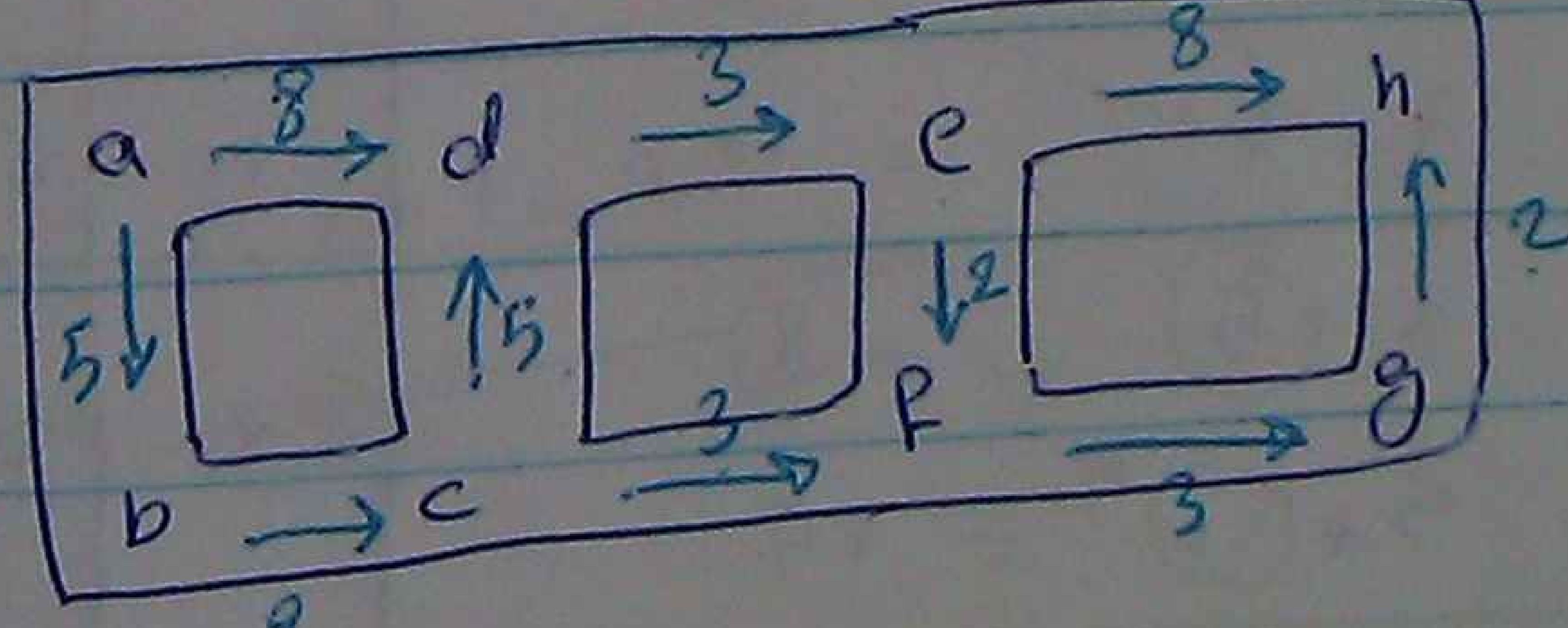
بهینه نیست   بهینه است.

قدم آخر

جلسه سوم 91,7,9

اصل بهینگی: هر قسمتی از یک مسیر بهینه، بهینه است.





فرض کنید:

α : وضعیت فعلی

u_i : تصمیم فعلی

x_i : وضعیت بعدی که پس از تصمیم می‌رسیم

h : وضعیت نهایی

$J_{\alpha x_i}$: هزینه حرکت از α به x_i

$J^*_{x_i h}$: کمترین هزینه رسیدن از x_i به h

$C^*_{\alpha x_i h}$: حداقل هزینه‌ای که می‌توان از α از طریق x_i به h رسید.

$J^*_{\alpha h}$: حداقل هزینه از α به h

u^*_{α} : تصمیم بهینه در وضعیت α

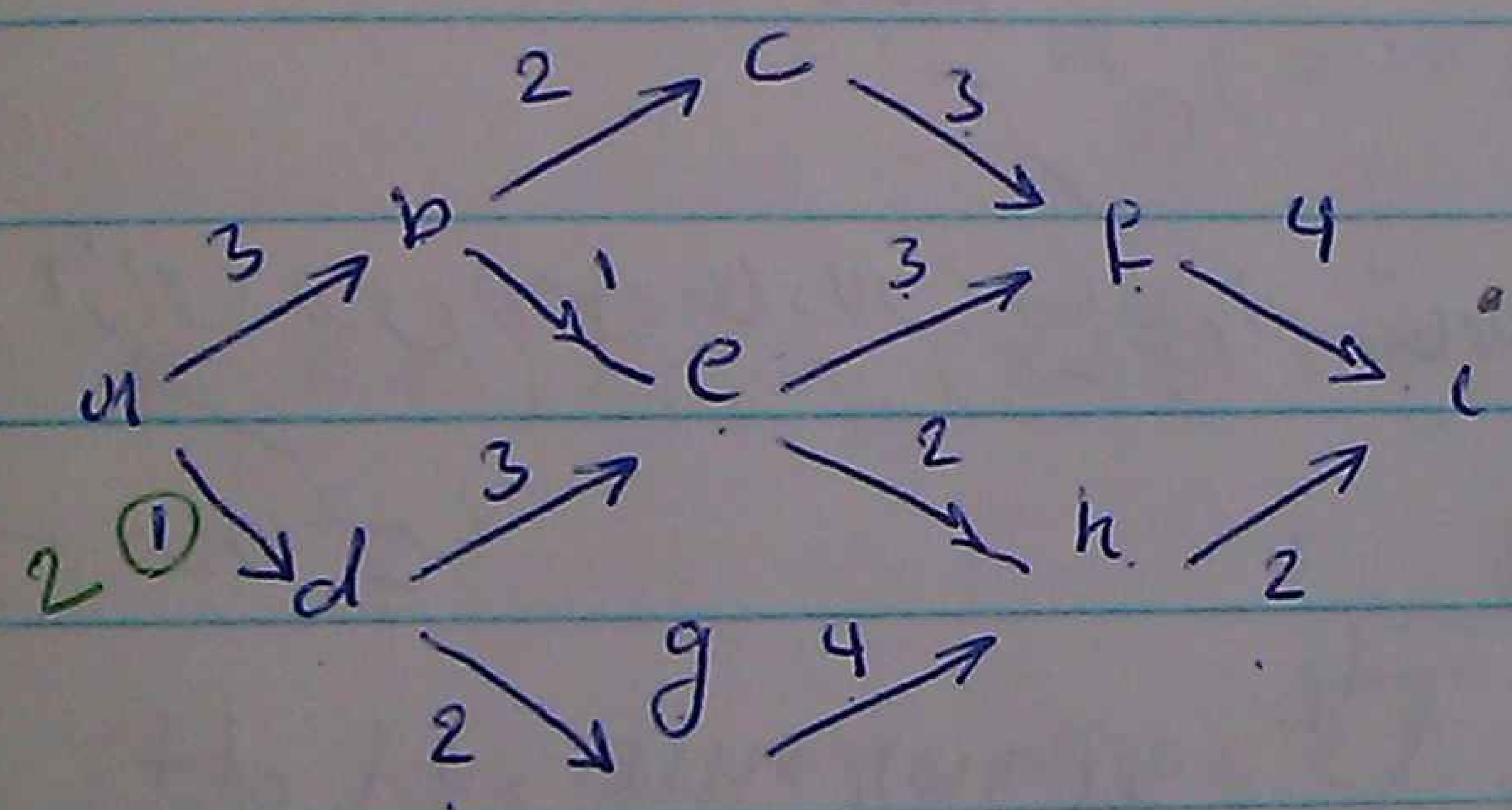
α	u_i	x_i	$J_{\alpha x_i} + J^*_{x_i h} = C^*_{\alpha x_i h}$	$J^*_{\alpha h}$	u^*
g	N شمال	h	$2 + 0 = 2$	2	N
f	E	g	$3 + 2 = 5$	5	E
e	E	h	$8 + 0 = 8$	7	S
	S	f	$2 + 5 = 7$		
d	E	e	$3 + 7 = 10$	10	E
c	E	f	$3 + 5 = 8$	8	E
	N	d	$5 + 10 = 15$		

α	u_i	x_i	$c \to f \to h$	$\sigma^*_{x_i}$	u^*
b	E	c	$9 + 8 = 17$	17	E
a	E	d	$8 + 10 = 18$	18	E
	S	b	$5 + 17 = 22$		

✓ $a \xrightarrow{E} d \xrightarrow{E} e \xrightarrow{S} f \xrightarrow{E} g \xrightarrow{N} H$

EESEN

مسیر بهینه



$$f_i = 4 \quad \left|\; {}^*cf_i = 7 \Rightarrow c_i = 7\right.$$

$$h_i = 2 \quad \left|\; \begin{cases} {}^*ef_i = 7 \\ eh_i = 4 \end{cases} \Rightarrow e_i = 4\right.$$

$${}^*gh_i = 6 \qquad g_i = 6$$

$$\begin{cases} bc_i = 2 + c_i = 2 + 7 = 9 \\ be_i = 1 + 4 = 5^* \end{cases} \Longrightarrow b_i = 5.$$

$$\begin{cases} dei = 3+4 = 7^* \\ dgi = 2+6 = 8 \end{cases} \Longrightarrow di = 7$$

$$\begin{cases} abi = 3+5 = 8^* \\ adi = 2+7 = 9 \end{cases}$$

8 راه بهینه است. $ai = 8$

$$\Longrightarrow abehi = x^*$$

مسیر بهینه

$$J^* = 8$$

↑ از این روش در حل معادلات دینامیکی استفاده می‌شود.

فرض کنید:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(\underbrace{x(t)}_{\text{متغیر وضعیت}}, \underbrace{u(t)}_{\text{متغیر کنترل}}, t) \\ J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t)\, dt \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x(t) \in R^n \\ u(t) \in R^m \end{array}\right\}$$

فرض: بدون محدودیت باشند

$$t \in [t_0, t_f]$$

هدف ما این است که مسیر را بهینه کنیم با u بهینه

در گام اول باید سیستم را گسسته سازی شود.

$$\dot{x} \approx \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = a(x(t), u(t), t)$$

$$x(t+\Delta t) = \Delta t \cdot a(x, u, t) + x(t)$$

✓ $t = k\Delta t$

$$x(k+1) = \underbrace{\Delta t\, a(x(k), u(k), k) + x(k)}_{a_D(x(k), u(k), k)}$$

$$\Rightarrow \quad x(k+1) = a_D(x(k), u(k), k)$$

$$\begin{cases} J = h(x(N), N) + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_0 + k\Delta t}^{t_0 + (k+1)\Delta t} g(x(t), u(t), t)\, dt \\ t_f = N\Delta t \end{cases}$$

با فرض ثابت بودن g در بازه انتگرال گیری

$$J \simeq h(x(N), N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_D(x(k), u(k), k)$$

$g_D \to g\, \Delta t$

$$\begin{cases} x(k+1) = a_D(x(k), u(k), k) \\ J_{0-N} = h(x(N), N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_D(x(k), u(k), k) \end{cases}$$

$$J_{N,N} = h(x(N), N)$$

$$J_{N-1,N} = \underbrace{h(x(N), N)}_{J_{N,N}} + g_D(x(N-1), u(N-1), N-1)$$

$$J_{N-1,N} = g_D(x(N-1), u(N-1), N-1) + J_{N,N}(x(N))$$

$$= g_D(x(N-1), u(N-1), N-1) + J_{N,N}\big(a_D(x(N-1), u(N-1), N-1)\big)$$

J را مینیمایز کند

$$J^*_{N-1,N}(x(N-1)) = \min_{u(N-1)} \left(g_D(N-1) + J_{N,N}(N-1) \right\}$$

$\Longrightarrow$ هدف بدست آوردن $u^*(N-1)$ است.

$$J_{N-2,N} = g_D(x(N-2), u(N-2), N-2) + J_{N-1,N}(x(N-1), u(N-1))$$

$$= g_D + J_{N-1,N}\big(a_D(x(N-2), u(N-2), N-2), u(N-2)\big)$$

$$J^*_{N-2,N} = \min_{\substack{u(N-1) \\ u(N-2)}} \{ g_D + J_{N-1,N} \}$$

$\vdots$

$$J^*_{0,N} = \text{---}$$

$$u^*(0),\ u^*(1),\ ----,\ u^*(N-2),\ u^*(N-1)$$

$$J^*_{N-K,N}(x(N-K)) = \min_{u(N-K)} \Big\{ g_D(x(N-K), u(N-K), N-K) + J^*_{N-K+1,N}\big(a_D(x(N-K), u(N-K))\big) \Big\}$$

85

$$1 \le K \le N$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$u^*(N-1) \qquad u^*(0)$$

91,7,16

جلسه چهارم

فرض کنید

سیستم خطی است اما می تواند متغیر با زمان باشد

رگولاسیون

حالت گسسته $x(k+1) = A(k)\,x(k) + B(k)\,u(k)$

$\dot{x} = Ax + Bu$

شاخص عملکرد

$$J = \underbrace{\frac{1}{2} x^T(N)\, H\, x(N)}_{\text{پایانه ای}} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2} \left\{ x^T(k)\, Q(k)\, x(k) + \underbrace{u^T(k)\, R(k)\, u(k)}_{\text{هزینه انرژی}} \right\}$$

هدف اینکه $u(k)$ را از صفر تا $N-1$ را طوری پیدا کنیم که J مینیمم شود.

$H \geq 0$ p.s.d

$$\begin{cases} Q(k) \geq 0 & \text{p.s.d} \\ R(k) > 0 & \text{p.d} \end{cases}$$

$\longrightarrow$ چون R^{-1} را لازم خواهیم داشت

linear quadratic regulator : LQR

روش

سیستم خطی

تابع هزینه درجه دو در نظر گرفته می شود

تنظیم کننده

$Q^T = Q \qquad R^T = R \qquad H^T = H$ $\longrightarrow$ کلیه ماتریس های متقارن Q, H, R هستند.

$H \geq 0$

$J_{N,N}(x(N)) = \frac{1}{2} x^T(N)\, H\, x(N)$ $\longrightarrow$ در اصل همان $J_{N,N}$ هم هست.

آخرین هزینه ها در نقطه پایانی

$P(0) \triangleq H$ تعریف می کنیم.

یک ماتریس مثبت نیمه معین است.

$$\boxed{J_{N,N} = \frac{1}{2} x^T(N)\, P(N)\, x(N)}$$

$$J_{N-1,N}\big(x(N-1),\, u(N-1)\big) = \frac{1}{2} x^T(N)\, H\, x(N) + \frac{1}{2}\Big\{ x^T(N-1) Q(N-1)\, x(N-1) + u^T(N-1) R(N-1)\, u(N-1) \Big\}$$

[منیمم $J_{N-1,N}$ را برحسب $u(N-1)$ باید بدست آوریم.
(نکته: فقط نقطه گفته شده مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم)]

$$= \frac{1}{2}\Big\{ A(N-1)\, x(N-1) + B(N-1)\, u(N-1) \Big\}^T \underset{P(N)}{H} \Big\{ A(N-1)\, x(N-1) + B(N-1)\, u(N-1) \Big\} + \frac{1}{2}\Big\{ x^T(N-1)\, Q\, x(N-1) + u^T(N-1)\, R\, u(N-1) \Big\}$$

حال باید $J_{N-1,N}$ را روی $u(N-1)$ مینیمم کنیم پس باید مشتق آن را نسبت به $u(N-1)$ صفر قرار دهیم.

$$\frac{\partial J_{N-1,N}}{\partial u(N-1)} = 0$$

داریم: $\frac{d}{dy}\left(c^T y \right) = c \qquad \frac{d}{dy}\left(y^T c \right) = c$

$$\frac{d}{dy}\left(y^T P y \right) = P y + P^T y$$

$$\frac{\partial J_{N-1,N}}{\partial u(N-1)} = \left(R + B^T P(0) B\right) u(N-1) + B^T P(0) A X(N-1) = 0$$

$$u^*(N-1) = \underbrace{-\left[R + B^T P(0) B\right]^{-1} B^T P(0) A}_{F(N-1)} x(N-1)$$

$$= F(N-1) X(N-1)$$

$$\frac{\partial^2 J_{N-1,N}}{\partial u^T \partial u} = R + B^T P(0) B > 0$$

پس $u^*(N-1)$ ، $J_{N-1,N}$ را کمینه می‌کند.

$$J^*_{N-1,N} = \tfrac{1}{2}\{A X(N-1) - B \underbrace{\{[R + B^T P(0) B]^{-1} B^T P(0) A}_{F(N-1)} X(N-1)\}^T$$

$$P(0)\{\underbrace{[R + B^T P(0) B]^{-1} B^T P(0) A}\, x(N-1)\} + \tfrac{1}{2}\{[R$$

$$+ B^T P(0) B]^{-1} B^T P(0) \underset{X(N-1)}{A}\}^T R\{[\quad]^{-1} B P(0) A X(N-1)$$

$$\boxed{J^*_{N-1,N} = \tfrac{1}{2} X^T(N-1)\; P(1)\; X(N-1)}$$

$\vdots$

$$\boxed{u^*(N-K) = F(N-K)\, X(N-K)}$$

$1 \le K < N$

در اصل مسیر را هم داریم:

مسیری را از $u(0)$ لازم داریم که $u(N-1)$ برسیم به N

$$F(N-K) = -\left[R + B^T P(K-1) B\right]^{-1} B^T P(K-1) A$$

$$P(K) = \left[A + B F(N-K)\right]^T P(K-1) \left[A + B F(N-K)\right] + F^T(N-K) R F(N-K)$$

$$P(0) = H \longrightarrow F(N-1) \longrightarrow P(1) \longrightarrow F(N-2) \rightarrow \cdots \longrightarrow F(0) \longrightarrow P(N)$$

$$J^*_{0,N} = \tfrac{1}{2} x^T(0) P(N) x(0)$$ کل هزینه حالا از ابتدا تا انتها

هزینه

در آن: $J = \tfrac{1}{2} x^T(N) H x(N) + \tfrac{1}{2} \sum (x^T Q x + u^T R u)$

K، V، Q، H را طراحی می‌کنیم تا با سرعت زیاد هزینه حاکم شود.

$$u^*(N-K) = -\left[R(N-K) + B^T(N-K) P(K-1) B(N-K)\right]^{-1} \times B^T(N-K) P(K-1) A(N-K) x(N-K) \triangleq -\left[R + B^T P(K-1) B\right]^{-1} B^T P(K-1) A x(N-K) \triangleq F(N-K) x(N-K)$$

$$J^*_{N-K,N}(x(N-K)) = \tfrac{1}{2} x^T(N-K) \left\{ \left[A + B F(N-K)\right]^T P(K-1) \left[A + B F(N-K)\right] + F^T(N-K) R F(N-K) + Q \right\} x(N-K)$$

تابع $(N-K)$ است.

$$\triangleq \tfrac{1}{2} x^T(N-K) P(K) x(N-K)$$

شبیه‌سازی
توضیح؟

مثال: (شبیه‌سازی کنید.)

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.9974 & 0.0519 \\ -0.1078 & 1.1591 \end{bmatrix} x(k)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0.0013 \\ 0.0539 \end{bmatrix} u(k).$$

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} 0.25\, x_1^2(k) + 0.05\, x_2^2(k) + u^2(k)$$

$N = 200$

$R = 1$, $Q = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix}$, $H = 0$

$$u^*(k) = F(k)\, X(k)$$

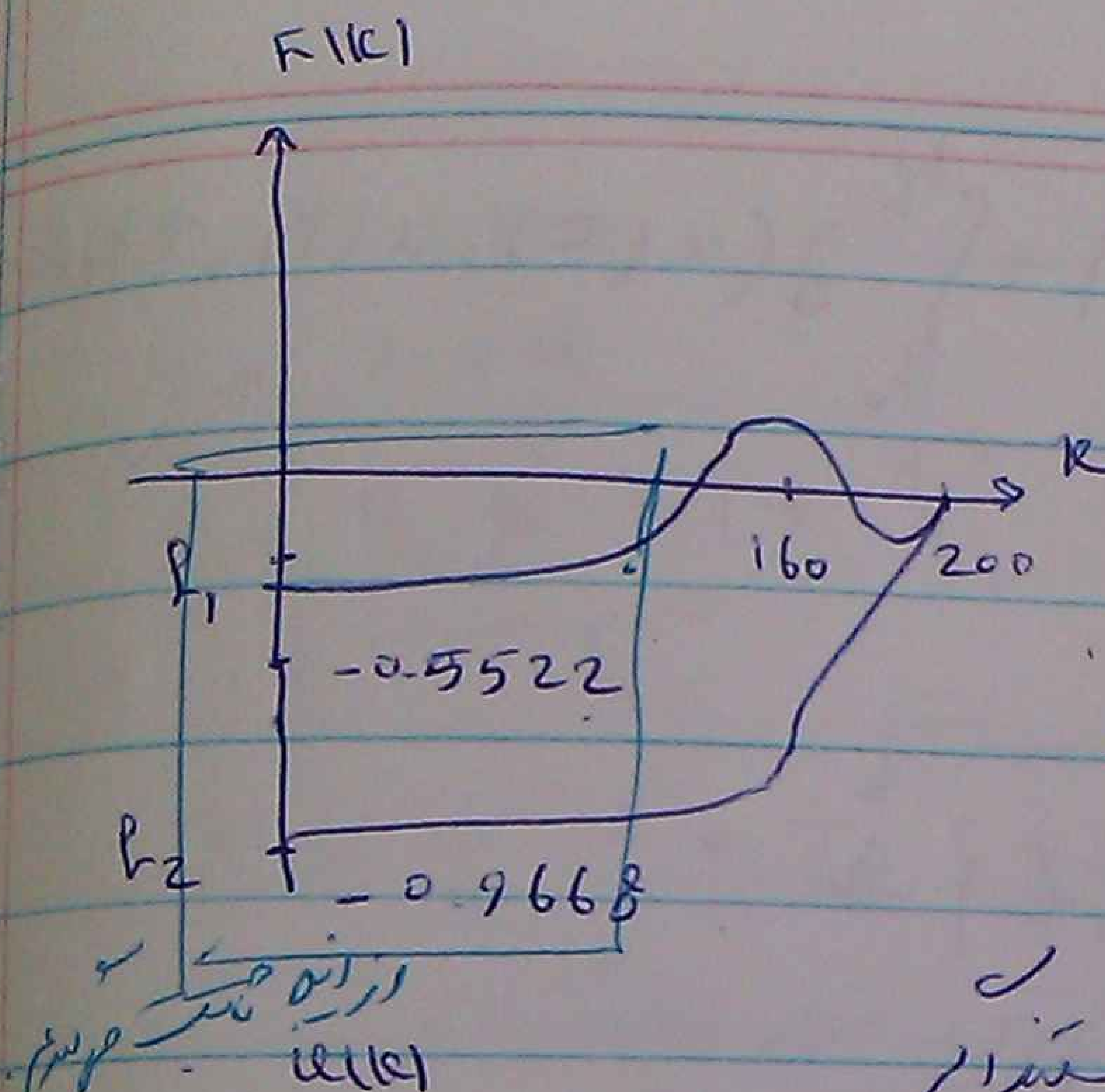
$0 \leq k < N-1$

(این $F(k)x(k)$ فیدبک حالت است)

$F(k)$ درواقع ضریب فیدبک است.

$F(k) = [f_1(k) \quad f_2(k)]$ ، $F(k)$ بردار است.

$$X(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$



درست است P_1 و P_2 وابسته به زمان هستند

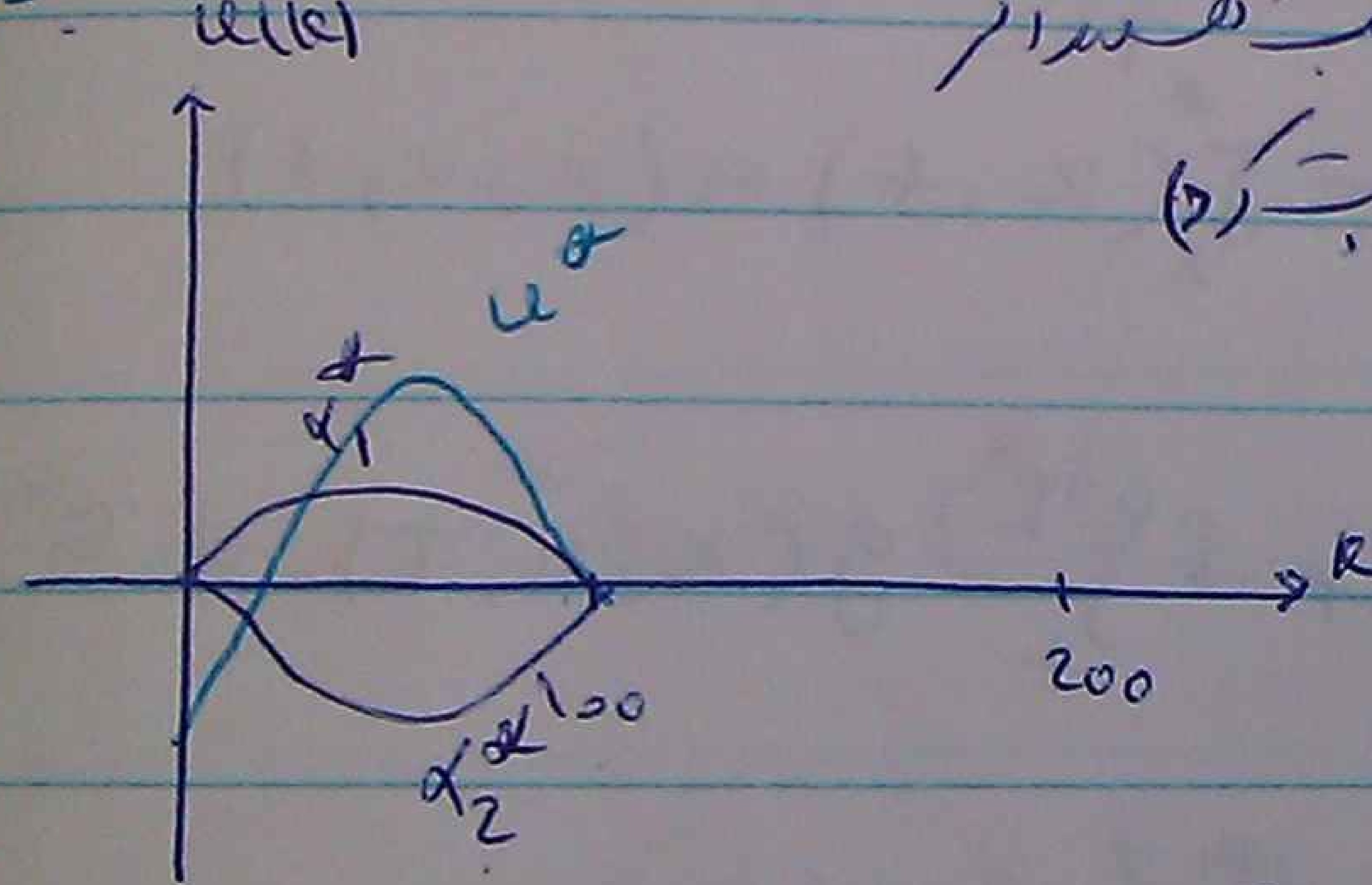
(در طول زمان تغییر می‌کنند) لذا در ابتدا آنها

یک زمانی ثابت است یعنی می‌توانیم با تقریب

خوبی SP_1 را ثابت در نظر بگیریم.

(A و B و R و Q و H در اینجا که ثابت هستند اگر

نبودند SP_1 را با تقریب هم نمی‌توان ثابت کرد)



شکل اینکه از ازای ؟ ابتدایی روش

و در ازای ؟ ثابت نیست.

این یک الگوریتم تکراری است که قدم به قدم جلو می‌رود.

همیلتون - ژاکوبی - بلمن (HJB)

$$\dot{x} = a(x, u, t)$$

t_0, t_f معلوم

$$J(x(t_f), t_f) = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(\tau), u(\tau), \tau)\, d\tau$$

$x \in R^n$, $u \in R^m$

✓ $$\mathcal{H}(x(t), u(t), J_x^*(x(t), t), t) \triangleq$$

$$g(x(t), u(t), t) + J_x^{*T}(x, t)\, a(x, u, t)$$

$$J^*(x, t) = h(x(t_f), t_f) + \int_t^{t_f} g(x, u^*, \tau)\, d\tau$$

✓ $$\frac{dJ^*}{dt} = \frac{\partial J^{*T}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial J^*}{\partial t}$$

$$= J_x^{*T} a(x, u, t) + J_t^*$$

$$= -g(x(t), u^*(t), t) \longrightarrow ?$$

$$\rightarrow J_t^* + \underbrace{J_x^{*T} a(x, u, t) + g(x, u^*, t)}_{H} = 0$$

✓

$$\rightarrow \boxed{J_t^* + \mathcal{H} = 0}$$

$\leftarrow$ H-J-B

EX.

$$\dot{x} = x + u$$

$$J = \underbrace{\tfrac{1}{2} x^2(T)}_{h} + \int_0^T \underbrace{\tfrac{1}{4} u^2(t)}_{g}\, dt$$

$T \to$ ؟

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4} u^2 + J_x^* [x + u]$$

برای اینکه u بهینه را بدست بیاوریم باید $\mathcal{H}$ هم کمترین مقدار را داشته باشد. تا در نهایت J کمترین مقدار را باشد.

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \rightarrow \tfrac{1}{2} u + J_x^* = 0 \rightarrow u^* = -2 J_x^*$$

هدف اینه که حالت فیدبک بدیم

حدس می‌زنیم

$$J^*(x) = \tfrac{1}{2} K(t)\, x^2(t)$$

$$J_x^* = K(t) \cdot x(t)$$

$$u = F x$$

در رابطه

$$H + J_t^* = 0$$

قرار می‌دهیم

K(t) را بدست می‌آوریم.

چطوری؟

91/7/17 جلسه پنجم

حساب تغییرات:

چیزی که در بهینه سازی داریم اینه که نقطه بهینه یک تابع را می خواهیم پیدا کنیم که مینیمم شود.

در کنترل بهینه ما مسیر بهینه را داریم نه نقطه بهینه

فعلا بهینه سازی تابع را مطرح می کنیم

مسائل بهینه سازی بدون محدودیت

$$\min_{x_i \in R} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max_{x_i} -f(\quad)$$

بعضی وقتها بهینه سازی با محدودیت را داریم مثلاً محدودیت تساوی

$$\min_{x_i} f(x_1, x_2, \dots x_n) \quad \text{subject to:}$$

s.t. $g_h(x_1, \dots, x_n) = 0 \qquad h = 1, 2, \dots m$

constraint قید

اگر $m < n$ ← $n-m$ تا متغیر آزاد داریم که می توانیم بهینه سازی را انجام بدیم

اگر $m = n$ ← بهینه سازی نداریم (حداکثر یک نقطه داریم).

اگر $m > n$ ← جواب ندارد (دستگاه سازگار نیست).

بهینه سازی با محدودیت های مساوی و نامساوی

$$\min_{x_i} f(x_1, x_2, \dots x_n)$$

$$\text{s.t} \begin{cases} g_l(x_1, \dots, x_n) = 0 & l: 1, \dots, m \\ h_k(x_1, \dots, x_n) \leq 0 & k: 1, \dots, P \end{cases}$$

تعریف: x را نقطه بهینه جامع تابع $f(x_1, \dots, x_n)$ می‌نامیم اگر به ازای هر $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \in R^n$ داشته باشیم:

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) \geq f(x_1, \dots, x_n)$$

(نقطه بهینه جامع یا گلوبال)

اما اگر روابط فوق در همسایگی نقطه x برقرار باشد یعنی:

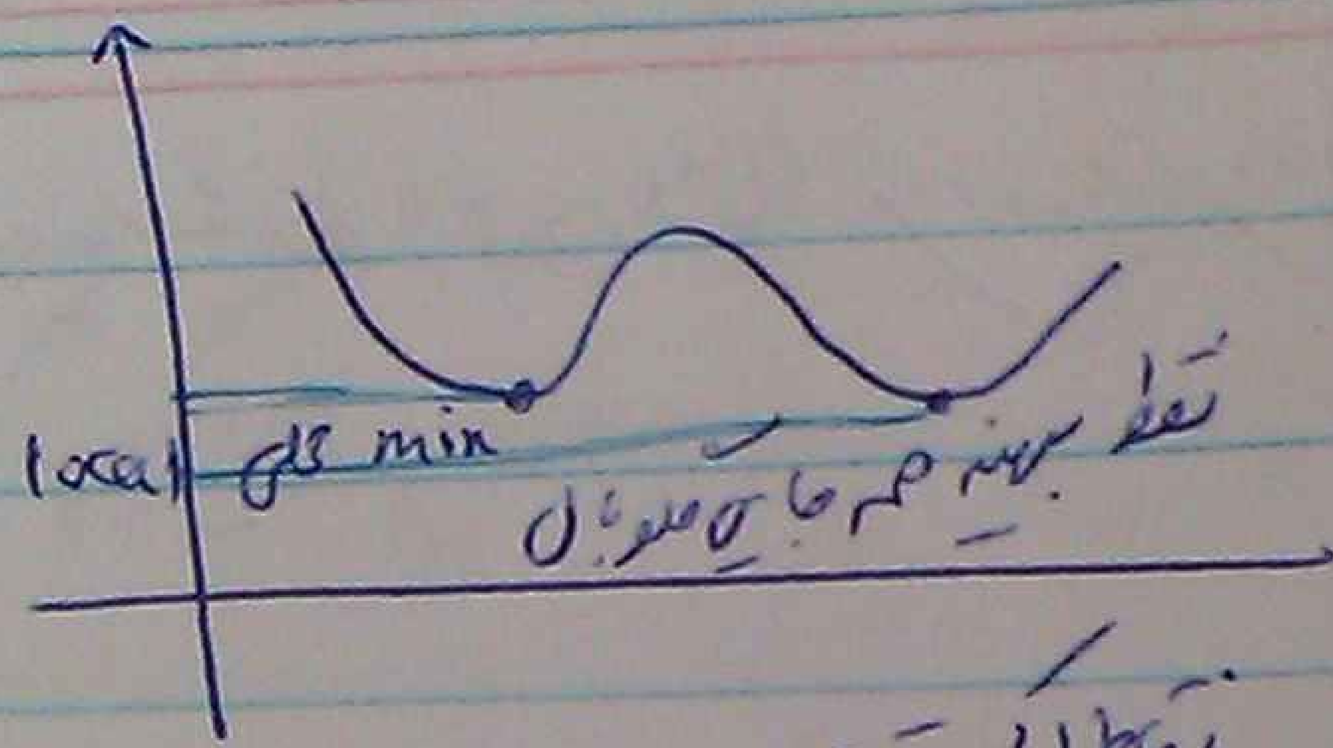
$$0 < \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2} < \delta \qquad \|h\|_2 < \delta$$

آنگاه x را نقطه بهینه محلی گویند.

$$\|h\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |h_i| \quad \text{نرم } 1 \qquad \|h\|_\infty = \max_i |h_i| \quad \text{نرم بی‌نهایت}$$

$$\|h\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} h_i^2} \quad \text{نرم } 2$$

(الگوریتم ژنتیک؟)



بهینه سازی بدون محدودیت:

فرض کنید x نقطه بهینه تابع f باشد

$f(x_1+h_1, x_2+h_2, \dots, x_n+h_n) =$ بسط تیلور بنویسیم

$\Delta f = \delta f + \delta^2 f + \dots \to O(3)$

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \overbrace{\delta f + \delta^2 f} + \dots$ مرتبه 3 و بالاتر

order 3

$\frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \cdots$

Δf : تغییرات f

فرض کنید h_i کوچک باشد

تغییرات

$\Delta f \simeq \delta f$

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x}^T h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i$$

$$\delta^2 f = \frac{1}{2} h^T H h$$

$$= \frac{1}{2} [h_1, \dots, h_n] \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}}_{\text{Hessian}} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

چون x نقطه بهینه است پس

$$\Delta f \geq 0 \Longrightarrow \delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i \geq 0$$

به ازای هر h های حول x

وقتی روی نقطه مینیمم هستیم تغییرات f باید مثبت باشد

فرض کنید
$$h = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ h_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

یعنی $\delta f \geq 0$ باشد به ازای هر h_i ها این چه

h_i ها مثبت چه منفی باشند

$$\Longrightarrow \delta f = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot h_i \geq 0$$

فرض کنید $h_i > 0 \Leftarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} > 0$

فرض کنید $h_i < 0 \Leftarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} < 0$

$$\Leftarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

(چون که شرط لازم نقطه مینیمم مشتق باید صفر شود)

در نقطه بهینه
$$\Longrightarrow \delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i = 0$$

مشتق اول که δf وقتی صفر شد برای اینکه Δf مثبت باشد باید مشتق دوم $\delta^2 f$ مثبت باشد از مشتق های بالاتر صرف نظر می شود چون خیلی کوچک می شوند

$$\Longrightarrow \Delta f \simeq \delta^2 f \geq 0$$

H باید مثبت نیمه معین باشد (P.S.d)

$$\delta^2 f = \frac{1}{2} h^T H h \geq 0$$

شرط لازم مشتق اول صفر شود و H را باید چک کنیم که P.S.d باشد.

سوال اگر $\delta^2 L$ برابر صفر شد باید چیکار کنیم (اگر ماتریس Hessian نداریم.) در اولی گفتیم که دو جمله خارج می‌شویم و اندیس از ks استفاده می‌کنیم.

تابعی (Functional) در اصل تابعِ تابع را می‌گویند

تابعی J قانونی است که به هر تابع از مجموعه Ω یک عدد حقیقی نسبت می‌دهد

$$\checkmark \quad J(x) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t)\, dt$$

تابعی J را خطی گویند اگر به ازای هر $\alpha, \beta \in R$ و $x_1, x_2 \in \Omega$ داشته باشیم:

$$J(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha J(x_1) + \beta J(x_2)$$

نمو تابعی: اگر x و $x + \delta x$ توابعی باشند که تابعی J روی آنها تعریف شده باشد آنگاه نمو تابعی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\checkmark \quad \Delta J(x, \delta x) = J(x + \delta x) - J(x)$$

Δ نمو یا رشد

δ تغییرات

Ex. نمو تابعی زیر را حساب کنید:

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} x^2(t)\, dt$$

$$J(x+\delta x)=\int_{t_0}^{t_f}(x+\delta x)^2\,dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_f}(x^2+2x\delta x+\delta x^2)\,dt$$

$$\underbrace{g(x,\delta x)\|\delta x\|}\Longrightarrow g(x,\delta x)=\int_{t_0}^{t_f}\frac{[\delta x]^2}{\|\delta x\|}\,dt$$

$$\Delta J(x,\delta x)=\underbrace{\int_{t_0}^{t_f}2x\,\delta x\,dt}_{\delta J(x,\delta x)}+\int_{t_0}^{t_f}\delta x^2\,dt$$

تغییرات تابعی : اگر نمو تابعی را به صورت زیر بنویسیم

✓ $$\Delta J(x,\delta x)=\delta J+h(x,\delta x)\|\delta x\|$$

δJ را تغییرات تابعی گویند اگر

$$\lim_{\|x\|\to 0}h(x,\delta x)=0$$

δJ را تغییرات مرتبه اول تابعی گویند.

$$\Delta J=\delta J+\delta^2 J+Q(x,\delta x)\|\delta x\|^2$$

$\delta^2 J$ را تغییرات مرتبه دو گویند اگر

$$\lim_{\|x\|\to 0}Q(x,\delta(x))=0$$

Ex.

$$\Delta J(x,\delta x) = \underbrace{\int_{t_0}^{t_f} 2x\,\delta x\,dt}_{\delta J} + \underbrace{\int_{t_0}^{t_f} \delta^2 x\,dt}_{h(x,\delta x)\,\|\delta x\|}$$

$$0 \leq h(x,\delta x) = \frac{1}{\|\delta x\|}\int_{t_0}^{t_f} \delta^2 x\,dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \frac{\delta^2 x}{\|\delta x\|}\,dt \leq \int_{t_0}^{t_f} \frac{\|\delta x\|^2}{\|\delta x\|}\,dt$$

$$\|\delta x\|_\infty = \max_i |\delta x| \qquad = \int_{t_0}^{t_f} \|\delta x\|\,dt \rightarrow 0$$

$$\|\delta x\|_2 = \sqrt{|\delta x_1|^2 |\delta x_2|^2 \cdots} \qquad \|\delta x\| \rightarrow 0$$

از طرفی ما مطمئنیم که $h(x,\delta x) \geq 0$ است.

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{\|x\|\to 0} h(x,\delta x) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\|x\|\to 0} h(x,\delta x) = 0$$

extermal

منحنی اکستارال تابعی : (منحنی حدی تابعی)

منحنی که تابعی ما نسبت به آن Min می‌شود.

اگر x^* یک منحنی اکستارال محلی تابعی J باشد آنگاه وجود دارد $\varepsilon > 0$

به طوری که برای تمام توابع موجود در Ω و $\|x - x^*\| < \varepsilon$

نمو تابعی J علامت یکسان دارد.

$\Delta J \geq 0$ $\qquad$ x^* تابع را مینیمم می‌کند

$\Delta J \leq 0$ $\qquad$ x^* تابعی را ماکزیمم می‌کند

اگر $\varepsilon \in R^+$ نمو تابعی علامت یکسان داشته باشد آنگاه x^* منحنی اکستریمم همه‌جایی تابعی است.

✓ قضیه اساسی: اگر x^* یک منحنی اکستریمم محلی باشد آنگاه باید تغییرات J روی x^* برابر صفر شود. یعنی به ازای هر δx قابل قبول

$$\delta J(x^*, \delta x) = 0$$

$\cdot \in \alpha$

فرض کنید

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} g(x, \dot{x}, t)\, dt$$

هدف: می‌خواهیم تابع x^* را چنان بیابیم که J کمینه شود. (یعنی x^* منحنی اکستریمم تابعی را بدست آوریم)

$\Delta J(x, \delta x) = J(x + \delta x) - J(x)$ نمو تابعی

الف. فرض کنید t_0 و t_f و $x(t_0)$ و $x(t_f)$ معین باشند

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f} g(x^* + \delta x, \dot{x}^* + \delta \dot{x}, t)\, dt - \int_{t_0}^{t_f} g(x^*, \dot{x}^*, t)\, dt$$

$$= \underbrace{\int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial g^*}{\partial x} \delta x + \frac{\partial g^*}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right) dt}_{\delta J(x^*, \delta x)}$$ تغییرات

$$+ \int_{t_0}^{t_f} O(2)\, dt$$ مرتبه 2 و بالاتر

شرط لازم و نه کافی برای آنکه x^* منحنی اکسترمال J باشد آن است که

$$\delta J(x^*, \delta x) = 0$$ (به ازای هر δx قابل قبول)

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial g^*}{\partial x} \delta x\, dt + \int_{t_0}^{t_f} \underbrace{\frac{\partial g^*}{\partial \dot{x}}}_{u} \underbrace{\delta \dot{x}\, dt}_{dv} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial g^*}{\partial x} \delta x\, dt + \frac{\partial g^*}{\partial \dot{x}} \delta x \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \delta x \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g^*}{\partial \dot{x}}\right) dt = 0$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g^*}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g^*}{\partial \dot{x}}\right) \right\} \delta x \cdot dt$$

$$+ \frac{\partial g^*}{\partial \dot{x}} \delta x \Big|_{t_f} - \frac{\partial g^*}{\partial \dot{x}} \delta x \Big|_{t_0} = 0$$

چون $x(t_0)$ و $x(t_f)$ معلوم پس

$$\delta x(t_0) = \delta x(t_f) = 0$$

$$\Longrightarrow \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g^*}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g^*}{\partial \dot{x}}\right) \right\} \delta x \, dt = 0$$

$$\Longrightarrow$$

چون δx آزاد است.

$$\frac{\partial g^*}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g^*}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

معادله اویلر نوع اول

$x(t_0)$ ، t_f و t_0.

و $x(t_f)$ معلوم هستند.

جلسه ششم 91,7,23

حساب تغییرات

$$\int_{t_0}^{t_f}\left[\frac{\partial g^*}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial g^*}{\partial \dot{x}}\right]\delta x\,dt+\frac{\partial g^*}{\partial \dot{x}}\delta x\Big|_{t_f}-\frac{\partial g^*}{\partial \dot{x}}\delta x\Big|_{t_0}=0$$

$$\frac{\partial g^*}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial g^*}{\partial \dot{x}}=0$$ اویلر

مثال: $J(x)=\int_1^2\frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{t}\,dt$

الف. $x(t_0)$ معلوم $x(t_f)$ معلوم

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}=\frac{1}{t}\cdot\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}=0 \Longrightarrow \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}=c \Longrightarrow \frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}\cdot\frac{1}{t}=c$$

$$\dot{x}=\frac{ct}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} \Rightarrow x^*(t)=-\frac{\sqrt{1-c^2t^2}}{c}+c_1 \to ?$$

با استفاده از شرایط مرزی $\Longrightarrow c_1=2,\ c=\frac{1}{\sqrt{5}} \to ?$

$$(x^*-2)^2+t^2=5 \to ?$$

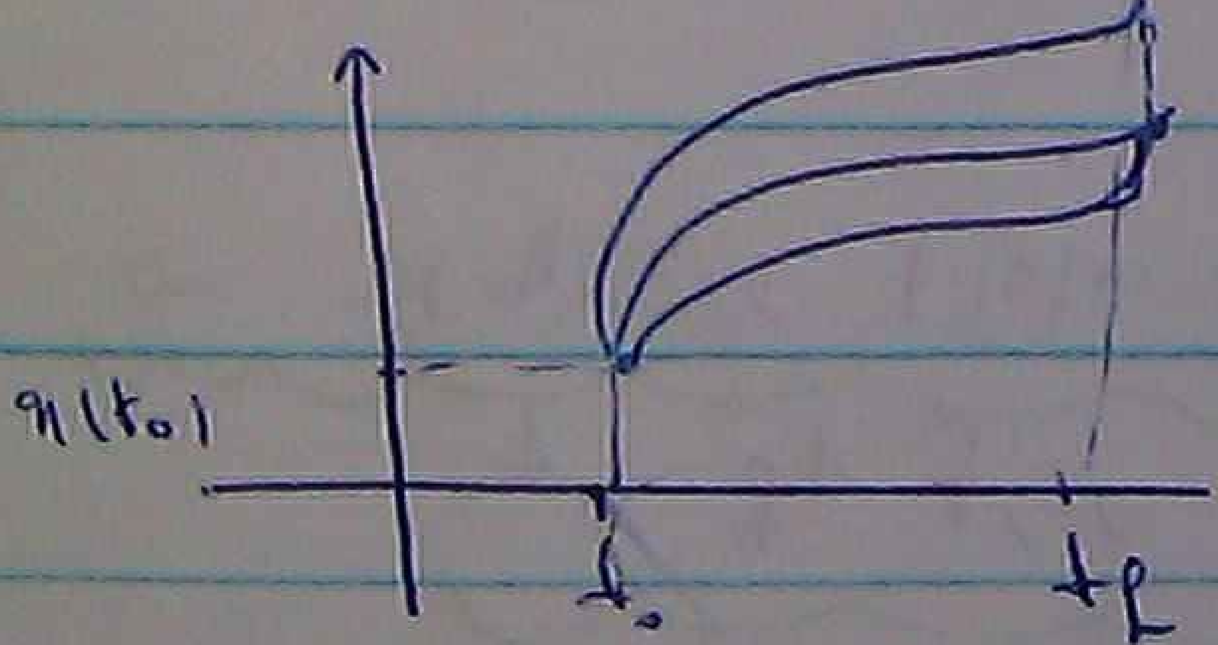
ب. t_0 و t_f معلوم $\Leftarrow$ $\delta_x(t_0)$ آزاد

$\delta_x(t_f)$ آزاد

بنابراین در رابطه * ضرایب آنها صفر هستند.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g^*}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial g^*}{\partial \dot{x}} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial g^*}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_f} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial g^*}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_0} = 0 \end{cases}$$

ج. t_f ثابت ها $x(t_f)$ آزاد



آزاد $\delta_x\big|_{t_f} \neq 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g^*}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial g^*}{\partial \dot{x}} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial g^*}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_f} = 0 \end{cases}$$

Example: $J = \int_0^2 \overbrace{[\dot{x}^2 + 2x\dot{x} + 4x^2]}^{g}\, dt$

$x(0) = 1$, $x(2)$ آزاد

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right)=0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}-\dfrac{d}{dt} \Rightarrow 2\dot{x}^2+8x-\dfrac{d}{dt}\left[2\dot{x}+2x\right]=0 \rightarrow -2\ddot{x}+8x=0 \\ \left.\dfrac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right|_{t_f}=0 \xRightarrow{\text{کافی}} 2\dot{x}(t_f)+2x(t_f)=0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$-2s^2+8=0 \rightarrow s=\pm 2$$

$$x(t)=Ae^{2t}+Be^{-2t}$$

شرایط مرزی

$$x(0)=1 \Rightarrow A+B=1 \rightarrow \overset{①}{A=1-B} \qquad \dot{x}=2Ae^{2t}-2Be^{-2t}$$

$$2Ae^{2t_f}-2Be^{-2t_f}+Ae^{2t_f}+Be^{-2t_f}=0$$

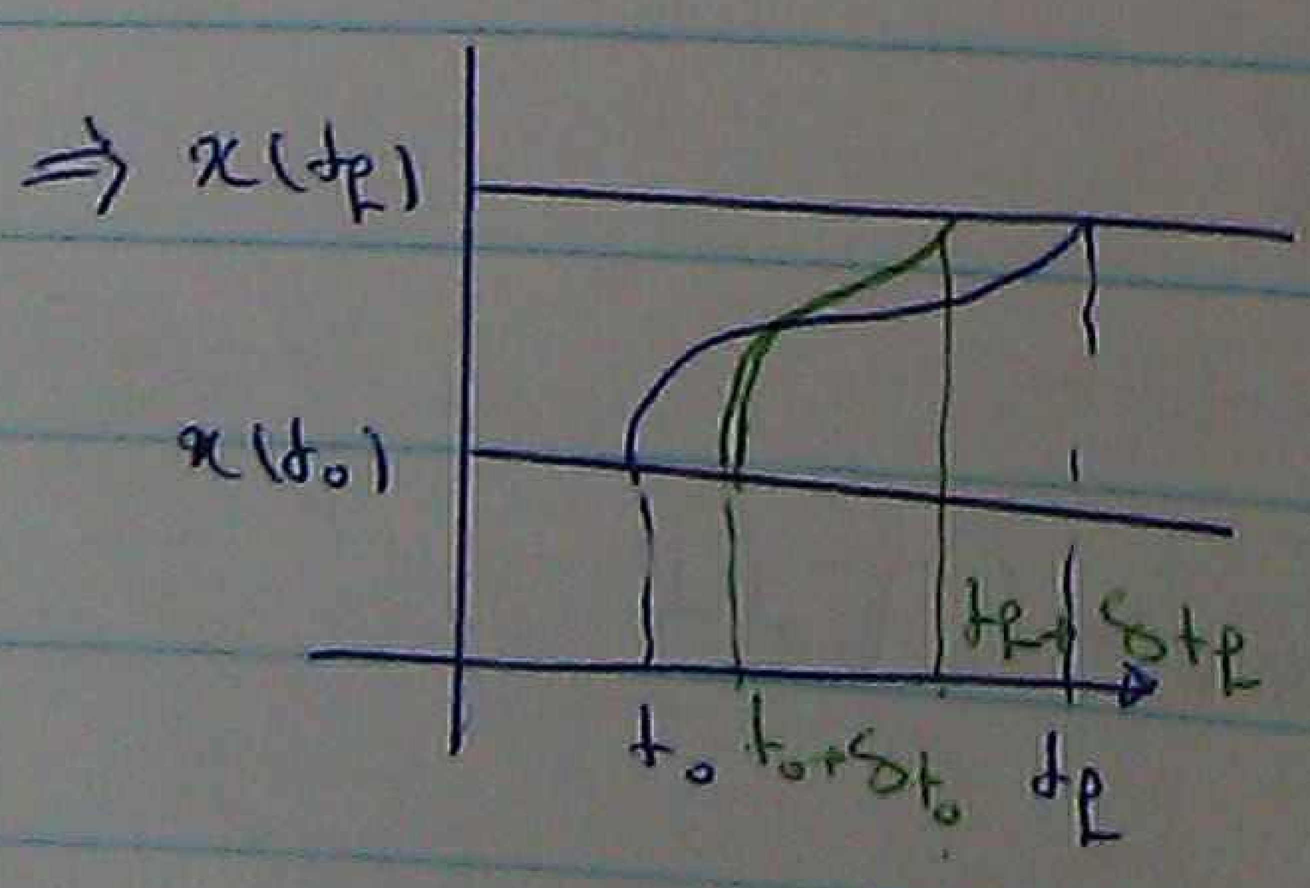
$$3Ae^{4}-Be^{-4}=0 \rightarrow 3Ae^{8}=B \quad ②$$

$$1,2 \Rightarrow A=\frac{1}{1+3e^{8}} \quad \& \quad B=\frac{3e^{8}}{1+3e^{8}}$$

$\rightarrow$ $x(t_0)$, $x(t_f)$ معلوم

t_0 , t_f آزاد

$$\Delta J=\int_{t_0+\delta t_0}^{t_f+\delta t_f} g(x+\delta x,\dot{x}+\delta\dot{x},t)\,dt-\int_{t_0}^{t_f} g(x,\dot{x},t)\,dt$$



δt می‌تواند مثبت یا منفی باشد

با فرض ثابت بودن

$$\Delta J = \int_{t_0+\delta t_0}^{t_f} g(x+\delta x, \dot{x}+\delta\dot{x}, t)\, dt$$

$$+ \int_{t_f}^{t_f} \left[g(x+\delta x, \dot{x}+\delta\dot{x}, t) - g(x, \dot{x}, t) \right] dt$$

$$+ \int_{t_f}^{t_f+\delta t_f} g(x+\delta x, \dot{x}+\delta\dot{x}, t)\, dt$$

$$\simeq - \underbrace{g(x(t_0), \dot{x}(t_0), t_0)}_{\text{تقریب}} \cdot \delta t_0 + \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \right) \delta x\, dt$$

$$+ \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \delta x \Big|_{t_f} - \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \delta x \Big|_{t_0} + \underbrace{g(x(t_f), \dot{x}(t_f), t_f)}_{\text{تقریب}} \delta t_f$$

$$+ O(2)$$

$$x(t_f + \delta t_f) = x^d(t_f)$$

نقطه‌ی نهایی مشخص

$$\Rightarrow x(t_f) + \dot{x}(t_f)\delta t_f + \cdots = x^d(t_f)$$

$$x(t_0 + \delta t_0) = x^d(t_0)$$

ابتدای مشخص

$$x(t_0) + \dot{x}(t_0)\, \delta t_0 + \cdots = x^d(t_0)$$

$$\delta x(t_f) = x(t_f) - x^d(t_f) = - \dot{x}(t_f)\, \delta t_f$$

از نقطه در بالای صفحه توضیح داده است

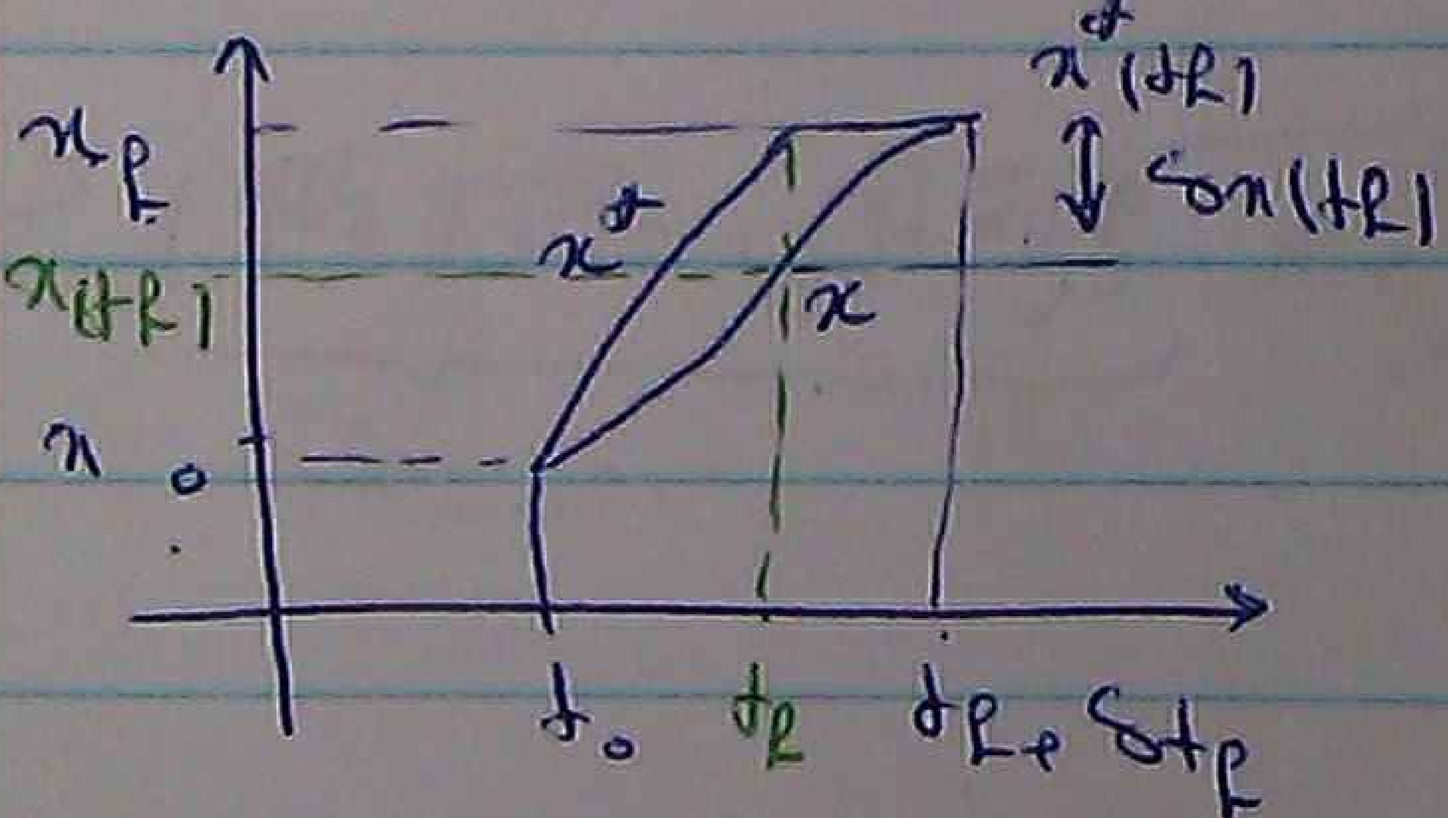
$$\delta x(t_0) = x(t_0) - x^*(t_0) = -\dot{x}(t_0)\,\delta t_0$$

t_0 و t_f آزاد

$x(t_0)$ و $x(t_f)$ معلوم

اویلر

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial g}{\partial \dot{x}} = 0 \\ -g(x(t_0), \dot{x}(t_0), t_0) + \dot{x}\dfrac{\partial g}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_0} = 0 \\ g(x(t_f), \dot{x}(t_f), t_f) - \dot{x}\dfrac{\partial g}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_f} = 0 \end{cases}$$



$x^*(t_f)$

$x(t_f)$

$$x(t_f + \delta t_f) = x^*(t_f)$$

Example:

x را طوری بیابید که J را Min کند.

$$J = \int_1^{t_f} \underbrace{\left(2x + \frac{1}{2}\dot{x}^2\right)}_{g} dt$$

$t_0 = 1$ & t_f : free $t_f > 1$

$x(1) = 4$, $x(t_f) = 4$

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} = 0$$

اویلر ← $2 - \frac{d}{dt}\{\dot{x}\} = 0 \implies 2 - \ddot{x} = 0 \qquad \ddot{x} = 2 \qquad \dot{x} = 2t + c_1$

$\rightarrow x(t) = t^2 + c_1 t + c_2$

شرایط مرزی

$x(1) = 1 \rightsquigarrow 1 + c_1 + c_2 = 1$

$\rightsquigarrow \boxed{c_1 + c_2 = 0}$

شرایط مرزی $x(t_f) = 4$

$t_f^2 + c_1 t_f + c_2 = 4$

$g(x(t_f), \dot{x}(t_f), t_f) - \dot{x}\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_f} = 0$

چون t_f آزاد است $\longrightarrow 2x(t_f) + \frac{1}{2}\dot{x}^2(t_f) - \dot{x}(t_f)(\dot{x}(t_f)) = 0$

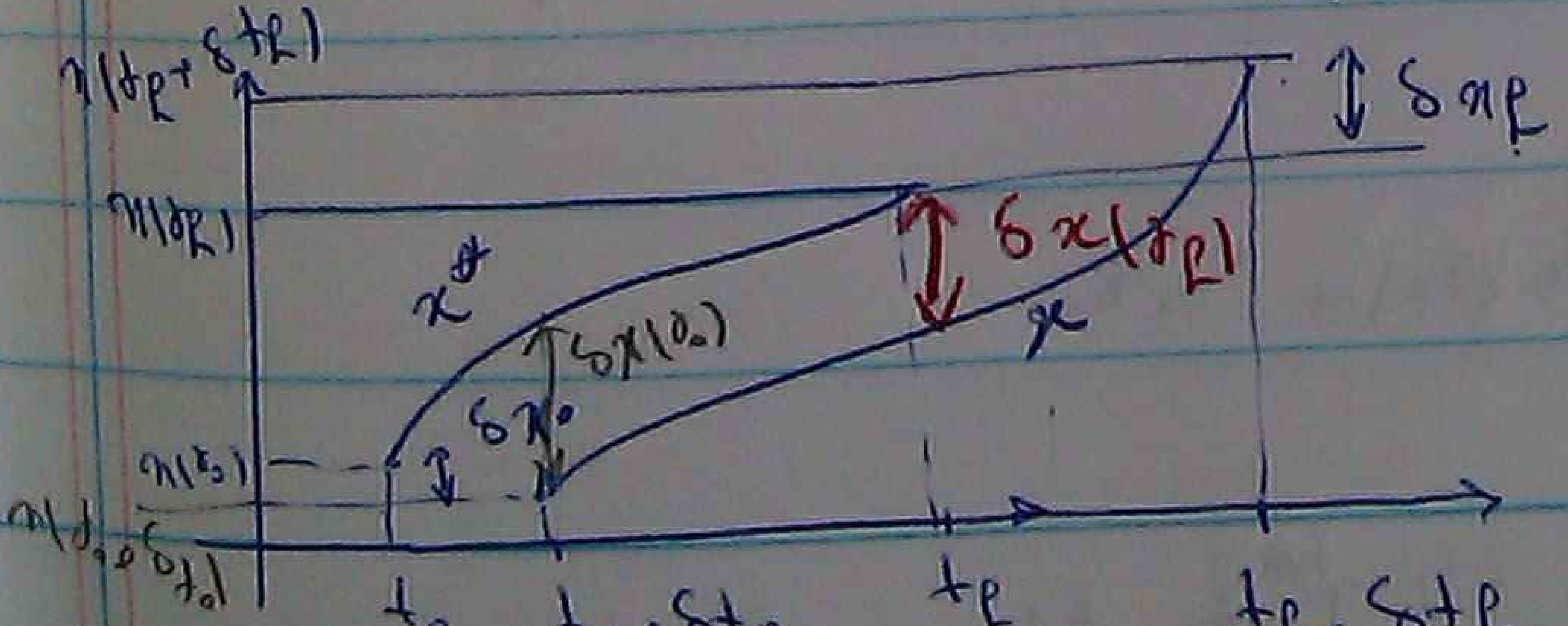
$2x(t_f) - \frac{1}{2}\dot{x}^2(t_f) = 0$

$2t_f^2 + 2c_1 t_f + 2c_2 - \frac{1}{2}[2t_f + c_1]^2 = 0$

از حل دستگاه فوق مقادیر c_1 و c_2 و t_f بدست می آید.

(از حل اینها در واقع ما می خواهیم منحنی حدی را بدست آوریم.)

هـ) t_0 ، t_f ، $x(t_0)$ ، $x(t_f)$ آزاد



$\delta x(t_f) = x(t_f) - x^*(t_f)$

$$\Delta J = \underbrace{\int_{t_0+\delta t_0}^{t_0} \sim}_{②} + \underbrace{\int_{t_0}^{t_f} \sim}_{①} + \underbrace{\int_{t_f}^{t_f+\delta t_f} \sim}_{③}$$

با جایگذاری در A نتیجه می‌گیریم

$$\xrightarrow{\quad} \Delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right] \delta x \, dt + \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_f} \delta x_f - \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_0} \delta x_0$$

$$- \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_f} \dot{x}(t_f)\, \delta t_f + \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_0} \dot{x}(t_0)\, \delta t_0$$

$$\underbrace{- g(x,\dot{x},t)\Big|_{t_0} \delta t_0}_{②} + \underbrace{g(x,\dot{x},t)\Big|_{t_f} \delta t_f}_{③} + O(2)$$

✓ $x(t_f + \delta t_f) = x^*(t_f) + \delta x_f \longrightarrow$ فرق ها قبلی

تقریب

$$x(t_f) + \dot{x}(t_f)\, \delta t_f = x^*(t_f) + \delta x_f$$

$$x(t_f) - x^*(t_f) = \delta x(t_f) = -\dot{x}(t_f)\, \delta t_f + \delta x_f$$

$$\delta x(t_0) = -\dot{x}(t_0)\, \delta t_0 + \delta x_0$$

نیل

(A) $$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right] \delta x \, dt + \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_f} \delta x(t_f) - \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_0} \delta x(t_0)$$

$$- g(x,\dot{x},t)\Big|_{t_0} \delta t_0 + g(x,\dot{x},t)\Big|_{t_f} \delta t_f$$

معادلات زمانی که همه چی آزاد باشد.

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} = 0 \\
&\left.\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right|_{t_f} = 0 \\
&\left.\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right|_{t_0} = 0 \\
&\left[g - \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right]\Big|_{t_f} = 0 \\
&\left[-g + \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right]\Big|_{t_0} = 0
\end{aligned}\right.$$

فرض کنید $x(t_f)$ روی منحنی θ_f بیفتد (الزام قرار گرفتن روی منحنی و حرکت روی آن) مانند هدف گرفتن هواپیما توسط موشک

جلسه هفتم 91,7,30

درصورتی که لازم باشد نقاط ابتدایی روی منحنی های معلوم قرار بگیرند:

$$x(t_0) = \phi(t_0),$$

$$x(t_f) = \theta(t_f)$$

$$\Rightarrow x(t_f + \delta t_f) = \theta(t_f + \delta t_f) = \theta(t_f) + \dot{\theta}(t_f)\delta t_f$$

$$= x(t_f) + \dot{\theta}(t_f)\delta t_f$$

$$\Rightarrow \delta x_f = \dot{\theta}(t_f)\delta t_f \Rightarrow$$

$$\delta x_0 = \dot{\phi}(t_0)\delta t_0$$

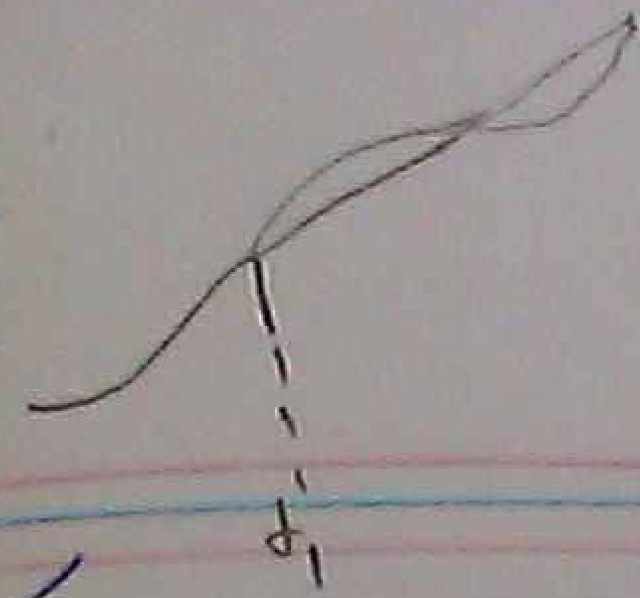
ضرب بسیار بعدی را از اضافات

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \\[2ex] \left[g - \dfrac{\partial g}{\partial \dot{x}}\dot{x} + \dfrac{\partial g}{\partial \dot{x}}\dot{\theta}\right]_{t_f} = 0 \\[2ex] \left[g - \dfrac{\partial g}{\partial \dot{x}}\dot{x} + \dfrac{\partial g}{\partial \dot{x}}\dot{\phi}\right]_{t_0} = 0 \end{cases}$$

تابع g فقط اسکالر است اما x اسکالر یا بردار است.

اگر x بردار باشد در تمام معادلات بالا به جای x و $\dot{x}$، x_i و $\dot{x}_i$ قرار می‌دهیم.

دوباره مجموع



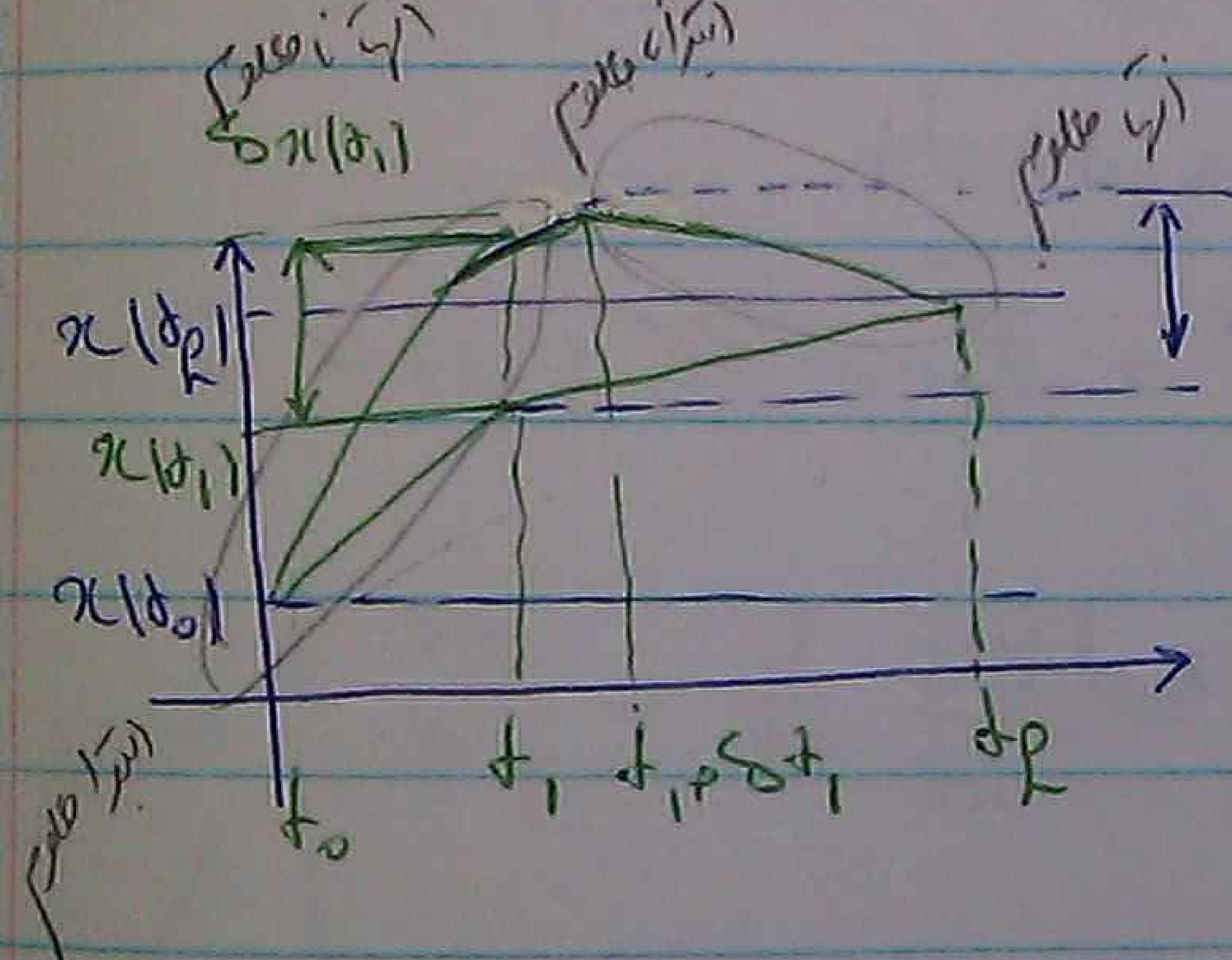
تاکنون مسیرها پیوسته و مشتق پذیر در نظر می‌گرفتیم حال اگر مسیر حالت دارای گوشه باشد داریم:

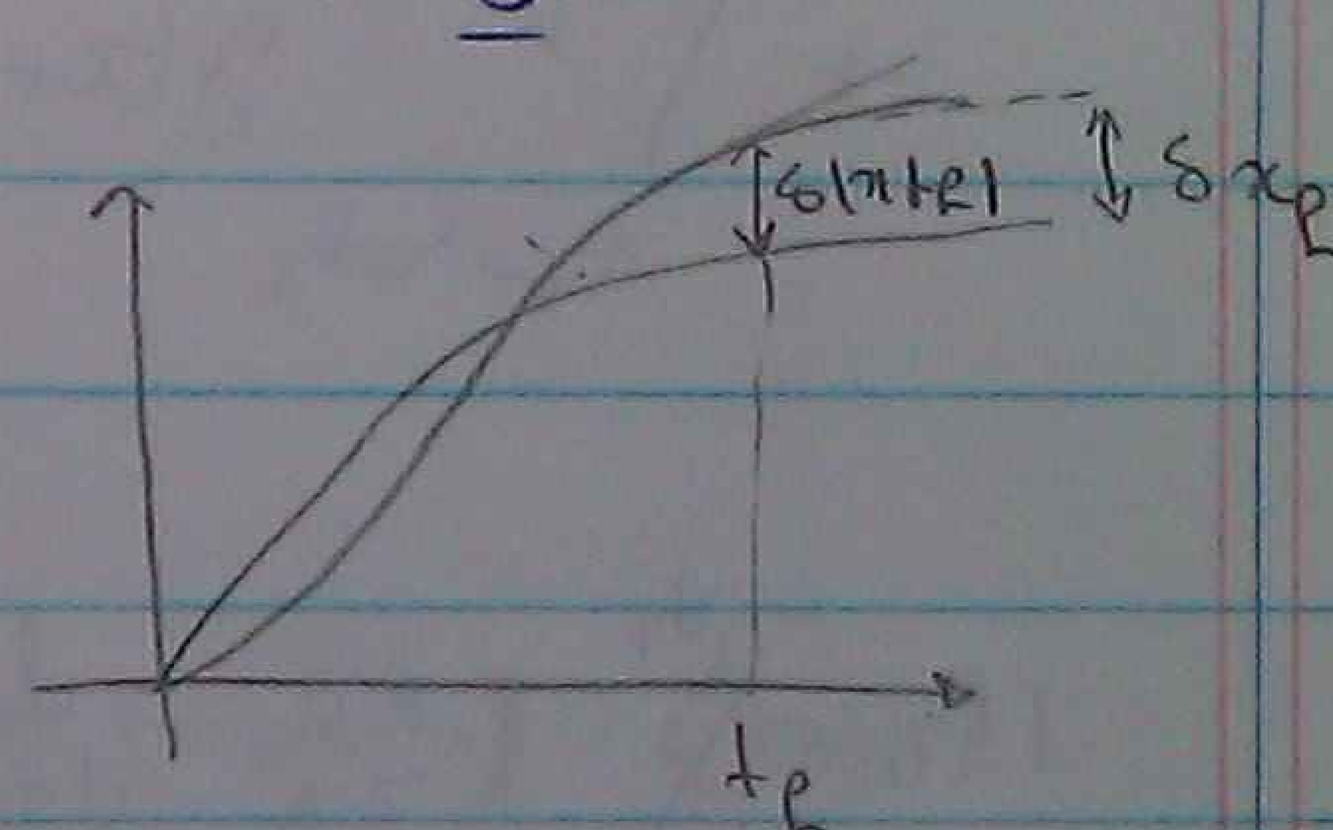
مسیر x^* را چنان بیابید که تابعی معیار

$$J = \int_{t_0}^{t_f} g(x,\dot{x},t)\,dt$$

را کمینه کند.

فرض کنید: $x^*(t)$ می‌تواند نقطه گوشه داشته باشد و t_0، t_f، $x(t_0)$ و $x(t_f)$ معین است.





$$J = \int_{t_0}^{t_1} g(x,\dot{x},t)\,dt + \int_{t_1}^{t_f} g(x,\dot{x},t)\,dt$$

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_1+\delta t_1} g(x+\delta x,\dot{x}+\delta\dot{x},t)\,dt + \int_{t_1+\delta t_1}^{t_f} g(x+\delta x,\dot{x}+\delta\dot{x},t)\,dt$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} g(x,\dot{x},t)\,dt - \int_{t_1}^{t_f} g(x,\dot{x},t)\,dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[g(x+\delta x, \dot{x}+\delta \dot{x}, t) - g(x, \dot{x}, t) \right] dt$$

$$+ \int_{t_1}^{t_f} \left[g(x+\delta x, \dot{x}+\delta \dot{x}, t) - g(x, \dot{x}, t) \right] dt$$

اشکال توضیح داده شود معنی میدهد

$$+ \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} g(x+\delta x, \dot{x}+\delta \dot{x}, t)\, dt$$

مربوط به t_1^-

این را در بازه انتگرال ثابت می‌گیریم

$$+ \int_{t_1+\delta t_1}^{t_1} g(x+\delta x, \dot{x}+\delta \dot{x}, t)\, dt$$

مربوط به t_1^+

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right) \right] \delta x \, dt$$

$$+ \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \delta x(t) \Big|_{t_0}^{t_1^-}$$

$$+ \int_{t_1}^{t_f} \left[\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right) \right] \delta x \, dt$$

$$+ \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \delta x(t) \Big|_{t_1^+}^{t_f}$$

t_1 آزاد است.

$$+ g(x(t_1^-), \dot{x}(t_1^-), t_1^-)\, \delta t_1$$

$$-g(x(t_1^+), \dot{x}(t_1^+), t_1^+)\,\delta t_1 + O(2)$$

علامت منفی؟

$$x(t_1 + \delta t_1) = x(t_1^-) + \delta x_1$$

فقط برای نقطه گوشه Final داریم

$$x(t_1) + \dot{x}^*(t_1^-)\,\delta t_1 = x(t_1^-) + \delta x_1$$

$$\delta x(t_1^-) = \delta x_1 - \dot{x}^*(t_1^-)\,\delta t_1$$

$$\delta x(t_1^+) = \delta x_1 - \dot{x}^*(t_1^+)\,\delta t_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial g}{\partial \dot{x}} = 0 & \forall t \in [t_0, t_1) \cup (t_1, t_f] \\[2ex] \left.\dfrac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right|_{t_1^-} = \left.\dfrac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right|_{t_1^+} \\[2ex] g(x(t_1^-), \dot{x}(t_1^-), t_1^-) - \left.\dfrac{\partial g}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right|_{t_1^-} = \left.\left(g - \dfrac{\partial g}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right)\right|_{t_1^+} \end{cases}$$

✓

دلیل صفر بودن؟

منحنی که در حدی اکسترمال

کمینه‌سازی با قید (تا اینجا قیدی روی تابع نداشتیم فقط می‌گفتیم تابع را کمینه
کند ولی اینجا می‌تونیم که با این شرط کمینه کند.)

جلسه هشتم: 91,8,7

منحنی‌های حدی اکسترمال‌ها مقید:

توابعی که تاکنون بررسی شوند مقید نبودند در اینجا منحنی‌های حدی مقید را بررسی می‌کنیم

مثال:

تابع f را با قید زیر کمینه کنید.

این تابع فاصله از مبدا است

$$f(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2 \longleftarrow \text{فاصله از مبدا}$$

$$\text{s.t.} \quad y_1 + y_2 = 5$$

subject to قیدها

یعنی نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله از مبدأ به ازای $y_1 + y_2 = 5$ کمینه شود.

در نقاط بهینه مشتق تابع صفر است پس

$$df(y_1, y_2) = \frac{\partial f}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} dy_2$$

$$df(y_1^*, y_2^*) = 0 = \frac{\partial f^*}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial f^*}{\partial y_2} dy_2$$

اگر y_1 و y_2 مستقل بودند جواب مسئله نقطه $(0,0)$ بود زیرا dy_1 و dy_2 مستقل بودند در اینجا با توجه به قید مذکور مستقل نیستند.

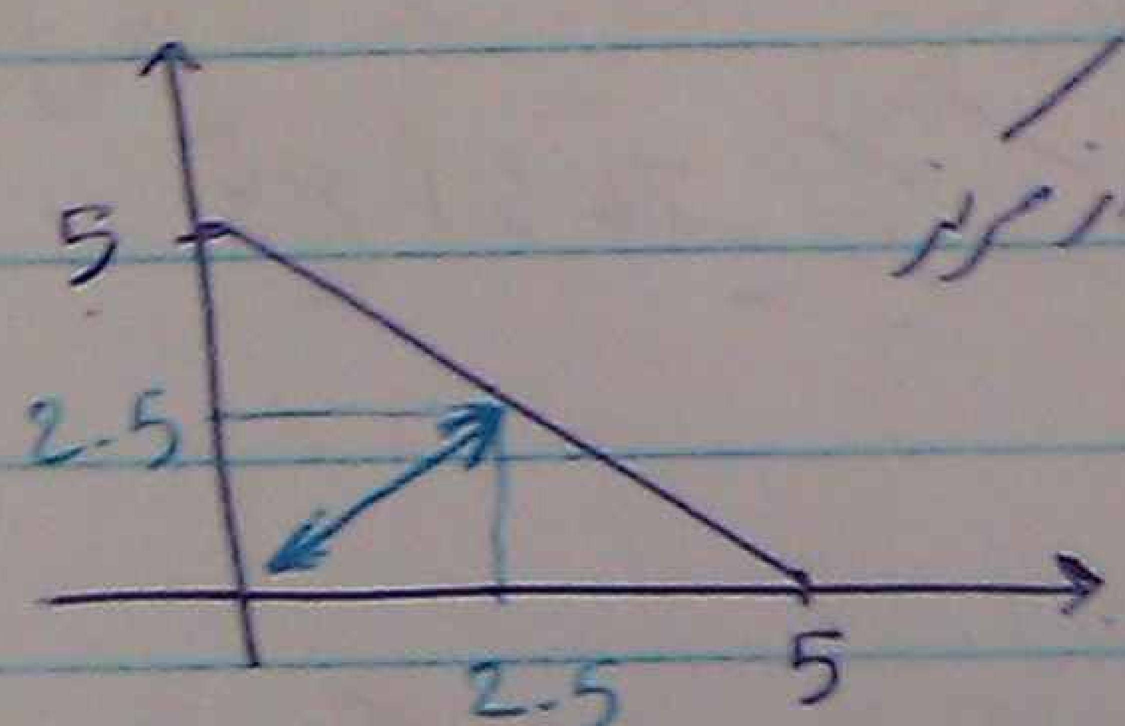
روش حذفی:

$$y_1 = 5 - y_2$$

$$f(y_2) = (5 - y_2)^2 + y_2^2$$

$$df(y_2^*) = [-2(5-y_2) + 2y_2]\,dy_2 = 0$$

$$y_1 = 5 - y_2 \Rightarrow y_2 = \frac{5}{2} \quad \& \quad y_1 = 5 - y_2 = \frac{5}{2}$$



به ازای $y_1 = y_2 = 5/2$ فاصله از مرکز مینیمم می‌شود.

— روشی که در کنترل بهینه مطرح می‌شود روش ضرایب لاگرانژ است.

Lugranz Maltiplayer روش ضرب‌کننده‌ی لاگرانژ

الحاقی

ابتدا تابع افزوده را در نظر می‌گیریم

Augmented Function

یک تابع داریم که با محدودیت می‌خواهیم بهینه‌سازی کنیم

$$f_a(y_1, y_2, p) \triangleq y_1^2 + y_2^2 + \underbrace{p(y_1 + y_2 - 5)}_{\text{قید را اضافه کردیم}}$$

ضرب‌کننده‌ی لاگرانژ در قید

که در آن p متغیری به نام ضرب‌کننده‌ی لاگرانژ است. در صورت برآورده شدن قید، f_a برابر f خواهد شد.

$$df_a(y_1^*, y_2^*, p) = 0 = \left(\frac{\partial f_a}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial f_a}{\partial y_2} dy_2 + \frac{\partial f_a}{\partial p} dp\right)^*$$

چون p خودش متغیر است.

$$= (2y_1^* + p^*)\,dy_1 + (2y_2^* + p^*)\,dy_2 + (y_1^* + y_2^* - 5)\,dp$$

1. قید باید برقرار باشد بنابراین $y_1^* + y_2^* - 5 = 0$

2. p متغیر آزاد است پس طوری انتخاب می‌کنیم که ضریب dy_1 یا dy_2 صفر شود پس

$$2y_2^* + p^* = 0$$

3. dy_1 آزاد است پس ضریب آن باید صفر باشد یعنی

$$2y_1^* + p^* = 0$$

با حل سه معادله فوق داریم:

$y_1^* = 2.5 \qquad y_2^* = 2.5 \qquad p^* = -5$ مقدار بهینه را می‌دهد y_1 و y_2

برای تابع $n+m$ متغیره:

حال فرض کنید یک تابع $n+m$ متغیره با متغیرهای $y_1, \dots, y_{n+m}$ داریم و تعداد قیود نیز n باشد.

$$a_1(y_1, y_2, \dots, y_{n+m}) = 0$$

$$\vdots$$

$$a_n(y_1, y_2, \dots, y_{n+m}) = 0$$

در ابتدا تابع افزوده را تشکیل می‌دهیم:

$$f_a(y_1, y_2, \dots, y_{n+m}, p_1, \dots, p_n) = f(y_1, y_2, \dots, y_{n+m}) + p_1(a_1(y_1, \dots, y_{n+m})) + \dots + p_n a_n(y_1, \dots, y_{n+m})$$

حال تابع افزوده را بهینه می کنیم

حال مشتق تابع افزوده را برابر صفر قرار می دهیم.

$$\begin{cases} a_i(y_1^*, y_2^*, \dots, y_{n+m}^*) = 0 & i=1,\dots,n \\ \dfrac{\partial f_a}{\partial y_j}(y_1^*, \dots, y_{n+m}^*, p_1^*, \dots, p_n^*) = 0 & j=1,\dots,n+m \end{cases}$$

مجموعاً $2n+m$ معادله بدست می آید.

بهینه سازی و نقطه و مسیر در نهایت روی کنترل داریم.

تابعی را بهینه کنیم مسیر را بهینه کنیم

یعنی یک تابعی داریم که می خواهیم بفهمیم روی چه مسیری کمینه می شود.

کمینه سازی تابعی های مقید:

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} g(x, \dot{x}, t)\, dt$$

نه برابر

(مورد) دینامیکی نیست استاتیکی است

قیود نقطه‌ای:

$$f_i(x, t) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ابتدا تابعی افزوده را تشکیل می‌دهیم

$$J_a(x) = \int_{t_0}^{t_f} \{ g(x, \dot{x}, t) + p_1 f_1(x,t) + p_2 f_2(x,t) + \cdots$$

$$+ p_n f_n(x,t) \} \, dt$$

بردار است که p_1 تا p_n دارد

$$J_a(x) = \int_{t_0}^{t_f} \{ g(x, \dot{x}, t) + \underset{1\times n}{p^T(t)} \, \underset{n\times 1}{[f(x,t)]} \, dt \quad \longrightarrow 1\times 1$$

تابع هزینه اسکالر است.

$$f(x,t) = \begin{bmatrix} f_1(x,t) \\ \vdots \\ f_n(x,t) \end{bmatrix} \qquad p(t) = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{bmatrix}$$

صفحه 217 کتاب را حتماً مطالعه کنید.

قبلاً می‌گفتیم روی فقط بهینه صفر است الان روی منحنی بهینه می‌خواهیم صفر شود

δJ_a را تشکیل داده و برابر صفر قرار می‌دهیم (روی منحنی اکسترمال)

همان مشتق است.

$$g_a(x, \dot{x}, p, t) \triangleq g_a(x, \dot{x}, t) + p^T(t) f(x,t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g_a}{\partial x}(x^*, \dot{x}^*, p^*, t) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial g_a}{\partial \dot{x}}(x^*, \dot{x}^*, p^*, t) \right] = 0$$

مثال:

$$\min J(x) = \int_{t_0}^{t_f} [1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2]^{1/2} \, dt$$

$$\text{s.t.} \quad x_1^2 + x_2^2 + t^2 = R^2$$

اگر t نبود قیود دایره می شد و الان با وجود t مرکز دایره با زمان دایره های می شد

$$g_a = \left[1+\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2\right]^{1/2} + p(t)\left[x_1^2+x_2^2+t^2-R^2\right]$$

$$\begin{cases} 2x_1^* p(t) - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\dot{x}_1^*}{(1+\dot{x}_1^{*2}+\dot{x}_2^{*2})^{1/2}}\right)=0 \\ 2x_2^* p(t) - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\dot{x}_2^*}{(1+\dot{x}_1^{*2}+\dot{x}_2^{*2})^{1/2}}\right)=0 \\ x_1^{*2}+x_2^{*2}+t^2=R^2 \end{cases}$$

در چنین حالتی می توان معادلات منحنی مورد نظر را بدست آورد.

قید که در واقع معادلات حالت سیستم است یعنی تابع هزینه داریم که می خواهیم

روی مسیر بهینه اش کنیم

قیود به شکل معادلات دیفرانسیل:

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} g(x,\dot{x},t)\,dt$$

$$f_i(x,\dot{x},t)=0 \quad ; i=1,\dots, n$$

در اینجا نیز مثل قبل از ضرب کننده های لاگرانژ استفاده می شود.

$$g_a = g(x, \dot{x}, t) + p^T(t)\left[f(x, \dot{x}, t)\right]$$

اویلر

$$\Longrightarrow \frac{\partial g_a}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial g_a}{\partial \dot{x}_i}\right] = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, n, \dots$$

n تعداد قیود هست تعداد بردارهامون نیست.

مثال: معادلات را بدست آورید که J را کمینه کرده و معادله زیر را برآورده کند:

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) dt$$

$$\text{s.t} \qquad \dot{x}_1 = x_2$$

$$g_a = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) + p(t)\left(x_2 - \dot{x}_1\right)$$

از اویلر لاگرانژ

$$\longrightarrow \begin{cases} x_1 - \dfrac{d}{dt}\left(-p(t)\right) = 0 \\ x_2 + p(t) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + \dot{p}(t) = 0 \\ x_2 + p(t) = 0 \end{cases}$$

مثال : کنترل بهینه

در سیستم زیر قانون کنترل بهینه را طوری بیابید که J را کمینه کند.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + u(t) \end{cases}$$

رگولاتور مجذوری خطی : LQR

$$x^T Q x + u^T R u \quad R = 1/2$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$J(x, u) = \int_{t_0}^{t_f} 1/2 \left[x_1^2 + x_2^2 + u^2\right] dt$$

هم کنترل بهینه هم مسیر بهینه

$$f_1 = x_2 - x_1 - \dot{x}_1$$

$$f_2 = -2x_1 - 3x_2 + u - \dot{x}_2$$

با فرض p به یک متغیر مانند x داده می‌شود.

$$g_a(x, \dot{x}, u, p) = 1/2\, x_1^2 + 1/2\, x_2^2 + 1/2\, u^2 + p_1(x_2 - x_1 - \dot{x}_1) +$$

$$p_2(-2x_1 - 3x_2 + u - \dot{x}_2)$$

$$\alpha = [x_1 \quad x_2 \quad u]^T$$

$$\frac{\partial g_a}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial g_a}{\partial \dot{x}_i} = 0$$

اویلر

معادلات کنترل بهینه:

$$\begin{cases} x_1^* - p_1^* - 2p_2^* - \frac{d}{dt}[-p_1^*] = 0 \\ x_2^* + p_1^* - 3p_2^* - \frac{d}{dt}[-p_2^*] = 0 \\ u^* + p_2^* - \frac{d}{dt}(0) = 0 \\ \dot{x}_1^* = -x_1^* + x_2^* \\ \dot{x}_2^* = -2x_1^* - 3x_2^* + u^* \end{cases}$$

چون $\dot{u}$ نداریم

با حل این 5 معادله

u^* و بقیه بدست می‌آیند

(مسیر بهینه و u بهینه)

قیود ایزوپریمتریک:

قیود از نوع انتگرال است.

(بیشترین مربوط به انرژی است، گاهی اوقات بحث که مربوط به مصرف و انرژی است.)

$$\int_{t_0}^{t_f} e_i(x,\dot{x},t)\,dt = c_i \qquad i=1,\dots,r$$

با تعریف متغیر قیود داریم:

$$z_i(t) \triangleq \int_{t_0}^{t} e_i(x,\dot{x},t)\,dt \qquad i=1,\dots,r$$

$$z_i(t_0) = 0 \quad , \quad z_i(t_f) = c_i$$

شرایط مرزی

$$\Longrightarrow \dot{z}_i(t) = e_i(x, \dot{x}, t)$$

حال مثل قبل g_a را تشکیل داده و بر طبق روال قبل عمل می‌کنیم:

$$g_a(x, \dot{x}, p, \dot{z}, t) \triangleq g(x, \dot{x}, t) + p^T[e(x, \dot{x}, t) - \dot{z}(t)]$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g_a^*}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial g_a}{\partial \dot{x}}\right) = 0 & n+m \text{ معادله} \\ \dfrac{\partial g_a^*}{\partial z} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial g_a}{\partial \dot{z}}\right) = 0 & r \text{ معادله} \end{cases}$$

$$\dfrac{\partial g_a^*}{\partial z} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial g_a}{\partial \dot{z}}\right) = 0 \longrightarrow \dot{p}^*(t) = 0$$

سمت چپ صفر است چون z در g_a نیست

$$\dot{z} = e(x, \dot{x}, t)$$

$$z(t_0) = 0$$

$$z(t_f) = c_i$$

مثال ص 224 مطالعه شود.

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + u$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + u$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \tfrac{1}{2}\left[x_1^2 + x_2^2\right] dt$$

u در معادله نیست هرچقدر هم زیادش کنیم J نباید
کم شود اما در حقیقت افزوده نشده که انرژی
محدود است با کمینه فضای پوشش بده
یا کم هم پوشش بده.

مسائل این فصل را می‌توانید حل کنید. (حداقل 5 یا 6 مسئله را حل کنید.)

جلسه نهم 91.8.7

شرط لازم برای کنترل بهینه:

$$\dot{x} = a(x,u,t)$$

$$J(u) = h(x(t_f),t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t),u(t),t)\,dt$$

فرض: تمام حالت ها و کنترل ها قابل قبول دارای محدودیت نبوده و t_0 ، $x(t_0)$ معلوم اند

تنها تفاوت با مسائل فصل قبل (حساب تغییرات) وجود جمله $h(x(t_f),t_f)$ در زمان نهایی است.

$$h(x(t_f),t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}\left[h(x(t),t)\right]dt + h(x(t_0),t_0)$$

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ g(x(t),u(t),t) + \frac{d}{dt}\left(h(x(t),t)\right) \right\} dt + h(x(t_0),t_0)$$

چون t_0 ، $x(t_0)$ معلوم اند بنابراین $h(x(t_0),t_0)$ معین بوده و نقشی در کمینه سازی ندارد بنابراین تابع معیار را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ g(x,u,t) + \frac{d}{dt}h(x,t) \right\} dt =$$

$$\int_{t_0}^{t_f} \left\{ g(x,u,t) + \frac{\partial h(x,t)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} \right\} dt = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ g(x,u,t) + \frac{\partial h}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial h}{\partial t} \right\} dt +$$

حال به دلیل وجود قید به شکل معادله دیفرانسیل، تابعی افزوده را تشکیل می‌دهیم.

$$J_a(u) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ g(x,u,t) + \frac{\partial h}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial h}{\partial t} + p^T(t)\big(a(x,u,t) - \dot{x}\big) \right\} dt$$

مشابه قبل δJ_a را بدست آورده برحسب $\delta x(t_f)$ و δt_f ...... را برابر صفر

قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} \dot{p}^*(t) = -\left[\dfrac{\partial a(x^*,u^*,t)}{\partial x}\right]^T p^*(t) - \dfrac{\partial g(x^*,u^*,t)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial g(x^*,u^*,t)}{\partial u} + \dfrac{\partial a(x^*,u^*,t)}{\partial u} p^*(t) = 0 \\ \dot{x}^*(t) = a(x^*,u^*,t) \end{cases}$$

هامیلتونین را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{H}(x,u,p,t) \triangleq g(x,u,t) + p^T(t)\left[a(x,u,t)\right]$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \\ \dot{p}(t) = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \\ 0 = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \end{cases}$$

معادلات حالت (وضعیت) (state)

معادلات کو حالت یا کو وضعیت (co-state)

حل کن

$$\left[\frac{\partial h(x(t),t)}{\partial x} - p(t)\right]^T_{t_f} \delta x_f + \left[\mathcal{H} + \frac{\partial h}{\partial t}\right]_{t_f} \delta t_f = 0$$: شرایط مرزی

اگر t_f و x_f مشخص باشد همه به دست می آید اگر مشخص نباشد باید از شرایط مرزی

استفاده کنیم با توجه به زمان و مقدارهای حالت های مختلفی پیش می آید.

الف) t_f مشخص است یا $\delta t_f = 0$

1) $x(t_f)$ معلوم. در این صورت شرایط مرزی خود به خود برآورده می شوند زیرا

$\delta x_f = 0$ و $\delta t_f = 0$

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x(t_f) = x_f \end{cases}$$

2) $x(t_f)$ آزاد است بنابراین δx_f آزاد است لذا ضریب آن باید برابر صفر باشد.

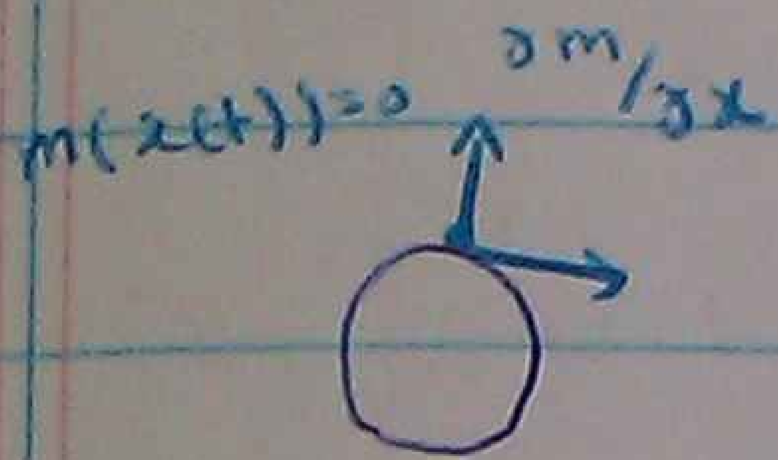
$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial h(x(t),t)}{\partial x}\right|_{t_f} = p(t)\Big|_{t_f} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

توابع ؟

3) وضعیت نهایی باید روی سطحی که با معادله $m(x(t))=0$ بیان می‌شود قرار گیرد.

$$x_1^2(t) + x_2^2(t) - 1 = 0$$

چون وضعیت نهایی روی سطح $m(x(t))=0$ قرار می‌گیرد پس $\delta x(t_f)$ روی صفحه مماس بر



سطح در وضعیت نهایی تغییر می‌کند.

بردار صفحه دارای گرادیان آن خواهد بود که عمود بر معادله تغییر می‌کند.

چون δx_f می‌تواند مماس بر سطح تغییر کند بنابراین برای برقراری شرط زیر

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x} - p\right]_{t_f}^T \delta x_f = 0$$ لازم است که دو بردار δx_f و $\left(\frac{\partial h}{\partial x} - p\right)_{t_f}$ بر هم عمود باشند

پس باید بردار $\left(\frac{\partial h}{\partial x} - p\right)_{t_f}$ در جهت بردار گرادیان m $\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)$ باشد یعنی:

$$\left(\frac{\partial h(x(t),t)}{\partial x} - p(t)\right)_{t_f} = d\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)_{t_f}$$ ✓

پس برای حل مسئله علاوه بر حل دستگاه معادلات دیفرانسیل حالت و ورودی باید شرایط زیر

نیز در t_f برقرار باشد:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial h}{\partial x} - p\right)_{t_f} = d\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)_{t_f} \\ m(x(t_f)) = 0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

4) در صورتی که به جای یک سطح وضعیت نهایی با چند سطوح $m_k(x(t))=0$ قرار گیرد.

برای برآورده شدن قید فوق باید بردار $\left(\frac{\partial h}{\partial x} - p\right)_{t_f}$ در راستای ترکیب خطی از گرادیان‌ها قرار گیرد.

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial h(x(t),t)}{\partial x} - p(t)\right)\Big|_{t_f} = d_1\left(\frac{\partial m_1}{\partial x}\right)_{t_f} + \\ d_2\left(\partial m_2/\partial x\right)_{t_f} + \cdots + d_\ell\left(\frac{\partial m_\ell}{\partial x}\right)_{t_f} \\ m_k(x(t_f)) = 0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ب) t_f آزاد باشد:

1) $x(t_f)$ معلوم باشد. (چون معلوم است δx_f برابر صفر است)

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x} - p\right]_{t_f}^T \delta x_f + \left[H + \frac{\partial h}{\partial t}\right]_{t_f} \delta t_f = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left(H + \frac{\partial h}{\partial t}\right)_{t_f} = 0 \\ \\ x(t_0) = x_0 \end{array}\right.$$

شرایط مرزی

۲) $x(t_f)$ آزاد است.

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{t_f} = p(t_f) \\ \left(H + \frac{\partial h}{\partial t}\right)_{t_f} = 0 \\ x(t_0) = x_0 \end{array}\right.$$

3) وضعیت (حالت) نهایی روی نقطهٔ متحرک $\theta(t)$ قرار دارد.

$$\delta x_f = \dot\theta(t_f)\,\delta t_f$$

$$\left\{\begin{array}{l} x(t_f + \delta t_f) = \theta(t_f + \delta t_f) = \theta(t_f) + \dot\theta(t_f)\,\delta t_f \\ \\ x(t_f + \delta t_f) - x(t_f) = \underline{\delta x_f = \dot\theta(t_f)\,\delta t_f} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\frac{\partial h}{\partial x} - p(t)\right]^T_{t_f} \dot\theta(t_f) + \left(H + \frac{\partial h}{\partial t}\right)_{t_f} = 0 \\ x(t_0) = x_0 \end{array}\right.$$

۴) وضعیت نهایی روی سطح $m(x(t)) = 0$ قرار می‌گیرد.

δt_f ، $\delta x(t_f)$ از هم مستقل هستند. δt_f آزاد است پس ضریب آن باید صفر باشد.

$$\begin{cases} \left(\mathcal{H} + \frac{\partial h}{\partial t}\right)_{t_f} = 0 \\ \left(\frac{\partial h}{\partial x} - p\right)_{t_f} = d\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)_{t_f} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$m(x(t))=0$ یعنی در فضای حالت با زمان تغییر نمی‌کند، α_1 و α_2 که یک سطح ثابت حرکت می‌کند اما اگر $m(x(t),t)$ داشته باشیم با زمان هم تغییر می‌کند.

اگر در وضعیت نهایی روی سطوح $m_x(x(t))=0$ قرار بگیرد داریم:

$$\begin{cases} \left(\mathcal{H} + \frac{\partial h}{\partial t}\right)_{t_f} = 0 \\ \left[\frac{\partial h}{\partial x} - p\right]_{t_f} = d_1\left(\frac{\partial m_1}{\partial x}\right)_{t_f} + \cdots + d_l\left(\frac{\partial m_l}{\partial x}\right)_{t_f} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

5) وضعیت نهایی روی سطح $m(x(t),t)=0$ قرار می‌گیرد (سطح با زمان تغییر می‌کند)

می‌توان گفت δt_f آزاد است. باید در راستای گرادیان باشد تا آن دو بر هم عمود باشند.

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial h}{\partial x} - p\right)_{t_f} = d\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)_{t_f} \\ \left(\mathcal{H} + \frac{\partial h}{\partial t}\right)_{t_f} = d\left(\frac{\partial m}{\partial t}\right)_{t_f} \end{cases}$$

$$
\begin{array}{r}
\text{n معادله}\Big\{ \\[2em]
\text{یک معادله}\Big\{
\end{array}
\begin{bmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x} - p \\[2em] \mathcal{H} + \dfrac{\partial h}{\partial t} \end{bmatrix}_{t_f} = d \begin{bmatrix} \dfrac{\partial m}{\partial x} \\ \hline \dfrac{\partial m}{\partial t} \end{bmatrix}
$$

۲ اسکالر در هامیلتونین

حالت کلی: اگر وضعیت نهایی باید روی سطح متغیر با زمان $m_k(x(t),t)=0$ قرار گیرد.

$k = 1, \dots, l$

$$
\begin{cases}
\begin{bmatrix} \dfrac{\partial h(x(t),t)}{\partial x} - p(t) \\ H(x,u,p,t) + \dfrac{\partial h(x,t)}{\partial t} \end{bmatrix} = 0 \longrightarrow d_1 \begin{bmatrix} \dfrac{\partial m_1}{\partial x} \\[1em] \dfrac{\partial m_1}{\partial t} \end{bmatrix} + \dots + d_l \begin{bmatrix} \dfrac{\partial m_l}{\partial x} \\[1em] \dfrac{\partial m_l}{\partial t} \end{bmatrix} \\
m_k(x(t_f), t_f) = 0 \\
x(t_0) = x_0
\end{cases}
$$

91,8,14 جلسه دهم

$$\dot{x} = a(x,u,t)$$

$$J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x,u,t)\,dt$$

$$\mathcal{H} = g(x, u, t) + p^T(t)\,a(x,u,t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} & \text{معادلات حالت} \\ \dot{p}(t) = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} & \text{معادلات کمکی} \\ 0 = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} & \end{cases}$$

دستگاه معادلات

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x} - p\right]^T_{t_f} \delta x_f + \left[\mathcal{H} + \frac{\partial h}{\partial t}\right]_{t_f} \delta t_f = 0$$

شرایط مرزی

ص 254 مثال

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \end{cases}$$

را طوری کنترل کنید که با کمترین انرژی به صفر برسد

انرژی مصرفی $(u(t))$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} u^2(t)\,dt$$

$$\mathcal{H} = \overset{\frac{1}{2}u^2}{\cancel{g}} + p_1 \dot{x}_1 + p_2(-x_2 + u)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1^* = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} = x_2^* \\ \dot{x}_2^* = \dfrac{\partial H}{\partial p_2} = -x_2^* + u \end{cases}$$

این سیستم پایدار نیست

پایدار مرزی است.

$$Ax = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$x_2 = 0$

x_1 آزاد

اگر رتبه A کامل نباشد نقاط تعادل بی‌نهایت یا صفر است

؟ از کجا مره

:

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1} = 0 \\ \dot{p}_2 = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2} = -p_1 + p_2 \\ 0 = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = p_2^* + u^* = 0 \Rightarrow u^* = -p_2^* \end{cases}$$

$\mathcal{H}$ اسکالر است.

$2n$ معادله خواهیم داشت که باید حل کنیم.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$x = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t - \tau) B u(\tau) d\tau$$

$$\Phi(t) = e^{At}$$ ماتریس انتقال حالت.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1^* \\ \dot{x}_2^* \\ \dot{p}_1^* \\ \dot{p}_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ p_1^* \\ p_2^* \end{bmatrix} + \cancel{[\ ]}$$

حل این معادله پارامتری است چون P_1 و P_2 را در لحظه t_f نداریم

الف: فرض کنید $x(0)=$ و $x(2)=[5\ \ 2]^T$ $\qquad t_f=2$

$$\dot{p}_1^* = 0 \Longrightarrow \boxed{p_1 = c_3}$$

$$\dot{p}_2^* = -c_3 + p_2^*$$

$$\dot{p}_2^* - p_2^* = -c_3 \Longrightarrow \boxed{p_2^* = c_4 e^{t} + c_3}$$

$$\dot{x}_1^* = x_2^*$$

$$\dot{x}_2^* = -x_2^* - c_4 e^{t} - c_3$$

$$\dot{x}_2 + x_2^* = -c_4 e^{t} - c_3 \Longrightarrow x_2^* = \underbrace{c_2 e^{-t}}_{\text{پاسخ همگن}} \underbrace{-\tfrac{1}{2} c_4 e^{t}}_{\text{پاسخ: ازای ورودی } -c_4 e^{t}} \underbrace{-c_3}_{\text{پاسخ: ازای } -c_3}$$

پاسخ خصوصی $Ae^{t} + Ae^{t} = -c_4 e^{t}$

$$\Longrightarrow A = -\tfrac{1}{2} c_4$$

$$\dot{x}_1^* = x_2 \Longrightarrow \boxed{x_1^* = -c_2 e^{-t} - \tfrac{1}{2} c_4 e^{t} - c_3 t + c_1}$$

$$x(0) = 0 \longrightarrow \begin{bmatrix} x_1^*(0) \\ x_2^*(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

شرایط اولیه :

$$\begin{cases} -c_2 - \tfrac{1}{2} c_4 + c_1 = 0 \\ c_2 - \tfrac{1}{2} c_4 - c_3 = 0 \end{cases}$$

برای $t=2$:

$$\begin{cases} -c_2 e^{-2} - \tfrac{1}{2} c_4 e^{2} - c_3 2 + c_1 = 5 \\ c_2 e^{-2} - \tfrac{1}{2} c_4 e^{2} - c_3 = 2 \end{cases}$$

ب : $x(0)=0$ و $x(2)$ نامعین

$\delta t_f = 0$ و t_f ثابت

$x(0)$ و p_2 را داریم

تابع هزینه : $J = \int_{t_0}^{t_f} \tfrac{1}{2} u^2 \, dt$ داریم

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x} - p\right)_{t_f} = 0$$

$$h = 0 \Longrightarrow -p(t_f) = 0$$

$$P_1(2) = 0$$

از P_2 و $P_2 = 0$

$$\longrightarrow c_3 = c_4 = 0$$

$$P_2(2) = 0$$

معادلات حالت کمک حالت و ورودی تغییر نمی کنند. در این حالت به جای $x(2)$ و $P(2)$؟

معلوم است که ۴ معادله با ۴ مجهول برای c_1 و c_2 و c_3 و c_4 باید حل شوند.

از شرایط لحظه ابتدا بدست می‌آید $c_1 = c_2 = 0$

$p_2^* = 0 \Longrightarrow u^* = 0 \Longrightarrow$ یعنی رها کردن سیستم

(نمی‌خواهیم جایی برود. برای این می‌خواهیم: نقطه خاصی حالت نزدیک شود برسد با کمترین انرژی)

در اینجا u باید صفر بیاید برای اینکه اصلاً شرط نداشتیم که به کجا برسد. وقتی $x(2)$ را معین نکنیم به کجا برسد u با کمترین انرژی یعنی می‌تواند جای خودش باشد.

$$J = \frac{1}{2}\left[x_1[2]-5\right]^2 + \frac{1}{2}\left[x_2[2]-2\right]^2 + \int_0^2 \frac{1}{2} u^2(t)\,dt$$

فاصله از 5 و 2 ایجاد هزینه کرده است. هرچقدر به 5 و 2 نزدیک شود با مصالحه‌ای بین هردو هزینه کمتر خواهد شد.

$$\longrightarrow J = X^T H X + \int u^T R u \, dt$$

در اینجا $H = 1/2$ شده است.

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

چون h در معادلات حالت و کمک حالت و ورودی (هامیلتونین) تأثیری ندارد بنابراین معادلات قبلی و حل آنها به صورت پارامتری به قوت خود باقی می‌باشند.

$$\frac{\partial h}{\partial x_1}(t_f) - P_1(t_f) = 0 \implies x_1(2) - 5 - P_1(2) = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_2}(t_f) - P_2(t_f) = 0 \implies x_2(2) - 2 - P_2(2) = 0$$

ج: فرض کنید سیستم باید از $x(0)=0$ به خط $x_1 + 5x_2 = 15$ با تابع

خط: $x_1 + 5x_2 = 15$ $\qquad$ $J = \int_0^2 \frac{1}{2} u^2 \, dt$ منتقل شود

$$m(x(t)) = x_1 + 5x_2 - 15 = 0$$

$$0 - P_1(t_f) = d \frac{\partial m}{\partial x_1} = d$$

$$0 - P_2(2) = d \frac{\partial m}{\partial x_2} = 5d$$

$$x_1(2) + 5x_2(2) = 15$$

5 معادله با 5 مجهول خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \\ P_1(2) = -d \\ P_2(2) = 5d \\ x_1(2) + 5x_2(2) = 15 \end{cases}$$

Linear Quadratic Regulator — تنظیم کننده‌ی خطی:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$x \in \mathbb{R}^n \quad , \quad u \in \mathbb{R}^m$

هر دو بدون محدودیت: x و u

فعلاً قیدی نداریم:

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_f)\, H\, x(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left[x^T(t)\, Q(t)\, x(t) + u^T(t)\, R(t)\, u(t) \right] dt$$

$H \,,\, Q(t) :$ P.S.D

$R(t) :$ P.D

اگر $R=0$ باشد $u \to \infty$ میل می‌کند.

وقتی J به صورت بالا تعریف شود حالت رگولاتوری است می‌خواهد $x(t)$ را به صفر ببرد هر جا کوچکتر باشد بهتر؛ هر چه H بزرگتر شود مقدار کوچکتری می‌گیرد.

فرض: t_f معلوم و $x(t_f)$ آزاد

t_0 و $x(t_0)$ معلوم

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} x^T Q x + \frac{1}{2} u^T R u + p^T (Ax + Bu)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = Ax + Bu \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -Qx - A^T p \\ 0 = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = Ru^* + B^T p \longrightarrow u^* = -R^{-1} B^T p^* \end{cases}$$

همیشه معادله جبری برحسب u بدست می آید

می توانیم سریع حلش کنیم

R حتماً باید P.D باشد

والا u حل می شود.

با جایگذاری u^* در معادلات حالت و کو حالت داریم:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}}_{2n \times 2n} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} \longrightarrow$$

معادلات همگن

چون u ندارند.

شرایط مرزی $\dfrac{\partial h}{\partial x} - p(t_f) = 0$

$$\Rightarrow H x(t_f) - p(t_f) = 0$$

$$p(t_f) = H x(t_f)$$

$$\begin{bmatrix} x(t_f) \\ p(t_f) \end{bmatrix} = \Phi(t_f, t_0) \begin{bmatrix} x(t_0) \\ p(t_0) \end{bmatrix}$$

$$= \Phi(t_f, t) \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix}$$

$$p(t_f) = \Phi_{21} x(t) + \Phi_{22} p(t)$$

$$H x(t_f) = \Phi_{21} x(t) + \Phi_{22} p(t)$$

$$H \Phi_{11} x(t) + H \Phi_{12} p(t) = \Phi_{21} x(t) + \Phi_{22} p(t)$$

$$\Rightarrow [H \Phi_{11} - \Phi_{21}] x(t) = [\Phi_{22} - H \Phi_{12}] p(t)$$

$$p(t) = \underbrace{[\Phi_{22} - H \Phi_{12}]^{-1} [H \Phi_{11} - \Phi_{21}]}_{K(t)} x(t)$$

ماتریس انتقال حالت همیشه معکوس پذیر است.

$$\Rightarrow p(t) = K(t) x(t)$$

حتی اگر سیستم متغیر با زمان هم نباشد (LTI) $K(t)$ متغیر با زمان بدست می‌آید

یعنی K به t وابسته است در سیستم‌های LTI

$$K(t_f) = H$$

یافتن ماتریس انتقال حالت همواره میسر نبوده و گاهی (برای سیستم‌های متغیر با زمان) بسیار مشکل است. در اینگونه موارد به طریق عکس عمل می‌شود به این گونه در ها معادلات به جای $p(t)$ قرار می‌دهند $K(t)x(t)$. در نهایت یک معادله دیفرانسیلی برحسب K بدست می‌آید.

$$p(t_f) = H x(t_f)$$

$$p(t) = K x(t)$$

$$H x(t_f) = K(t_f) x(t_f) \Rightarrow H = K(t_f)$$

معادله ریکاتی دیفرانسیل

DRE :

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = -KA - A^T K - Q + K B R^{-1} B^T K \\ K(t_f) = H \end{cases}$$

$$u^* = -R^{-1} B^T K(t)\, x(t) \quad \checkmark$$

Ex ص 272 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2 + u \end{cases}$$

$$J(u) = \int_0^T \left[x_1^2 + \tfrac{1}{2} x_2^2 + \tfrac{1}{4} u^2 \right] dt$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \& \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H = 0 \quad \& \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tfrac{1}{2} \end{bmatrix} \quad R = \tfrac{1}{4}$$

$$\Longrightarrow \quad u^* = -R^{-1} B^T K(t)\, x(t)$$

$$= -4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} K(t)\, x(t)$$

اما $K(t)$ یک ماتریس متقارن است.

این مثال را شبیه سازی کنید.

$$K(t) = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

$$u^{*}(t) = -4 \begin{bmatrix} k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} x(t)$$

جلسه یازدهم 91,8,15

تعقیب کننده های خطی:

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t)$$

$$J = \tfrac{1}{2}\,[x(t_f) - r(t_f)]^T H\,[x(t_f) - r(t_f)]$$

در نهایت می‌خواهیم x به مقدار $r(t_f)$ برسیم

$$+ \tfrac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \{ [x(t) - r(t)]^T Q(t)\,[x(t) - r(t)] + u^T(t) R(t) u(t) \}\,dt$$

معادلات اشباع R کوچک و u بزرگ

رفته رفته

$$u(t) = K(t)\,x(t)$$

x(t) : علامت e خطای حالت

فعلی بله را دنبال می‌کنیم در ابتدا خطا زیاد در رفته رفته خطا کوچکتر شده می‌توان u را بزرگ کرد از طریق بزرگ کردن K (یا R^{-1})

اوایل R را بزرگ می‌دهیم پس K اوایل کوچک بعدش رفته رفته بزرگ می‌شود:

ثابت بودن H و Q و R^{-1} constant

$$J \triangleq \tfrac{1}{2}\|x(t_f) - r(t_f)\|_H^2 + \tfrac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \|x(t) - r(t)\|_{Q(t)}^2 + \|u(t)\|_{R(t)}^2\,dt$$

$$\mathcal{H} = \tfrac{1}{2}\|x(t) - r(t)\|_{Q(t)}^2 + \tfrac{1}{2}\|u(t)\|_{R(t)}^2$$

$$+ p^T(t)\,A(t)\,x(t) + p^T(t)\,B(t)\,u(t)$$

$$\dot{p}^*(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -Q(t)x^*(t) - A^T(t)p^*(t) + \underbrace{Q(t)r(t)}_{\text{اضافه شده}}$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = R(t)u^*(t) + B^T(t)p^*(t)$$

$$\Rightarrow \quad u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)p^*(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^*(t) \\ \dot{p}^*(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -Q(t) & -A^T(t) \end{bmatrix}}_{\hat{A}(t)} \begin{bmatrix} x^*(t) \\ p^*(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Q(t)r(t) \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = e^{\hat{A}(t).t}$$

$$\begin{bmatrix} x^*(t_f) \\ p^*(t_f) \end{bmatrix} = \Phi(t_f,t)\begin{bmatrix} x^*(t) \\ p^*(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\int_t^{t_f} \Phi(t_f,\tau)\begin{bmatrix} 0 \\ Q(\tau)r(\tau) \end{bmatrix} d\tau}_{\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}}$$

$$x^*(t_f) = \Phi_{11}(t_f,t)\,x^*(t) + \Phi_{12}(t_f,t)\,p^*(t) + f_1(t)$$

$$p^*(t_f) = \Phi_{21}(t_f,t)\,x^*(t) + \Phi_{22}(t_f,t)\,p^*(t) + f_2(t)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} - p\Big|_{t_f} = 0 \rightarrow H(x(t_f) - r(t_f)) = p(t_f)$$

از شرایط مرزی داریم:

$$p^*(t_f) = H[x(t_f) - r(t_f)] = Hx(t_f) - Hr(t_f)$$

با قرار دادن $x(t_f)$ و $p(t_f)$ در رابطه فوق معادله زیر بدست می‌آید:

$$\Phi_{21}x^*(t) + \Phi_{22}p^*(t) + f_2(t) = H\Phi_{11}x^*(t) + H\Phi_{12}p^*(t) + Hf_1(t) - Hr(t_f)$$

$$[\Phi_{22} - H\Phi_{12}]\,p^*(t) = \ldots$$

هدف بدست آوردن $p(t)$ است.

$$\Rightarrow p^*(t) = \underbrace{[\Phi_{22} - H\Phi_{12}]^{-1}[H\Phi_{11} - \Phi_{21}]}_{K(t)}x^*(t) + \underbrace{[\Phi_{22} - H\Phi_{12}]^{-1}[Hf_1(t) - Hr(t_f) - f_2(t)]}_{S(t)}$$

✓ $p^*(t) = K(t)x^*(t) + S(t)$

✓ در حالت رگولاتوری $S(t)$ را نداشتیم برابر صفر بود.

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T K(t)x(t) - R^{-1}(t)B^T(t)S(t)$$

$$\triangleq F(t)x(t) + V(t)$$

ماتریس بهره فیدبک

سیگنال فرمان

Command

Set point

refrence

چون بدست آوردن ماتریس انتقال حالت دشوار است بنابراین روش دیگری برای یافتن $K(t)$ و $S(t)$ به شکل زیر پیشنهاد می‌شود.

$$\underset{n\times 1}{p^*(t)} = \underset{n\times n}{K(t)}\,\underset{n\times 1}{x^*(t)} + \underset{n\times 1}{S(t)}$$

$$\dot{p}^*(t) = \dot{K}(t)\,x^*(t) + K(t)\,\dot{x}^*(t) + \dot{S}(t)$$

با جایگذاری $\dot{x}$ و $\dot{p}$ در معادله فوق به معادلات زیر می‌رسیم

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = -KA - A^T K - Q + KBR^{-1}B^T K & \text{(DRE)} \\ \dot{S}(t) = \left[-A^{T} - KBR^{-1}B^T\right]S + Qr(t) \end{cases}$$

صفحه ۲۷۰

$$P(t_f) = Hx(t_f) - Hr(t_f)$$

$$= K(t_f)\,x(t_f) + S(t_f)$$

چون باید معادله فوق به ازای همه $r(t_f)$ ها و $x(t_f)$ ها برقرار باشد بنابراین:

$$\begin{cases} K(t_f) = H \\ S(t_f) = -Hr(t_f) \end{cases}$$

دوباره شرط backward داریم.

مثال: 5.2.3 ص 283

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 - x_2 + u(t)$$

۷

$$J(u) = [x_1(T) - 1]^2 + \int_0^T \{[x_1(t) - 1]^2 + 0.0025u^2(t)\}\, dt$$

x_2 آزاد است . قیدی روی آن نگذاشته

$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ p.s.d

$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $R = 0.0025 > 0$

باید مثبت معین باشد

هدف اینکه $x_1(t)$ تا حد امکان به ۱ نزدیک شود با شرط اینکه $u = \infty$ نشود.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$ $K_{n \times n}$ و متقارن

$\dot{K} = -KA - A^T K - Q + KBR^{-1}B^T K$ $k_{11}(T) = 1$

$K(t_f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = H$ $k_{12}(T) = k_{22}(T) = 0$

$\dot{S} = -[A^T - KBR^{-1}B^T]S + Qr(t)$

$S(t_f) = -Hr(t_f)$

سؤال: آیا سیستم پایدار است؟ مقادیر ویژه سیستم را بدست می آوریم

$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow$ سیستم ناپایدار است.

نخوندم درباره نحوه :

وقتی ۱ هست؟ می‌رود تغییرات x_1 کم شود یعنی $\dot{x}_1 = 0 \Leftarrow x_2 = 0$ $\quad r(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

می‌شود. اگر در $r(t)$ داشته باشیم $x_2 \neq 0$ شبیه‌سازی کنید.

$r(t)$ در $s(t)$ موثر می‌شود در نهایت در u موثر می‌شود

همین مثال را با $r(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \neq 0 \end{bmatrix}$ شبیه‌سازی کنید. و توجیه کنید که آیا به سمت صفر می‌رود یا نه؟

هدف اینه که تابعی (J) را کمینه کنیم در نهایت تغییرات x کم می‌شود پس u را که داده و به سمت صفر می‌بره اما در اوایل نمی‌تونست این کار را بکنه چون در ابتدا سیستم ناپایدار بوده اگر u را اعمال می‌کرد سیستم به بی‌نهایت می‌رفت

همین سیستم را با سیستم پایدار شبیه‌سازی کنید. ببینید این مرحله دیگه تکرار می‌شود یا نه (یعنی A پایدار را انتخاب کنید).

مسائل LQR با تابعی معیار درجه مربعی

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_f) H x(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \{x^T Q x + u^T R u + 2 x^T S u\} dt$$

R, S مثبت معین

H, Q مثبت نیمه معین

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\{x^T Q x + 2x^T S u + u^T R u\} + p^T \{Ax + Bu\}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -Qx - Su - A^T p$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = S^T x + Ru + B^T p$$

$$u^* = -R^{-1}(S^T x + B^T p)$$

شرایط مرزی:

$$p^*(t_f) = Hx(t_f)$$

$p(t) = K(t)\,x(t)$ با فرض

$$u = -R^{-1}\{S^T + B^T K\}\, x(t)$$

با قرار دادن u در $\dot{p}$ معادله DRE بدست می‌آید:

$$\begin{cases} \dot{K} = -KA - A^T K - Q + \{KB + S\} R^{-1} \{B^T K + S^T\} \\ K(t_f) = H \end{cases}$$

جلسه دوازدهم ۲۱ مهر ۹۱

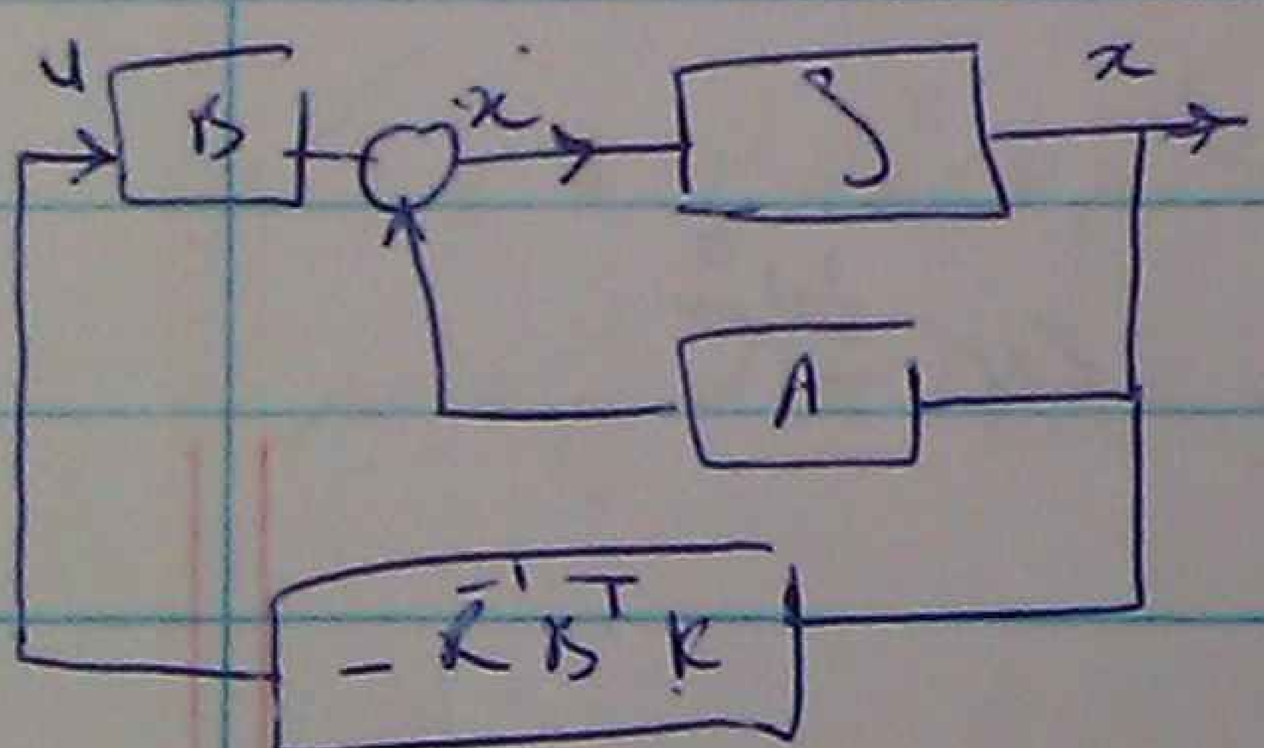
$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} (x^T Q x + u^T R u)\, dt$$

$$u = -R^{-1}B^T K\, x(t)$$

u ای که این کار را انجام دهد کنترلر لازم را طوری می‌دهیم که x را به سمت صفر ببرد.

ما می‌خواهیم u و x را به سمت صفر ببرد و J کمینه شود.



معادله مشخصه حلقه باز: $|sI - A| = 0$

معادله مشخصه حلقه بسته: $|sI - (A - BR^{-1}B^TK)| = 0$

Ex.

Q: psd

$$\begin{array}{c} x_1^2 \\ \uparrow \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow$$ x_1 را دارد کنترل می‌کند.

آیا اندازه u به Q وابسته نیست؟

توضیح؟

$$Q = C^T C$$

$$y = x_1$$

$$\underset{m\times 1}{y} = \underset{m\times n}{C}\,\underset{n\times 1}{x}$$

شرط لازم برای پایداری:

مثلاً اگر سیستم (A, C) رویت‌پذیر باشد (سیستم پایدار می‌شود) فقط رویت‌ناپذیرها باید پایدار باشند.

یا سیستم (A, C) آشکارپذیر باشد.

$$Q_{n\times n} = C^T C \qquad C = \sqrt{Q}$$

رویت‌پذیر

سیستم را باید کنترل‌پذیر باشد یا پایدارپذیر (۲ حالت پیش می‌آید)

با داشتن یکی از شرایط فوق سیستم حلقه بسته حتماً پایدار خواهد بود.

$\{A, B\}$ پایدارپذیر (کنترل‌پذیر)

مسأله LQR با درجه پایداری α:

$\{A, \sqrt{Q}\}$ آشکارپذیر (رویت‌پذیر)

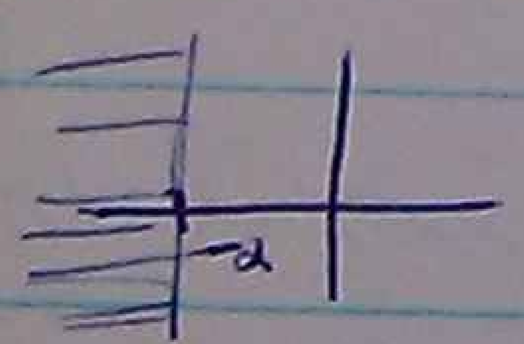
کاهش.

با شرط فوق مطمئن هستیم که فیدبک حالت

این سیستم را پایدار می‌کند.

اگر بخواهیم قطب‌های سیستم حاصل سمت چپ $-\alpha$ قرار گیرند.

$e^{-\alpha t} \longrightarrow 0$



$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} e^{2\alpha t}\left[x^T Q x + u^T R u\right] dt$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \underbrace{[e^{\alpha t} x]^T}_{\hat{x}} Q \, e^{\alpha t} x + \underbrace{[e^{\alpha t} u]^T}_{\hat{u}} R \, [e^{\alpha t} u] \, dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \{\hat{x}^T Q \hat{x} + \hat{u}^T R \hat{u}\} dt$$

$$\hat{x} = e^{\alpha t} x \longrightarrow \dot{\hat{x}} = \alpha e^{\alpha t} x + e^{\alpha t}\dot{x}$$

$$= \alpha e^{\alpha t} x + e^{\alpha t}[Ax + Bu]$$

$$= (A+\alpha I)\, e^{\alpha t} x + B\, e^{\alpha t} u$$

$$= (A+\alpha I)\, \hat{x} + B \hat{u}$$

فرض : $\hat{A} = \begin{bmatrix} 1+\alpha & 0 \\ 0 & 2+\alpha \end{bmatrix}$ $\rightarrow$ مقادیر ویژه که 1 و 2 بود حالا α مقدار اضافه مطلوب‌تر

$$A = \begin{bmatrix} a & \\ & b \end{bmatrix} \qquad \hat{A} = \begin{bmatrix} a+\alpha & 0 \\ 0 & b+\alpha \end{bmatrix}$$

$a+\alpha < 0 \rightarrow a < -\alpha$ سیستم جدید α مقدار مطلوب‌تر از سیستم قبلی است.

$b+\alpha < 0 \rightarrow b < -\alpha$ مقادیر ویژه حلقه بسته x سمت چپ α می‌افتند.

$\hat{u}$ باعث پایداری سیستم حلقه بسته $\hat{x}$ می‌شود بنابراین مقادیر ویژه در سمت چپ محور نیز قرار می‌گیرند حال چون مقادیر ویژه سیستم $\hat{x}$ به اندازه α از مقادیر ویژه سیستم x مطلوب‌تر هستند بنابراین مقادیر ویژه سیستم اصلی (x) سمت چپ محور α قرار می‌گیرند.

$$\hat{u} = -R^{-1} B^T \hat{R}\, \hat{x}$$

$\hat{R}$ از روی معادله DRE $(\hat{u}, \hat{x})$ بدست می‌آید.

$$e^{\alpha t} u(t) = -R^{-1} B^T \hat{R}\, e^{\alpha t} x(t)$$

$$u(t) = -R^{-1} B^T \underline{\underline{\hat{R}}}\, x(t)$$

توضیح؟

$$\hat{K}\hat{A} + \hat{A}^T\hat{K} - \hat{K}BR^{-1}B^T\hat{K} + Q = 0 = -\dot{\hat{K}}$$

برای $\hat{K}$ را بدست می‌آوریم.

چرا صفر مشتق نداشتیم؟

$$\underbrace{\hat{K}\hat{A} + \hat{A}^T\hat{K} - \hat{K}BR^{-1}B^T\hat{K} + Q = 0}_{ARE}$$

$\dot{\hat{K}} = 0$ ، $t_0 = 0$ و $t_f = \infty \Leftarrow$

DRE

LQR با شرایط انتهایی ثابت،

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t)$$

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left(x^T(t)\,Q(t)\,x(t) + u^T(t)\,R(t)\,u(t)\right) dt$$

t_0 و $x(t_0)$ ، t_f و $x(t_f)$ معلوم.

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left[x^TQx + u^TRu\right] + p^T(t)\left(Ax + Bu\right)$$

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \Rightarrow Ax + Bu = \dot{x}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \Rightarrow -Qx - A^Tp = \dot{p}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0 \Rightarrow u = -R^{-1}B^Tp(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}$$

$p(t) = K(t)\, x(t)$

با توجه به performance Index (PI) واضح است که

$x(t_f) = 0$

چرا؟ $p(t_f)$: آزاد $\Rightarrow p(t_f) = K(t_f)\, x(t_f)$

چرا آزاد است؟

$K(t_f) = \infty$

تبدیل $x(t) = M(t)\, p(t)$ را استفاده می‌کنیم

$\dot{x}(t) = \dot{M}p + M\dot{p}$

با جایگذاری $\dot{x}$ و $\dot{p}$ از معادلات حالت داریم:

$$(AM + MA^T + MQM - BR^{-1}B^T - \dot{M})\, p(t) = 0$$

چون $p(t)$ آزاد است پس ضریب آن باید صفر باشد.

$$AM + MA^T + MQM - BR^{-1}B^T = \dot{M}$$

باید شرط مرزی M را بیابیم

1. $x(t_0) = 0$ و $x(t_f) = 0$ جواب بدیهی دارد

2. $x(t_0) \neq 0$ و $x(t_f) = 0$

$$x(t_f) = \underset{\text{صفر}}{} M(t_f)\ \underbrace{p(t_f)}_{\text{آزاد}} \longrightarrow$$ از آنجا $M(t_f)=0$ باشد.

3. $x(t_f) \neq 0$

$x(t_0) = 0$

$$u = -R^{-1}B^T M^{-1} x(t) = -F(t)\, x(t)$$

$$\underset{0}{x(t_0)} = M(t_0)\ \underbrace{p(t_0)}_{\text{آزاد}} \longrightarrow M(t_0) = 0$$ از آنجا

4. $x(t_f) \neq 0$ و $x(t_0) \neq 0$

از تبدیل $x(t) = M(t)\,p(t) + v(t)$ استفاده می‌کنیم.

با مشتق گرفتن از رابطه فوق و قرار دادن $\dot{p}$ و $\dot{x}$ و u داریم:

$$\left[\dot{M} - AM - MB^T - MQM + BR^{-1}B^T\right] p(t) + \left[\dot{v} - MQv - Av\right] = 0$$

A^T ؟

$p(t)$ آزاد است پس ضریب آن باید صفر شود.

$$\begin{cases} \dot{M} = AM + MA^T + MQM - BR^{-1}B^T \\ \dot{v} = MQv + Av \end{cases}$$

$$x(t_0) = M(t_0)\ \underbrace{p(t_0)}_{\text{آزاد}} + v(t_0) \Rightarrow \begin{cases} x(t_0) = v(t_0) \\ M(t_0) = 0 \end{cases}$$

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T M^{-1}\left(x(t) - v(t)\right)$$

حل معادلات دیفرانسیلی با مطلب

ode :

ordinary

جلسه سیزدهم 91,8,28

کنترل بهینه سیستم‌های کنترل گسسته

optimal control system

Naidu → برنامه‌های مطلب رو دارد

الف- بهینه‌سازی یک تابعی معیار بدون هزینه انتهایی

$$J=\sum_{k=k_0}^{k_f-1} V(x(k),\ x(k+1),\ k)$$

k_0 ، k_f و $x(k_0)$ مشخص می‌باشند. $x(k_f)$ مشخص و یا آزاد است.

$kT \triangleq k$ اگر J از روی گسسته‌سازی یک تابعی پیوسته بدست آمده باشد

T زمان نمونه برداری است.

فرض کنید که پاسخ بهینه $x^*(k)$ ، $x=k_0, k_0+1, \dots, k_f$ باشد.

تغییراتی را حول پاسخ بهینه به صورت زیر اعمال می‌کنیم

$$x(k)=x^*(k)+\delta x(k)$$

$$x(k+1)=x^*(k+1)+\delta x(k+1)$$

$$\Delta J=J-J^*=\sum_{k=k_0}^{k_f-1}\left\{V\left(x^*(k)+\delta x(k),\ \underbrace{x^*(k)+\delta x(k+1)}_{},\ k\right)\right.$$

$x^*(k+1)+\delta x(k+1), k$

$$\left.-V\left(x^*(k),\ x^*(k+1),\ k\right)\right\}$$

شرط لازم برای بهینگی $x^*(k)$ آن است که تغییرات مرتبه اول J روی آن برابر صفر است.

$$(*)\quad \delta J = \sum_{k=k_0}^{k_f-1} \left\{ \frac{\partial V(x^*(k), x^*(k+1), k)}{\partial x^*_k}\, \delta x(k) + \frac{\partial V(x^*(k), x^*(k+1), k)}{\partial x^*(k+1)}\, \delta x(k+1) \right\}$$

جمله دوم δJ را در نظر بگیرید

$$\sum_{k=k_0}^{k_f-1} \frac{\partial}{\partial x^*(k+1)} V(x^*(k), x^*(k+1), k)\, \delta x(k+1)$$

فرض کنید $j = k+1$

$$= \sum_{j=k_0+1}^{k_f} \frac{\partial}{\partial x^*(j)} V(x^*(j-1), x^*(j), j-1)\, \delta x(j)$$

$$= \sum_{j=k_0}^{k_f-1} \frac{\partial}{\partial x^*(j)} V(x^*(j-1), x^*(j), j-1)\, \delta x(j) + \frac{\partial}{\partial x^*(j)} V(x^*(j-1), x^*(j), j-1)\, \delta x(j) \Big|_{k_0}^{k_f}$$

$$(*)\quad \delta J = \sum_{k=k_0}^{k_f-1} \left\{ \frac{\partial V(x^*(k), x^*(k+1), k)}{\partial x^*(k)} + \frac{\partial V(x^*(k-1), x^*(k), k-1)}{\partial x^*(k)} \right\} \cdot \delta x(k) + \frac{\partial}{\partial x^*(k)} V(x^*(k-1), x^*(k), k-1)\, \delta x(k) \Big|_{k_0}^{k_f}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^*(k)} v(x^*(k), x^*(k+1), k) + \frac{\partial}{\partial x^*(k)} v(x^*(k-1), x^*(k), k-1) = 0$$

اولر - لاگرانژ

$$k = k_0, k_1, \dots, k_f$$

$$\frac{\partial}{\partial x^*(k)} v(x^*(k-1), x^*(k), k-1)\, \delta x(k) \Big|_{k_0}^{k_f} = 0$$

شرط انتهایی

- اگر $x(k_0)$ معلوم باشد $\delta x(k_0) = 0$
- اگر $x(k_f)$ معلوم باشد $\delta x(k_f) = 0$
- اگر $x(k_f)$ آزاد باشد $\delta x(k_f) =$ دلخواه

$\Longrightarrow$ شرط انتهایی $\frac{\partial v}{\partial x^*(k)}\Big|_{k_f} = 0$

ب.

بهینه سازی یک تابعی با هزینه نقطه انتهایی

$$J = S(x(k_f), k_f) + \sum_{k=k_0}^{k_f-1} v(x(k), x(k+1), k)$$

$$S(x^*(k_f) + \delta x(k_f), k_f) - S(x^*(k_f), k_f)$$

$$= \cancel{S(x^*(k_f), k_f)} + \frac{\partial S}{\partial x(k)}\Big|_{k_f} \delta x(k_f) - \cancel{S(x^*(k_f), k_f)}$$

فقط شرط انتهایی عوض می‌شود. $x \; \delta x_k$

$$\left(\frac{\partial v(k-1)}{\partial x^2(k)}\bigg|_{k_f} + \frac{\partial S}{\partial x^2(k)}\bigg|_{k_f}\right) = 0$$

مثال:

$$J = \sum_{k=0}^{10-1} v\left(x(k), x(k+1), k\right)$$

$x(0) = 2$

$x(10) = 5$

LQR گسسته

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k)$$

$$J = \frac{1}{2} x^T(k_f) H(k_f) x(k_f) + \frac{1}{2}\sum_{k=k_0}^{k_f-1}\left[x^T(k) Q(k) x(k) + u^T(k) R(k) u(k)\right]$$

$x(k_0)$ ، k_0 و k_f مشخص

$x(k_f)$ آزاد

$$J = \frac{1}{2} x^T(k_f) H(k_f) x(k_f) + \sum_{k=k_0}^{k_f-1}\left\{\frac{1}{2}\left[x^T Q x + u^T R u\right] + \underbrace{\lambda^T}_{p}(k+1)\left[A(k)x(k) + B(k)u(k) - x(k+1)\right]\right\}$$

[illegible]

[illegible]

$L(k)$

$$L\big(x(k), u(k), x(k+1), \lambda(k+1)\big) =$$

$$\tfrac{1}{2}\left[x^T Q x + u^T R u\right] + \lambda^T(k+1)\left[A x(k) + B u(k) - x(k+1)\right]$$

$$J_a = S\big(x(k_f), k_f\big) + \sum_{k=k_0}^{k_f-1} L\big(x(k), u(k), x(k+1), \lambda(k+1)\big)$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial L(k)}{\partial x(k)} + \dfrac{\partial L\big(x(k-1), u(k-1), x(k), \lambda(k)\big)}{\partial x(k)} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial L(k)}{\partial u(k)} + \dfrac{\partial L(k-1)}{\partial u(k)} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial L(k)}{\partial \lambda(k)} + \dfrac{\partial L(k-1)}{\partial \lambda(k)} = 0 \\[2ex]
\left(\dfrac{\partial S(x(k), k)}{\partial x(k)} + \dfrac{\partial L(k-1)}{\partial x(k)}\bigg|_{k_f}\right)\delta x(k_f) = 0
\end{array}\right.$$

شرط مرزی انتهایی

$$g_a = g + p^T(a - \dot{x})$$

[illegible]:

$$\ell = g + \lambda^T\big(a - x(k+1)\big)$$

$$\mathcal{H}\big(x(k), u(k), \lambda(k+1)\big) = \tfrac{1}{2}\left\{x^T Q x(k) + u^T R u\right\}$$

$$+\lambda^T(k+1)\{A(k)x(k)+B(k)u(k)\}$$

$$\dot p = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

$$\dot x = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u}$$

$$\begin{cases} \lambda(k) = \dfrac{\partial H(k)}{\partial x(k)} \\[2ex] x(k) = \dfrac{\partial H(k)}{\partial \lambda(k)} \Longrightarrow x(k+1) = \dfrac{\partial H(k)}{\partial \lambda(k+1)} \\[2ex] 0 = \dfrac{\partial H(k)}{\partial u(k)} \end{cases}$$

$$\left[\frac{\partial S}{\partial x(k)} - \lambda^T(k)\right]\delta x(k_f)\Big|_{k_f} = 0$$

شرط مرزی

$$\Rightarrow \begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \\ \lambda(k) = Q(k)x(k) + A^T(k)\lambda(k+1) \\ 0 = R(k)u(k) + B^T(k)\lambda(k+1) \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad u(k) = -R^{-1}(k)\, B^T(k)\, \lambda(k+1)$$

اگر x_{k_f} آزاد باشد:

$$H(k_f)\, x(k_f) = \lambda(k_f)$$

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)\left(-R^{-1}B^T\lambda(k+1)\right) \\ \lambda(k) = Q(k)x(k) + A^T(k)\,\lambda(k+1) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \lambda(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(k) & -BR^{-1}B^T(k) \\ Q(k) & A^T(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \lambda(k+1) \end{bmatrix}$$

تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$\lambda(k) = K(k)\, x(k)$$

$K(k)$ ماتریس متقارن و به نام ماتریس ریکاتی شناخته می‌شود.

$$\begin{cases} K(k) = A^T(k)\, K(k+1)\left[I + E(k)\, K(k+1)\right]^{-1} A(k) \\ K(k_f) = H(k_f) \end{cases}$$

D.R.E

difference

تفاضلی

$$E(k) = -B(k)\,R^{-1}(k)\,B^{T}(k)$$

$$u^{*}(k) = -R^{-1}B^{T}A^{T}\left[x(k) - Q(k)\right]x(k)$$
$$= -F(k)\,x(k)$$

$$J^{*} = \tfrac{1}{2}\,x^{T}(k_0)\,K(k_0)\,x(k_0)$$

حالت خاص :

$$J = \tfrac{1}{2}\sum_{k=k_0}^{\infty}\left\{x^{T}(k)\,Q(k)\,x(k) + u^{T}(k)\,R(k)\,u(k)\right\}$$

$K(k+1) = K(k)$ که $\underbrace{DRE}_{\text{ریکاتی گسسته}}$ به $\underbrace{ARE}_{\text{ریکاتی جبری}}$ تبدیل می‌شود بابر

جلسه چهاردهم 91,8,29

اصل حداقل سازی پونتریاگین:

$\dot{x} = a(x, u, t)$

$J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x, u, t)\, dt$

$x \in R^n$

$u = R^m$ بدون محدودیت

معلوم $x(t_0)$, t_0 , t_f معلوم

$x(t_f)$ معلوم ما از شرایط مرزی بدست آوردیم

$\mathcal{H} = g(x, u, t) + p^T(t)\, a(x(t), u, t)$

$$\begin{cases} \dot{x}^* = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \\ \dot{p}^* = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \\ 0 = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x} - p\right)_{t_f} \delta x_f + \left[\frac{\partial h}{\partial t} + \mathcal{H}\right]_{t_f} \delta t_f = 0$$

— محدودیت های ورودی

$\dot{x} = a(x, u, t)$

$J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x, u, t)\, dt$

$x \in R^n$ بدون محدودیت

$u \in U$ ✓ ورودی با محدودیت

t_0 و $x(t_0)$ مشخص

t_f و $x(t_f)$ آزاد

$$\delta J_a = \left[\frac{\partial h}{\partial x} - P\right]_{t_f} \delta x_f + \left[\frac{\partial h}{\partial t} + \mathcal{H}\right]_{t_f} \delta t_f$$

$$+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\dot{x} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}\right] \delta x + \left[\dot{P} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\right] \delta p + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \delta u \right\} dt$$

?

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\frac{\partial h}{\partial x} - P\right]_{t_f} \delta x_f + \left[\frac{\partial h}{\partial t} + \mathcal{H}\right]_{t_f} \delta t_f = 0 \\ \dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \\ \dot{P} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \delta J_a = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \delta u\right] dt \geq 0$$

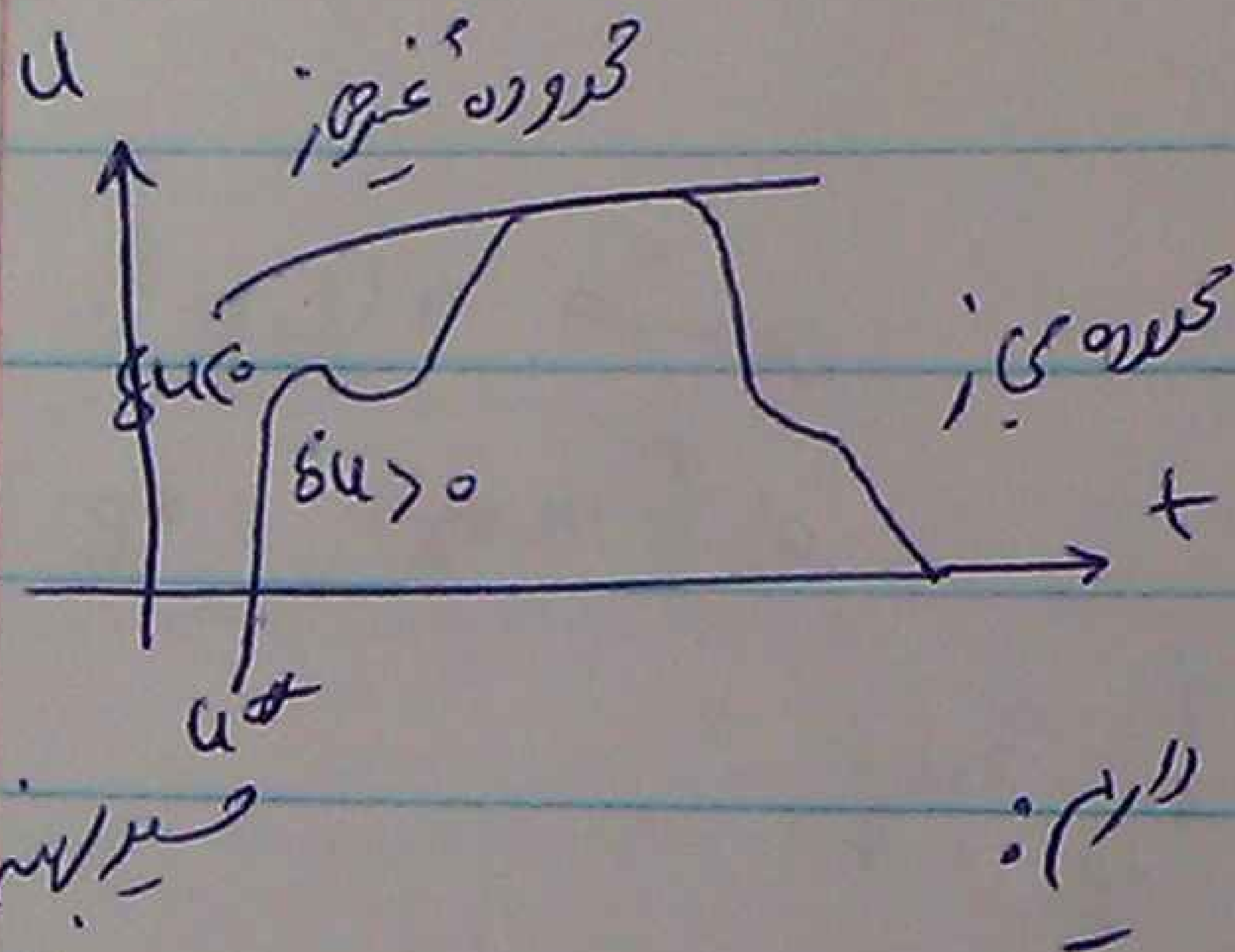
اگر محدودیت نداشته باشیم مساوی صفر و اگر محدودیت داشته باشیم باید مثبت باشد منفی نمی‌تواند باشد

چون J باید در مسیر بهینه حداقلش باشد

دو حالت پیش می آید:

الف. اگر ورودی در داخل ناحیه محدودیت باشد آنگاه δu می تواند مقادیر مثبت و منفی را اختیار کند در اینصورت

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}=0$$



ب. در ورودی مرزی محدودیت قرار بگیرد. در چنین حالتی داریم:

$$\int_{t_0}^{t_f}\left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}\,\delta u\right]dt \geq 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}\delta u \cong \mathcal{H}(x^*, u^*+\delta u, t)-\mathcal{H}(x^*, u^*, t)\geq 0$$

$$\mathcal{H}(x^*, \underbrace{u^*+\delta u}_{u}, t)\geq \mathcal{H}(x^*, u^*, t)$$

هامیلتونین در x^* و u^* کمینه است.

بنابراین می توان دو حالت الف و ب را با هم تلفیق نمود و نوشت:

$$\begin{cases}\dot{x}^*=\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}=a(x^*, u^*, t)\\[2ex] \dot{p}^*(t)=-\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\end{cases}$$

$$\mathcal{H}(x^*, u, t) \geq \mathcal{H}(x^*, u^*, t)$$

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x} - p\right]_{t_f} \delta x_f + \left[\frac{\partial h}{\partial t} + \mathcal{H}\right]_{t_f} \delta t_f = 0$$

شرط مرزی

مثال ۲

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \end{cases}$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2}\left[x_1^2 + u^2\right] dt$$

t_f مشخص و

$x(t_f)$ آزاد

$$|u(t)| \leq u_{max}$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left[x_1^2 + u^2\right] + p_1 x_2 + p_2(-x_2 + u)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1^* = x_2^* \\ \dot{x}_2^* = -x_2^* + u^* \\ \dot{p}_1^* = -x_1^* \\ \dot{p}_2^* = -p_1^* + p_2^* \end{cases}$$

بدون محدودیت $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0 \longrightarrow u^* + p_2^* = 0 \longrightarrow u^* = -p_2^*$

درصورتی است که u به اشباع نرسیده.

$$\mathcal{H}(x^*, u, t) \geq \mathcal{H}(x^*, u^*, t)$$

$$\tfrac{1}{2}[x_1^{*2} + u^2] + P_1^* x_2^* - P_2^* x_2^* + P_2^* u \geq \tfrac{1}{2}[x_1^{*2} + u^{*2}] + P_1^* x_2^* - P_2^* x_2^* + P_2^* u^*$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{2}u^2 + P_2^* u \geq \tfrac{1}{2}u^{*2} + P_2^* u^*$$

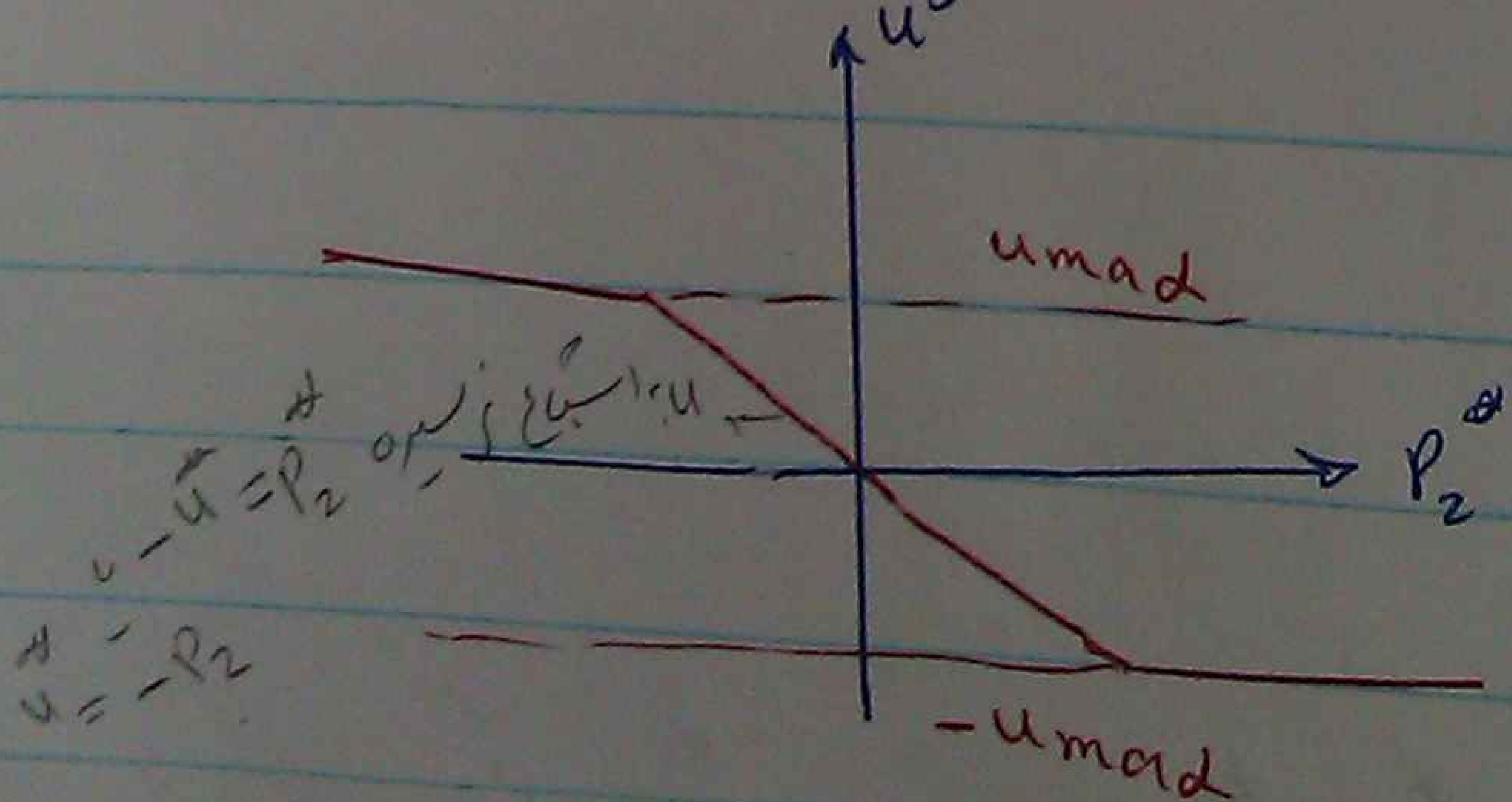
$$u^* = \begin{cases} u_{max} & ; \quad P_2^* \leq -u_{max} \\ -P_2^* & ; \quad -u_{max} < P_2^* < u_{max} \\ -u_{max} & ; \quad u_{max} \leq P_2^* \end{cases}$$

برای مواقعی که کنترل نیز اشباع شده است.

راه حل:

$$\tfrac{1}{2}u^2 + P_2^* u \geq \tfrac{1}{2}u_{max}^2 + \underbrace{P_2^*}_{-u_{max}} u_{max}$$

$$\tfrac{1}{2}u^2 - u_{max} u \geq -\tfrac{1}{2}u_{max}^2$$



پس برای حلش با u_{max} برابر بگیرد.

اگر وضعیت (حالت) دارای محدودیت بشود

$$f_{l\times 1}(x(t), t) \geq 0 \qquad l<m$$

(l تا متغیر state داریم)

$l<m$ تعداد قید کمتر از ورودی باشد.

برای حل چنین کنترل بهینه، متغیر حالت اضافی به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$\dot{x}_{n+1}(t) \triangleq [f_1(x,t)]^2\,\theta[-f_1(x,t)] + [f_2(x,t)]^2\,\theta[-f_2(x,t)]$$

$$+ \dots + [f_l(x,t)]^2\,\theta[-f_l(x,t)]$$

$$\theta(-f_i) = \begin{cases} 0 & f_i \geq 0 \\ 1 & f_i < 0 \end{cases} \qquad i=1,2,\dots,l$$

تابع هویساید

توجه: 1. $\dot{x}_{n+1}(t) \geq 0$

2. اگر همه قیدها برقرار باشند $\dot{x}_{n+1}(t) = 0 \quad \forall t$

$$J(u) = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x,u,t)\,dt$$

هدف کمینه کردن J با توجه به قیود زیر است.

$$\dot{x}(t) = a(x, u, t)$$

$$f_i(x(t), t) \geq 0 \qquad i = 1, 2, \dots l$$

$$u_{min} < u < u_{max}$$

ابتدا هامیلتونین را تشکیل می دهیم:

$$\mathcal{H}(x, u, t) = g(x, u, t) + p_1(t)\, a_1(x, u, t) + p_2(t)\, a_2(x, u, t) + \dots + p_n(t)\, a_n(x, u, t) + p_{n+1}(t)\left[f_1^2\, \theta(-f_1) + f_2^2\, \theta(-f_2) + \dots + f_l^2\, \theta(-f_l)\right]$$

$$\mathcal{H} = g(x, u, t) + p^T(t)\, a(x, u, t)$$

$$a_{n+1}(x, u, t) \triangleq f_1^2\, \theta(-f_1) + \dots + f_l^2\, \theta(-f_l)$$

شرایط لازم:

$$\begin{cases} \dot{x}_1^* = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} = a_1(x^*, u^*, t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n+1}^* = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{n+1}} = a_{n+1}(x^*, u^*, t) \\ \dot{p}_1^* = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1} \\ \vdots \end{cases}$$

$$\dot{p}^*_{n+1} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_{n+1}} = 0$$

$\mathcal{H}$ به طور صریح به x_{n+1} وابسته نیست

$$\mathcal{H}(x^*, u^*, p^*, t) \le \mathcal{H}(x^*, u, p^*, t)$$

فرض: $x_{n+1}(t_0) = 0$

$$x_{n+1}(t) = \int_{t_0}^{t} \dot{x}_{n+1}(t)\,dt + x_{n+1}(t_0)$$

اگر همه قیود برای تمام لحظات برقرار شوند آنگاه $x_{n+1}(t) = 0 \quad \forall t$

رویه صفحه قبل $x^*_{n+1}(t_f) = 0$

t_0 و $x(t_0)$ یا $x_{n+1}(t_0)$ و $x_{n+1}(t_f)$ مشخص‌اند دقیق.

$x_1(t_0)$ ـــــ $x_n(t_0)$

درصورت نامعین بودن (آزاد) از شرط مرزی بدست می‌آیند.

مثال:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + u(t)$$

$x(t_0)$ و t_0 و t_f مشخص

$x(t_f)$ آزاد

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2}\left[x_1^2 + u^2\right] dt$$

$$-1 \leq u(t) \leq 1 \qquad \forall t \in [t_0, t_f]$$

$$-2 \leq x_2(t) \leq 2 \qquad \forall t \in [t_0, t_f]$$

$$f_1 = x_2(t) + 2 \geq 0$$

$$f_2 = 2 - x_2(t) \geq 0$$

$$\mathcal{H} = \tfrac{1}{2} x_1^2 + \tfrac{1}{2} u^2 + p_1 x_2 - p_2 x_2 + p_2 u + p_3\left[(x_2+2)^2 \theta(-x_2-2) + (2-x_2)^2 \theta(-2+x_2) \right]$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= f_1^2 \theta(-f_1) + f_2^2 \theta(-f_2) \\ &= (x_2+2)^2 \theta(-x_2-2) + (2-x_2)^2 \theta(-2+x_2) \\ &= a_3(x, u, t) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dot{x}^*_1(t) = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} = x^*_2 \\ \dot{x}^*_2(t) = -x^*_2 + u^*(t) \\ \dot{x}^*_3(t) = (x^*_2+2)^2 \theta(-x^*_2-2) + (2-x_2)^2 \theta(-2+x_2) \\ \dot{p}^*_1 = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -x^*_1 \end{cases}$$

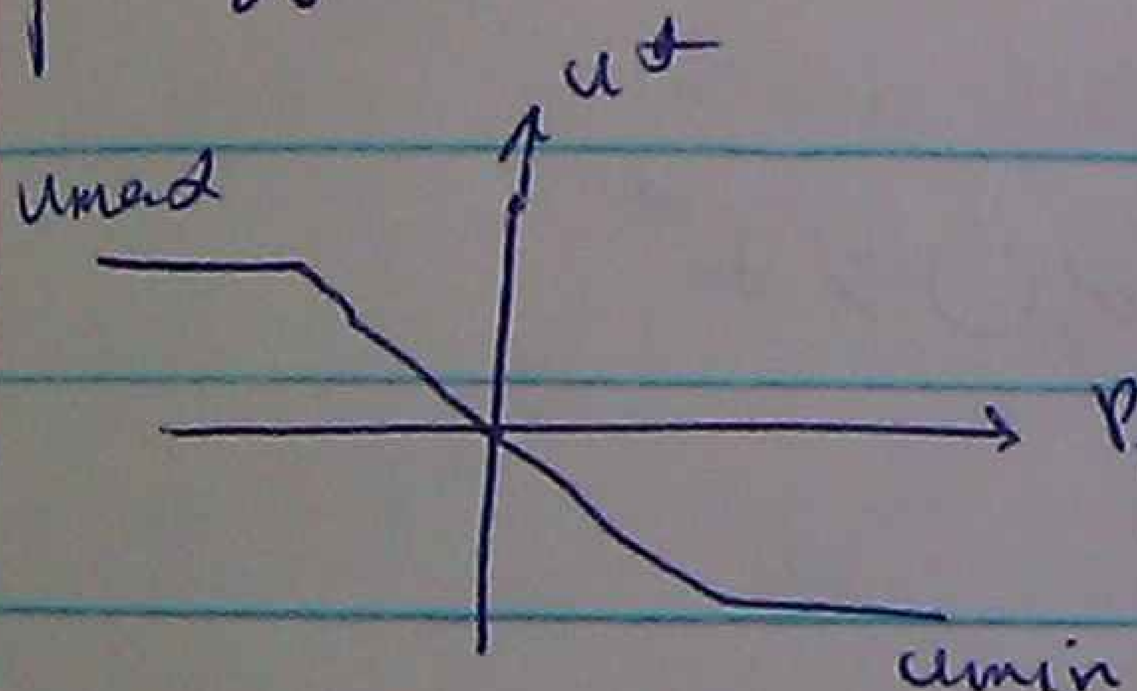
$$\dot{p}_2^* = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2} = -p_1^* + p_2^* - 2p_3^*\left[x_2^* + 2\right] \cdot \theta(-x_2^* - 2)$$

$$+ 2p_3^*(2 - x_2^*)\,\theta(-2 + x_2^*)$$

$$\dot{p}_3^* = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow p_3^* = \text{ثابت}$$

$$x_2(t_0) = x_{20} \qquad x_1(t_0) = x_{10}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0 \Rightarrow u^* + p_2 = 0 \longrightarrow u^* = -p_2$$



$\Rightarrow$ همان شکل قبل است اما مقدار p_2 و u^* عوض شده که کنترل بهینه میدهد

جلسه پانزدهم 91,9,12

حداقل زمان

هدف انتقال سیستم از یک وضعیت اولیه (اختیاری) به یک مجموعه هدف $S(t)$ (می تواند متغیر با زمان باشد (یا متحرک)) در کمترین زمان می باشد.

$$\dot{x} = a(x, u, t)$$

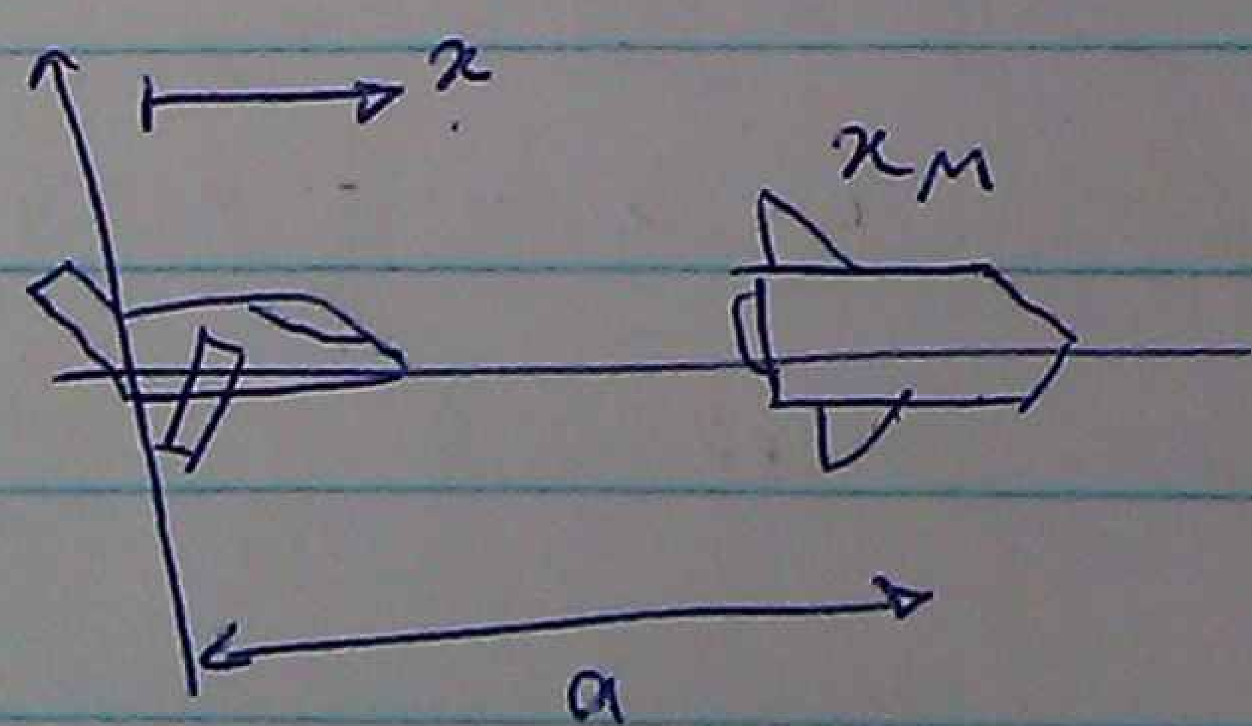
$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} 1 \, dt = t_f - t_0$$

t_f فعلاً نامعین است.

$$|u_i| \leq 1 \qquad i = 1, 2, \dots, m$$

$$t \in [t_0, t^*]$$

t^* زمان بهینه است (حداقل زمان ممکن است.)



$$\begin{cases} x_M(t) = a + 0.1t^3 \\ y_M(t) = 0 \end{cases}$$

$$\ddot{x}(t) = u(t) \qquad |u(t)| < 1$$

شتاب هواپیما — ورودی

$u(t)$ شتابی که به هواپیما وارد می شود

$\ddot{x}(t) = 1$ بیشترین شتاب باشد تا در کمترین زمان به [illegible] برسد

$\Rightarrow \dot{x}(t) = t + \underbrace{c_1}_{\dot{x}(0)}$

$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}t^2 + \underbrace{c_1}_{c_1 = \dot{x}(0) = 0 \text{ (از سکون)}} t + \underbrace{x(0)}_{x(0)=0 \text{ (از مبدأ)}}$

$= \frac{1}{2}t^2$

$x(t^*) = x_r(t^*)$

$\frac{1}{2}t^{*2} = a + 0.1 t^{*3}$

$0.1 t^{*3} - \frac{1}{2} t^{*2} + a = 0$

شرط برخورد : $a \leq 1.85$

if $a = 1.85 \Rightarrow t^* = 3.33$

جوابی که برای $a > 1.85$ بدست می‌آوریم t را منفی می‌دهد که قابل قبول نیست.

وقتی کمترین زمان مطرح است باید u بیشترین مقدار را داشته باشد پس در این حالت باید u قید داشته باشد تا محدود شود.

مشخصه‌های مهم مسائل حداقل زمان :

1. برای مقادیر خاصی از شرایط اولیه کنترل بهینه زمانی وجود ندارد.

2. اگر کنترل بهینه‌ای وجود داشته باشد، همواره به صورت عملکرد حداکثر تلاش خواهد بود (Maximum effort).

Ex. $\dot{x} = x + u$

$|u| \leq 1$

می خواهیم با حداقل زمان، به مبدأ برسونیم.

$$J = \int_0^{t_f} dt \qquad x(t_f) = 0$$

برای حداقل زمان، حداکثر تلاش را به کار می بریم.

$$x(t) = ke^{t} - 1 \qquad \text{فرض } u = 1$$

$$x(t) = ke^{t} + 1 \qquad u = -1$$

فرض: $x(0) = 0.2$

برای $x(0)$:

$u = 1;\ 0.2 = k - 1 \longrightarrow k = 1.2$

$u = -1;\ 0.2 = k + 1 \longrightarrow k = -0.8$

برای $x(t_f)$:

$u = 1;\ 0 = 1.2e^{t_f} - 1 \Longrightarrow t_f = \ln\frac{1}{1.2} < 0$ غیرقابل قبول

$u = -1;\ 0 = -0.8e^{t_f} + 1 \Longrightarrow t_f = 0.223$

فرض: $x(0) = 2$

$2 = k - 1 \longrightarrow k = 3$
$2 = k + 1 \longrightarrow k = 1$

$\longrightarrow \begin{cases} 0 = 3e^{t_f} - 1 \to t_f < 0 & \text{غ ق ق} \\ 0 = e^{t_f} + 1 \to & \text{جواب ندارد} \end{cases}$

حتی ما انرژی هم می خواهد کران u را طوری بدست آورد که بتواند $x(0)=2$ را بتواند به مبدأ برگرداند. یعنی چقدر تلاش نیاز دارد

sup را بدست آورد کوچکترین کران بالای $u = ?$

مجموعه وضعیت های قابل دسترسی:

اگر سیستم با وضعیت x_0 در معرض ورودی های قابل قبول قرار گیرد مجموعه تمام مقادیر $x(t)$ را مجموعه وضعیت های قابل دسترسی گویند $(R(t))$

کنترل بهینه زمانی سیستم های affine:

حل مسئله حداقل زمان در حالت کلی امکان پذیر نیست. در اینجا یک دسته خاص از سیستم ها که نسبت به u افاین می باشند بررسی می شود

$$\dot{x} = a(x(t), t) + B(x(t), t)\, u(t)$$

$$M_i^- < u_i(t) < M_i^+ \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$t \in [t_0, t_f]$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} 1 \, dt$$

$$H(x,u,p,t) = 1 + p^T(t)\,[a(x,t) + B(x,t)\,u(t)]$$

بنابر اصل حداقل یابی پونتریاگین داریم :

$$\cancel{1} + p^{*T}(t)\,\cancel{a(x^*,t)} + p^{*T}(t)\,B(x^*,t)\,u^*(t) \le \cancel{1} + p^{*T}\cancel{a(x^*,t)} + p^{*T}B(x^*,t)\,u(t)$$

$$\Rightarrow p^{*T}B(x^*,t)\,u^*(t) \le p^{*T}B(x^*,t)\,u(t)$$

$$B(x^*,t) = [b_1(x^*,t), b_2(x^*,t), \dots, b_m(x^*,t)]$$

$$p^{*T}(t)\,B(x^*,t)\,u^*(t) = \sum_{i=1}^{m} p^{*T} b_i(x^*,t)\,u_i^*(t)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} p^{*T} b_i^*\,u_i^* \le \sum_{i=1}^{m} p^{*T} b_i^*\,u_i$$

با فرض مستقل بودن مولفه‌های کنترل باید هر کدام از توابع زیر را کمینه کنیم:

$$\underbrace{p^{*T}(t)\,b_i(x^*,t)}\,u_i(t)$$

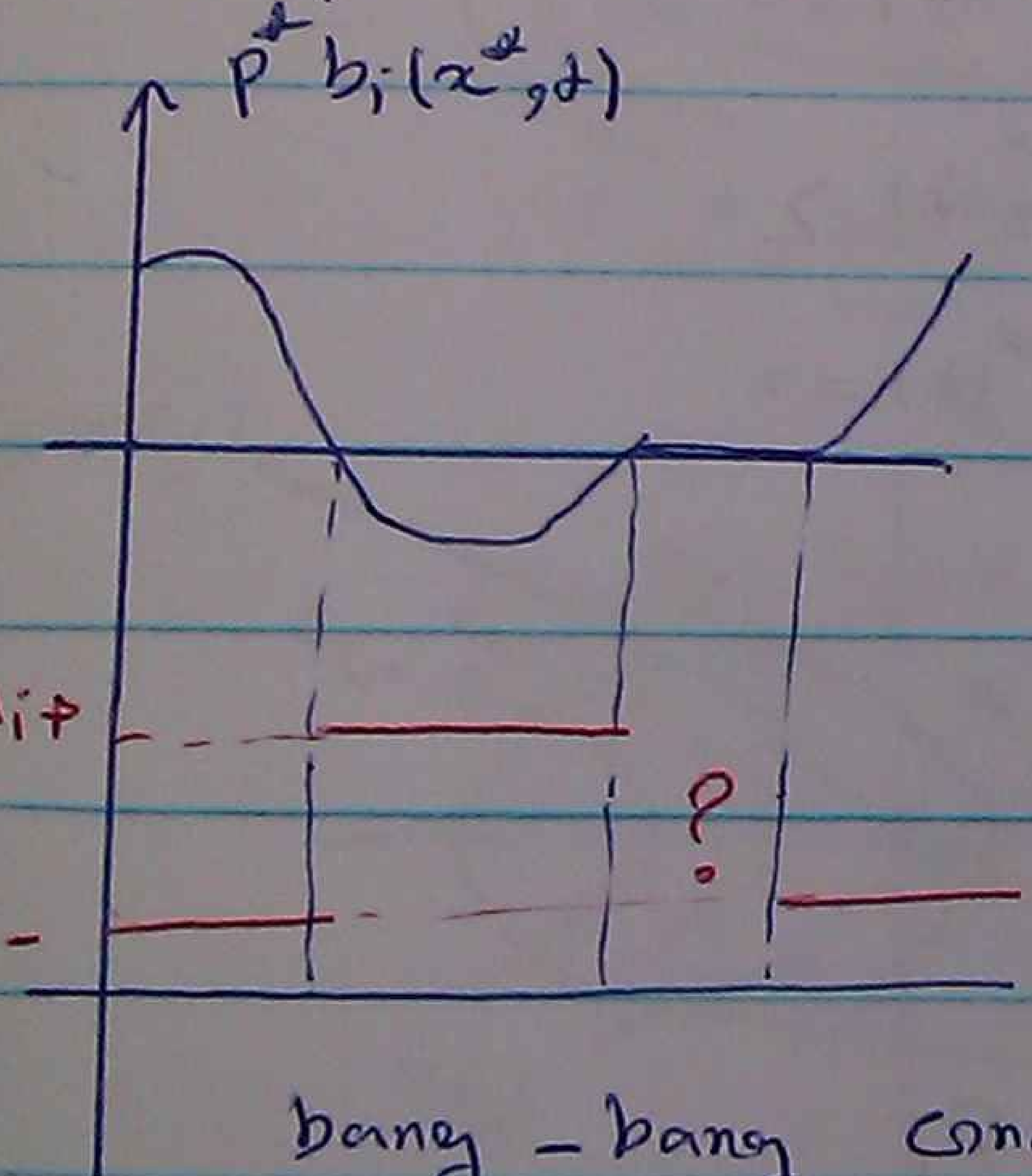
ضریب $+$ $\rightsquigarrow$ u_i کمترین مقدار

ضریب $-$ $\rightsquigarrow$ u_i بیشترین مقدار

$$\Rightarrow u_i^*(t) = \begin{cases} M_{i+} \; ; & p^{*T}(t)\, b_i(x^*, t) < 0 \\ M_{i-} \; ; & p^{*T}(t)\, b_i(x^*, t) > 0 \\ \text{نامشخص} \; ; & p^{*T}(t)\, b_i(x^*, t) = 0 \end{cases}$$

$i = 1, 2, \dots, m$

→ این حالت را که در آن u را نمی‌توان بدست آورد را حالت Singular condition گویند.



جهت تغییرات ناگهانی کنترل

این حالت در کنترل زمان‌ها را bang - bang control گویند.

Ex.

A, B ثابت

$$\dot{x} = Ax + B\,u(t)$$

سیستم خطی و غیر متغیر با زمان: از مرتبه n با m کنترل

$$|u_i(t)| \le 1 \qquad i = 1, 2, \dots, m$$

محدودیت روی کنترل

از Naidu راحت‌تر خوانند، و ص 301 و ص 302 — از t.o.c ص 295

tim optimal control

$$\ddot{x}(t) = u(t)$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ \& \ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_2 = u(t)$$

$$H = 1 + P_1 x_2 + P_2 u(t)$$

$$H^* \leqslant H \implies P_2^*(t)\, u^*(t) \leqslant P_2^*(t)\, u(t)$$

$$\implies u^*(t) = \begin{cases} 1 & P_2^*(t) < 0 \\ -1 & P_2^*(t) > 0 \\ \text{نامشخص} & P_2^*(t) = 0 \end{cases}$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial P} = Ax + Bu$$

$$\dot{P}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \longrightarrow P_1^*(t) = C_1$$

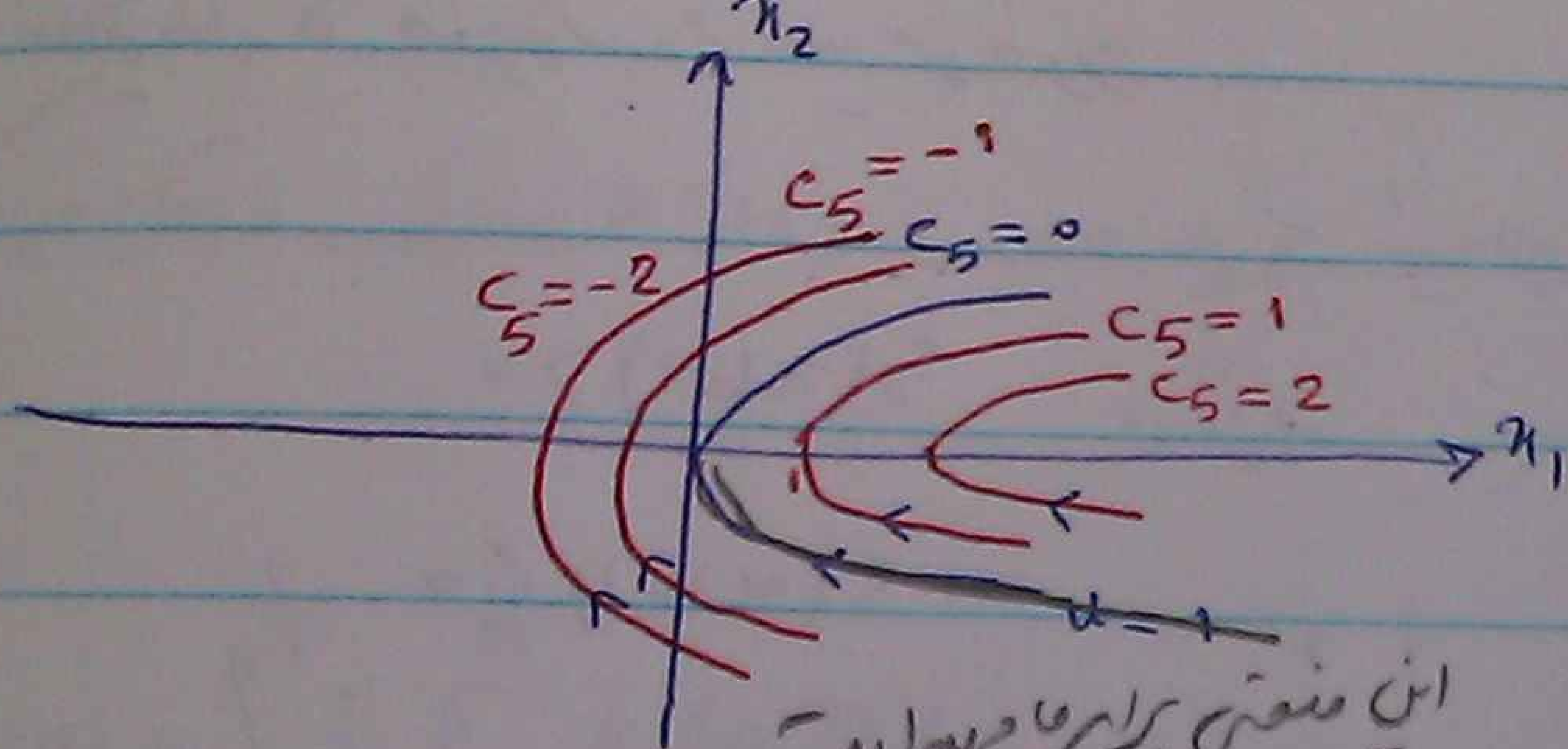
$$\dot{P}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -P_1^* \longrightarrow P_2^*(t) = -C_1 t + C_2$$

$$u = \pm 1 \implies$$

$$\begin{cases} x_2(t) = \pm t + C_3 \\ x_1(t) = \pm \tfrac{1}{2} t^2 + C_3 t + C_4 \end{cases}$$

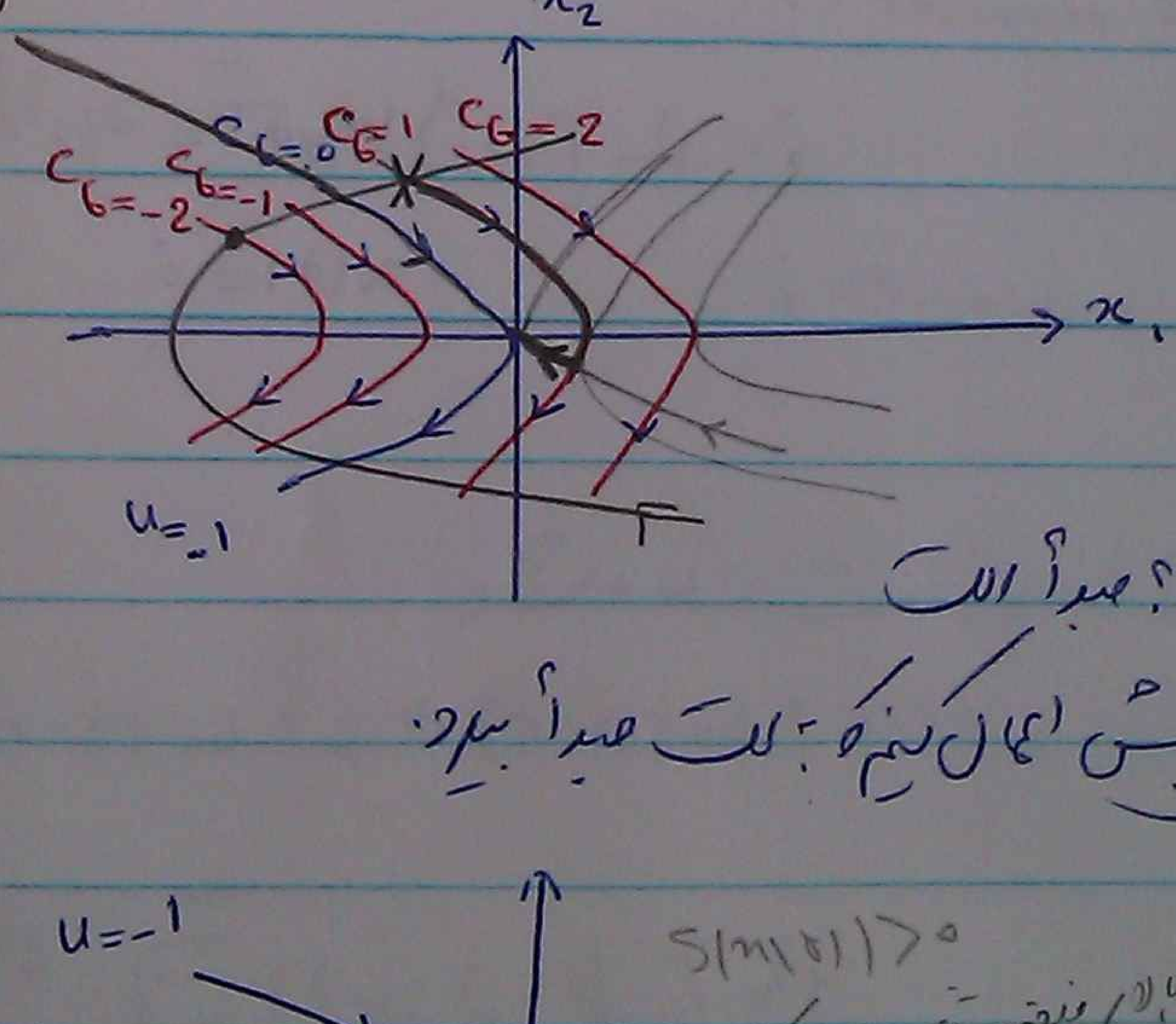
$u = +1 \longrightarrow x_1(t) = \frac{1}{2} x_2^2(t) + c_5$

$u = -1 \longrightarrow x_1(t) = -\frac{1}{2} x_2^2(t) + c_6$



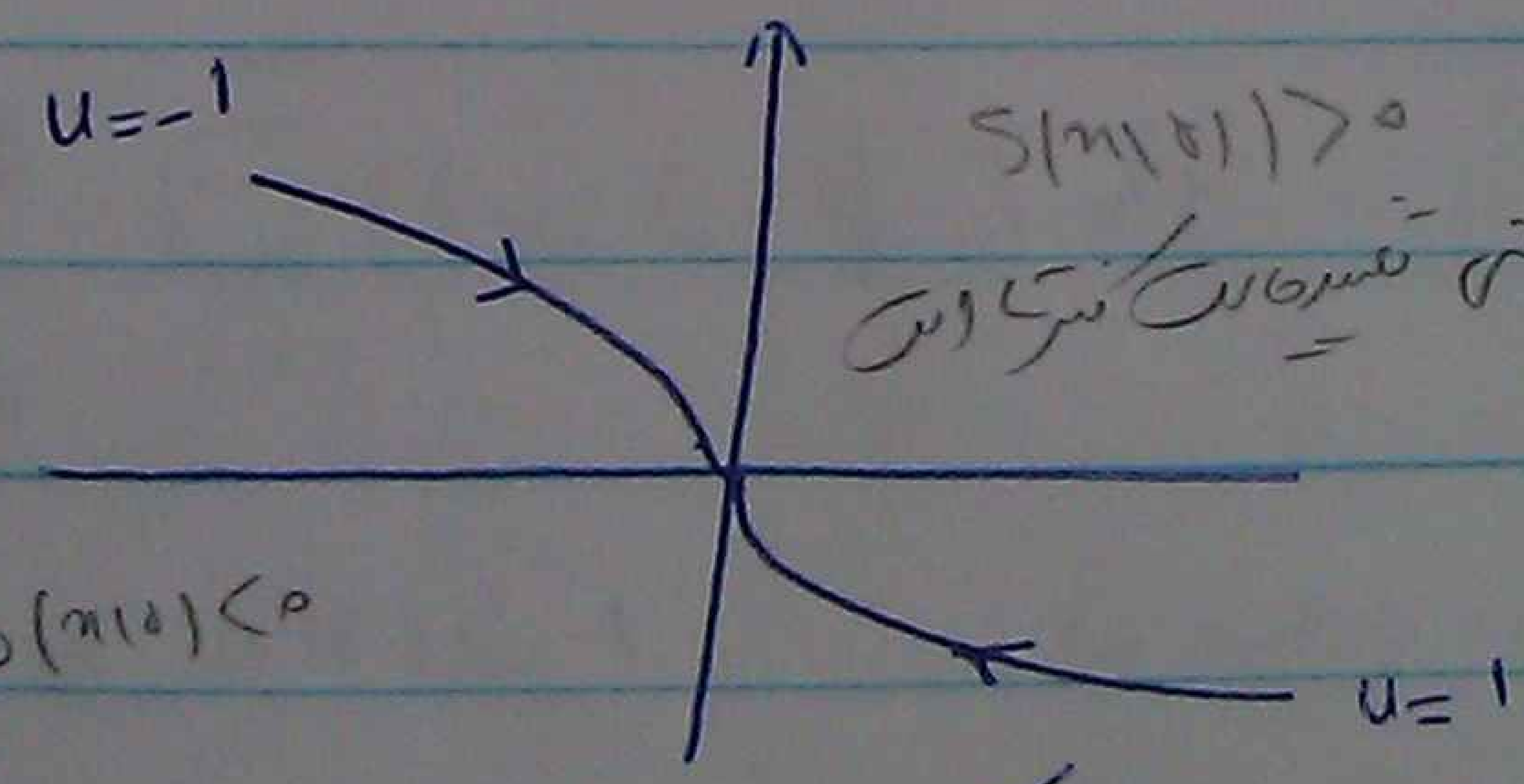
این منحنی برای ما مهم است.

این منحنی برای ما مهم است.



هدف ما رسیدن به مبدأ است

یعنی باید طوری سوئیچ اعمال کنیم که به سمت مبدأ برود.



$S(x(t)) > 0$

$x(t)$ بالای منحنی تغییرحالت مثبت است

$S(x(t)) < 0$ نشان می‌دهد $x(t)$ پایین منحنی است.

منحنی سوئیچینگ.

به اندازه $n-1$ تا سوئیچ زدن داریم

$$C_5 = C_6 = 0 \Longrightarrow x_1(t) = -\tfrac{1}{2}\, x_2(t)\, |x_2(t)|$$

$$S(x(t)) = x_1(t) + \tfrac{1}{2}\, x_2(t)\, |x_2(t)|$$

تابع کلید زنی

جایی که S صفر می‌شود کلید می‌خورد.

$$u^*(t) = \begin{cases} -1 & ; \quad S(x(t)) > 0 \\ +1 & ; \quad S(x(t)) < 0 \\ -1 & ; \quad S(x,t) = 0 \;,\; x_2(t) > 0 \\ +1 & ; \quad S(x,t) = 0 \;,\; x_2(t) < 0 \\ 0 & ; \quad x(t) = 0 \end{cases}$$

جلسه 16. 91,9,13

Minimum control effort

حداقل نیروی کنترل

$$\dot{x} = a(x,u,t)$$

$$M_i^- \leq u_i < M_i^+$$

هدف: انتقال سیستم از x_0 به یک مجموعه هدف $S(t)$ با مصرف حداقل نیروی کنترل

دو معیار معمول برای این منظور تعریف می‌شود.

$$J_1(u) = \int_{t_0}^{t_f} \left[\sum_{i=1}^{m} \beta_i |u_i| \right] dt$$

حداقل سوخت

Minimum fuel problem

$$J_2(u) = \int_{t_0}^{t_f} \left[\sum_{i=1}^{m} r_i \, u_i^2(t) \right] dt$$

حداقل انرژی

Minimum energy problem

مسائل حداقل سوخت:

فرض: معادلات افاین نسبت به u باشد

$$\dot{x} = a(x(t), t) + B(x(t), t)\, u(t)$$

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{m} \left[|u_i(t)| \right] dt$$

$$-1 \leq u_i(t) \leq 1 \qquad i = 1, 2, \dots, m$$

$$t \in [t_0, t_f]$$

حل $H(x,p,u,t) = \sum_{i=1}^{m} |u_i| + p^T a + p^T B\, u(t)$

حداقل یابی پونتریاگین

$$\sum |u_i^*| + \cancel{p^{*T} a^*} + p^{*T} B^* u^* \le \sum_{i=1}^{m} |u_i| + \cancel{p^{*T} a^*} + p^{*T} B^* u$$

$$B(x,t) = [\,b_1(x,t)\,;\, b_2(x,t)\,;\, \dots\,;\, b_m(x,t)\,]$$

با فرض استقلال ورودی‌ها داریم:

$$|u_i^*| + p^{*T} b_i u_i^* \le |u_i| + p^{*T} b_i u_i$$

$$|u_i| \triangleq \begin{cases} u_i & u_i \ge 0 \\ -u_i & u_i < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |u_i| + p^{*T} b_i u_i = \begin{cases} (1 + p^{*T} b_i)\, u_i \xrightarrow{} u_i = 0 \quad ① & u_i \ge 0 \\ (-1 + p^{*T} b_i)\, u_i \xrightarrow{} u_i = -1 \quad ② & u_i \le 0 \end{cases}$$

تا حاصل حداقل شود

اگر $p^{*T} b_i > 1$ باشد مقدار حداقل ①: ازای $u=0$ بدست می‌آید که

برای انحرافات و مقدار حداقل ②: ازای $u=-1$ بدست می‌آید. که کمتر از مقدار

صفر است پس $\boxed{u_i^* = -1}$

اگر $0 < p^{*T} b_i < 1 \Rightarrow \boxed{u_i^* = 0}$

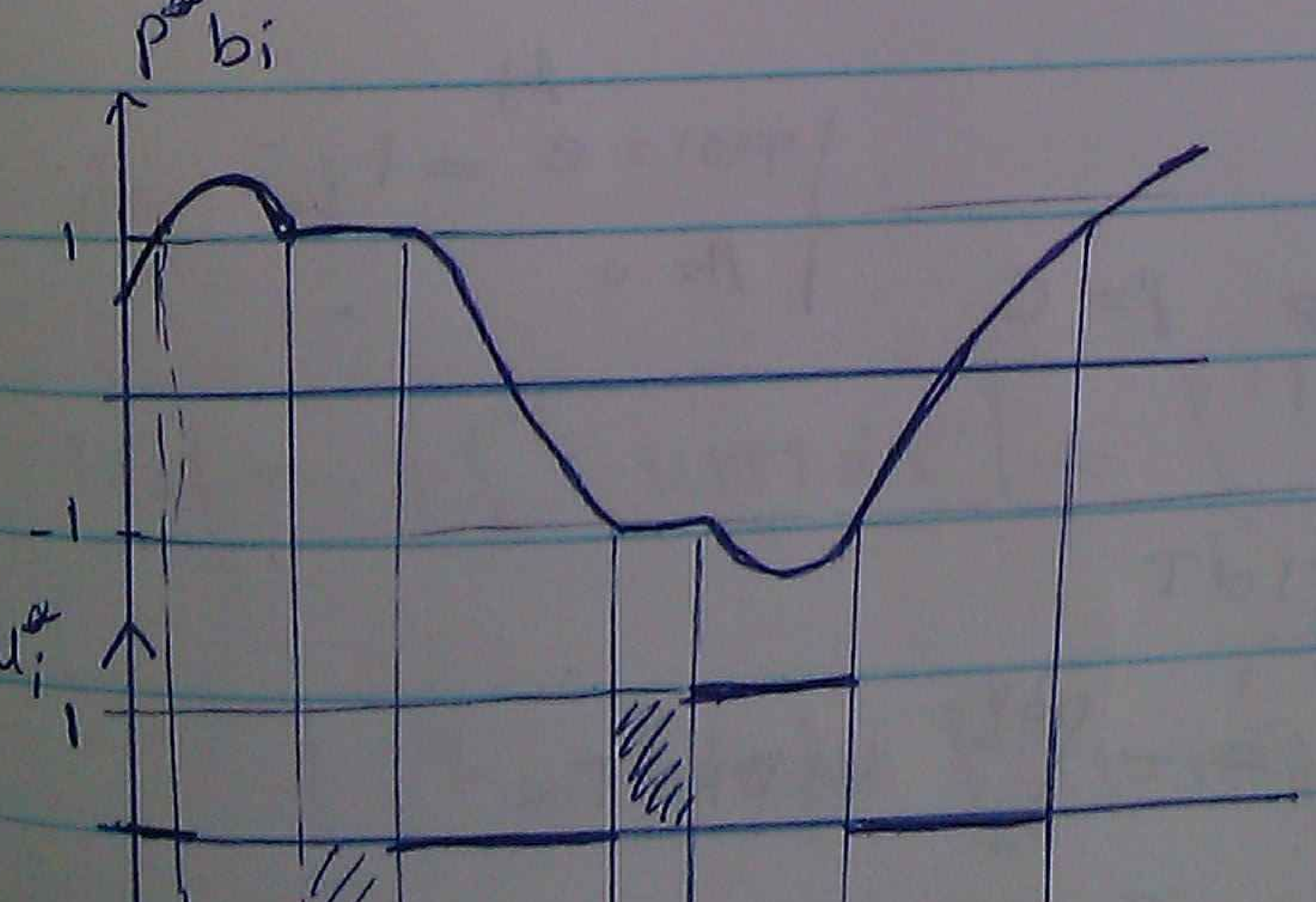
اگر $-1 < p^{*T} b_i < 0$ باشد $\Longleftarrow$ $u_i^* = 0$

اگر $p^{*T} b_i < -1$ $\Longleftarrow$ $u_i = 1$

اگر $p^{*T} b_i = 1$ $\Longleftarrow$ u_i^* نامعین غیرمثبت

اگر $p^{*T} b_i = -1$ $\Longleftarrow$ u_i^* نامعین غیرمنفی

$$
u_i^* = \begin{cases} +1 & p^{*T} b_i < -1 \\ 0 & -1 < p^{*T} b_i < 1 \\ -1 & 1 < p^{*T} b_i \\ \leq 0 & p^{*T} b_i = 1 \\ \geq 0 & p^{*T} b_i = -1 \end{cases}
$$



bang-off-bang control

Ex. سیستم $\dot{x}(t) = u(t)$ از x_0 به مبدأ با کمترین سوخت منتقل شود.

$$|u(t)| < 1$$

$$J(u) = \int_0^{t_f} |u(t)|\, dt$$

$$B = 1$$

$$\mathcal{H} = |u(t)| + p^T u(t)$$

$$|u^*(t)| + p^T u^*(t) \le |u(t)| + p^T u(t)$$

$$|u^*(t)| + p^T u^*(t) = \begin{cases} (1+p)u & u(t) \geq 0 \\ (-1+p)u & u(t) \leq 0 \end{cases}$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = u(t)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \Longrightarrow p = c \qquad \begin{cases} \Phi(t) = e^{At} = 1 \\ A = 0 \end{cases}$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t u(\tau)\, d\tau$$

$$x(t_f) = 0 \Longrightarrow x_0 = -\int_0^{t_f} u(\tau)\, d\tau$$

چون $p^T b_1$ در این مسئله برابر c است و عبارت آن ثابت است پس u^*
نیز مقدار ثابتی دارد.

$$\Rightarrow x_0 = -u\, t_f$$

$$u_i^{*} = \begin{cases} +1 & x_0 < 0 \\ 0 & x_0 = 0 \\ -1 & x_0 > 0 \end{cases}$$

ما وقتی کنترل بهینه را مطرح می کنیم که آزادی عمل داشته باشیم مثلاً اگر تعداد قیود بیشتر شوند

تغییر کند یا بشود جواب ندارد.

$$\begin{matrix} x_0 = 2 \\ t_f = 5 \end{matrix} \longrightarrow u = -0.4 \quad \rightsquigarrow \quad u = \begin{cases} -1 & 0 \le t \le 2 \\ 0 & 2 < t < 5 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} x_0 = 5 \\ t_f = 2 \end{matrix} \longrightarrow u = -2.5$$ غیرقابل قبول

$$J = |x_0|$$

از دفتر طاهره ؟

$$|x_0| = \left| \int_0^{t_f} u(\tau)\, d\tau \right| \le \int_0^{t_f} |u(\tau)|\, d\tau = J$$

چون $u(t) = u$ است داریم ،

$$\left| \int_0^{t_f} u(\tau)\, d\tau \right| = \int_0^{t_f} |u(\tau)|\, d\tau$$

Ex.

$$\dot{x} = -ax + u(t)$$

$$a > 0$$

$$|u(t)| \le 1$$

$$J(u) = \int_0^{t_f} |u(t)|\, dt$$

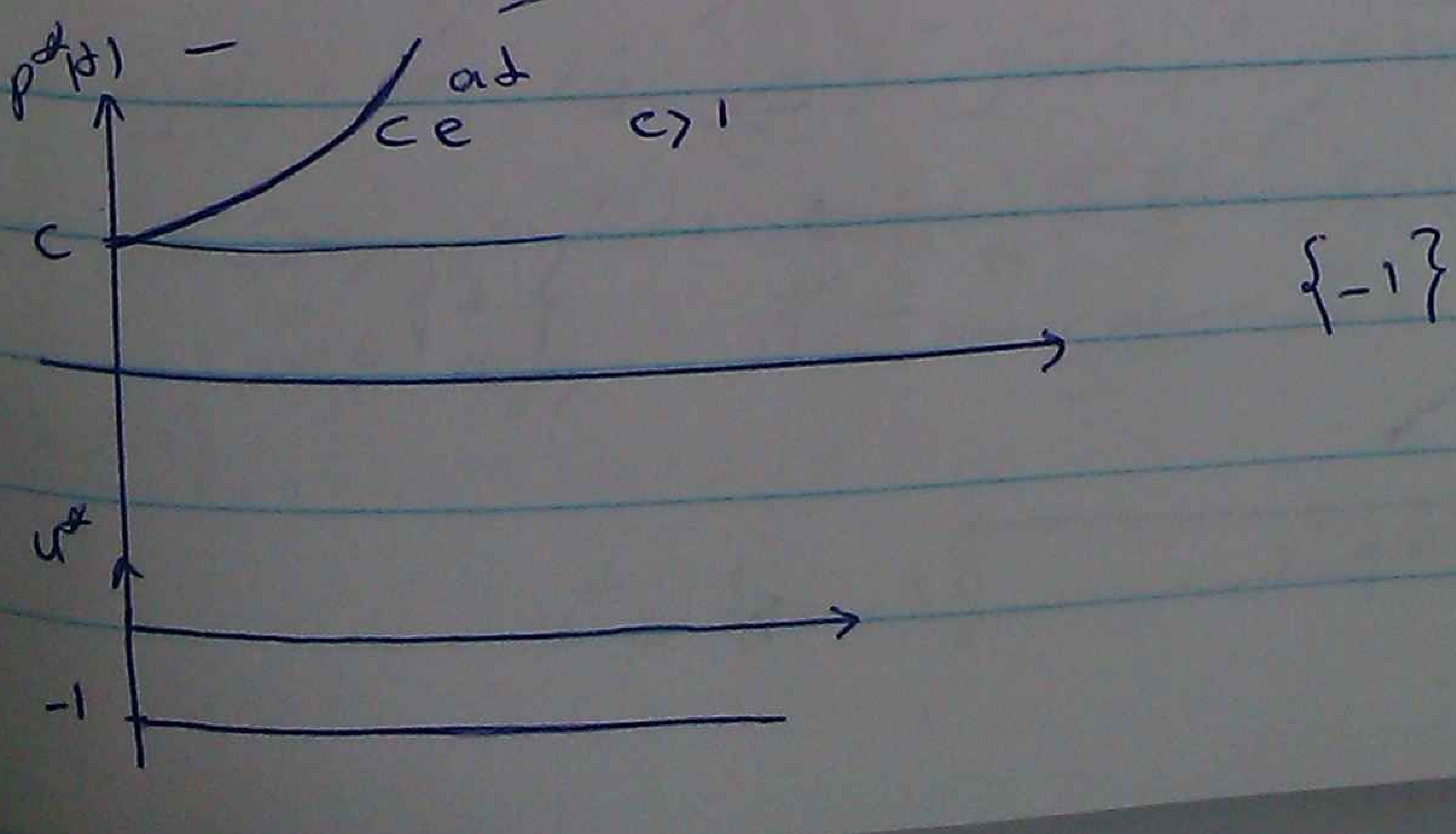
$$H = |u(t)| + p(-ax + u)$$

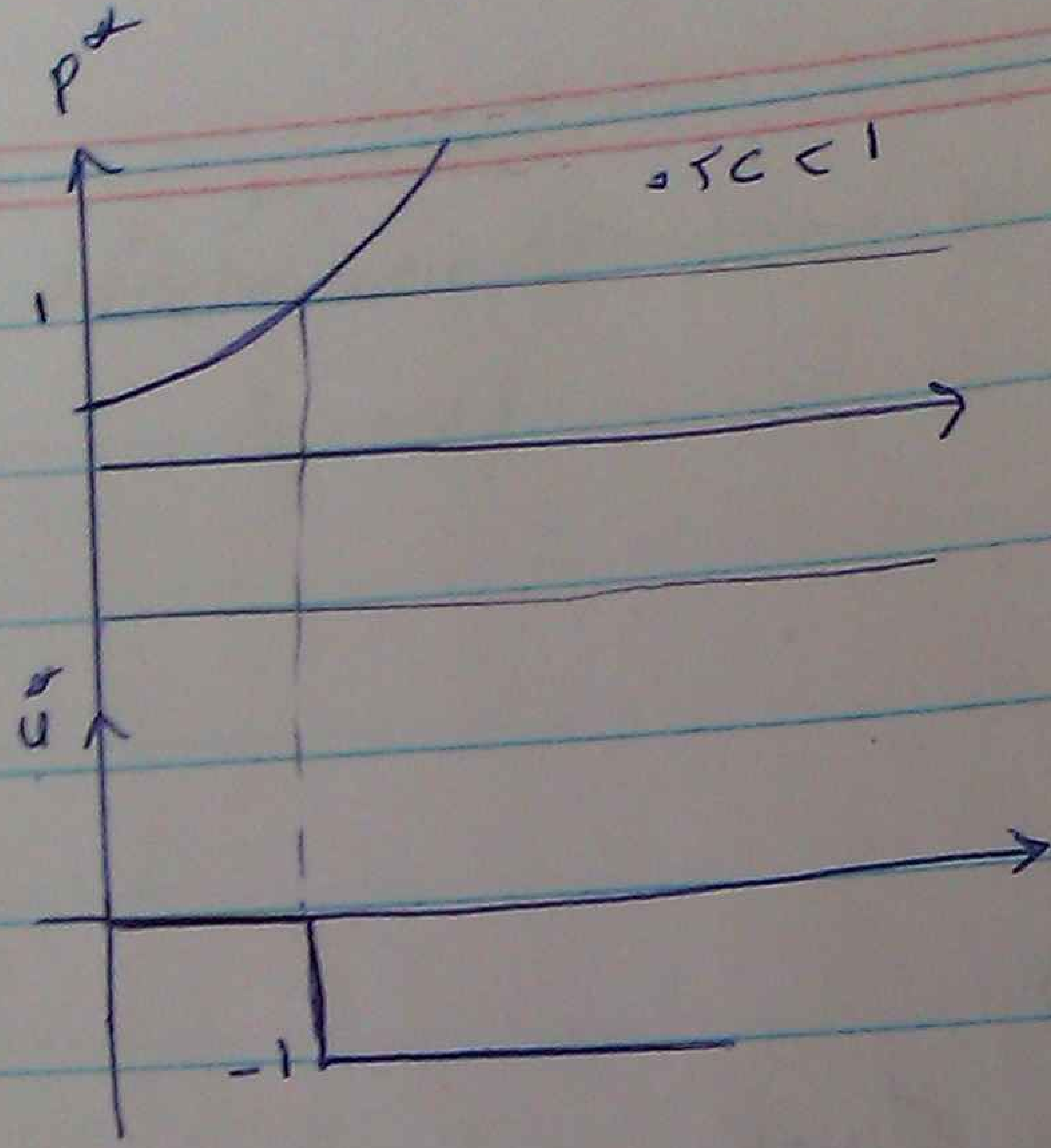
$$|u^*(t)| + p^* u^* \le |u(t)| + p^* u(t)$$

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 & p^*(t) < -1 \\ 0 & -1 < p^*(t) < 1 \\ -1 & p^*(t) > 1 \end{cases}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = ap \implies p(t) = c e^{at}$$

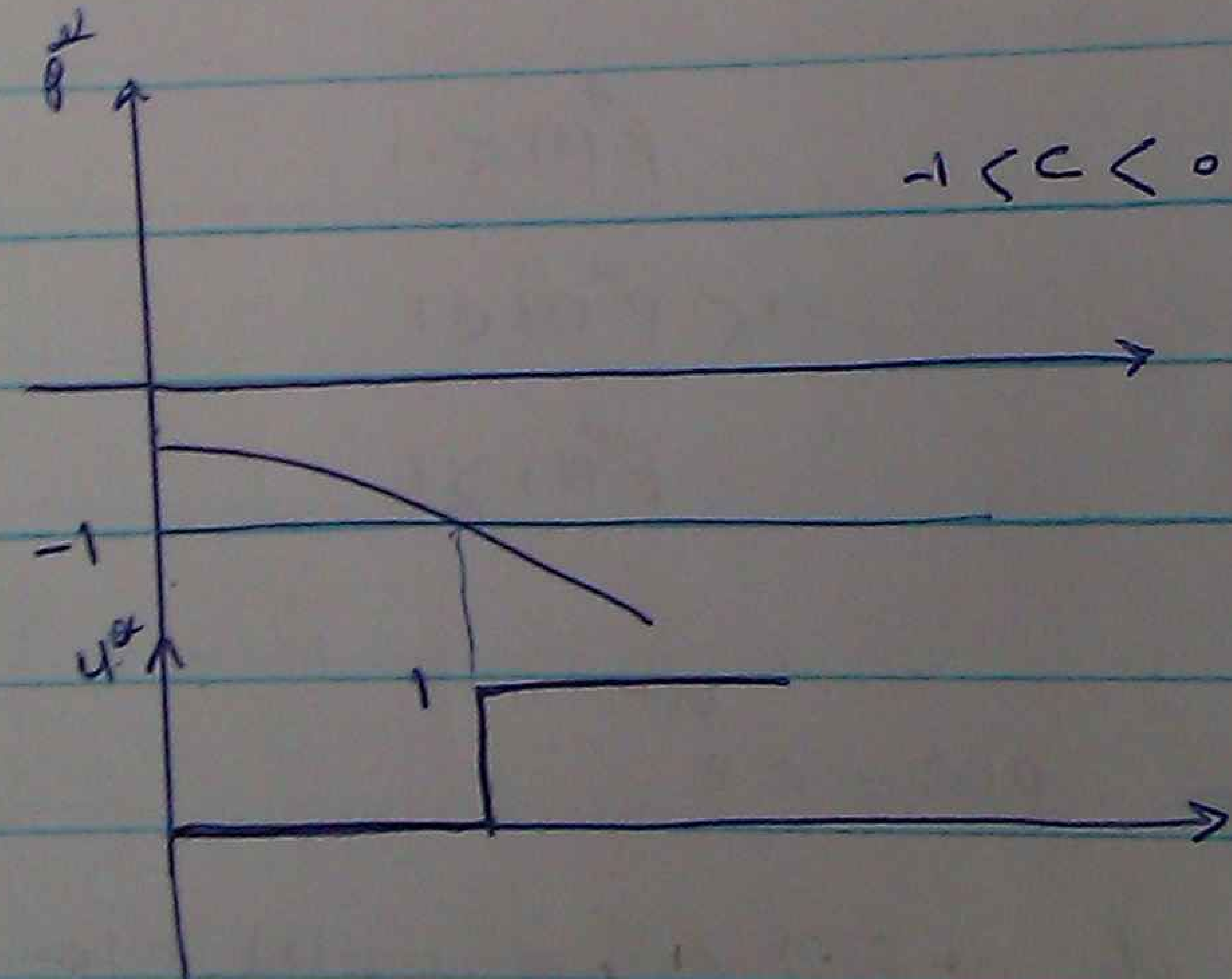
چون $p(t)$ در هیچ ناحیه‌ای توقف ندارد پس ناحیه منفرد نداریم.





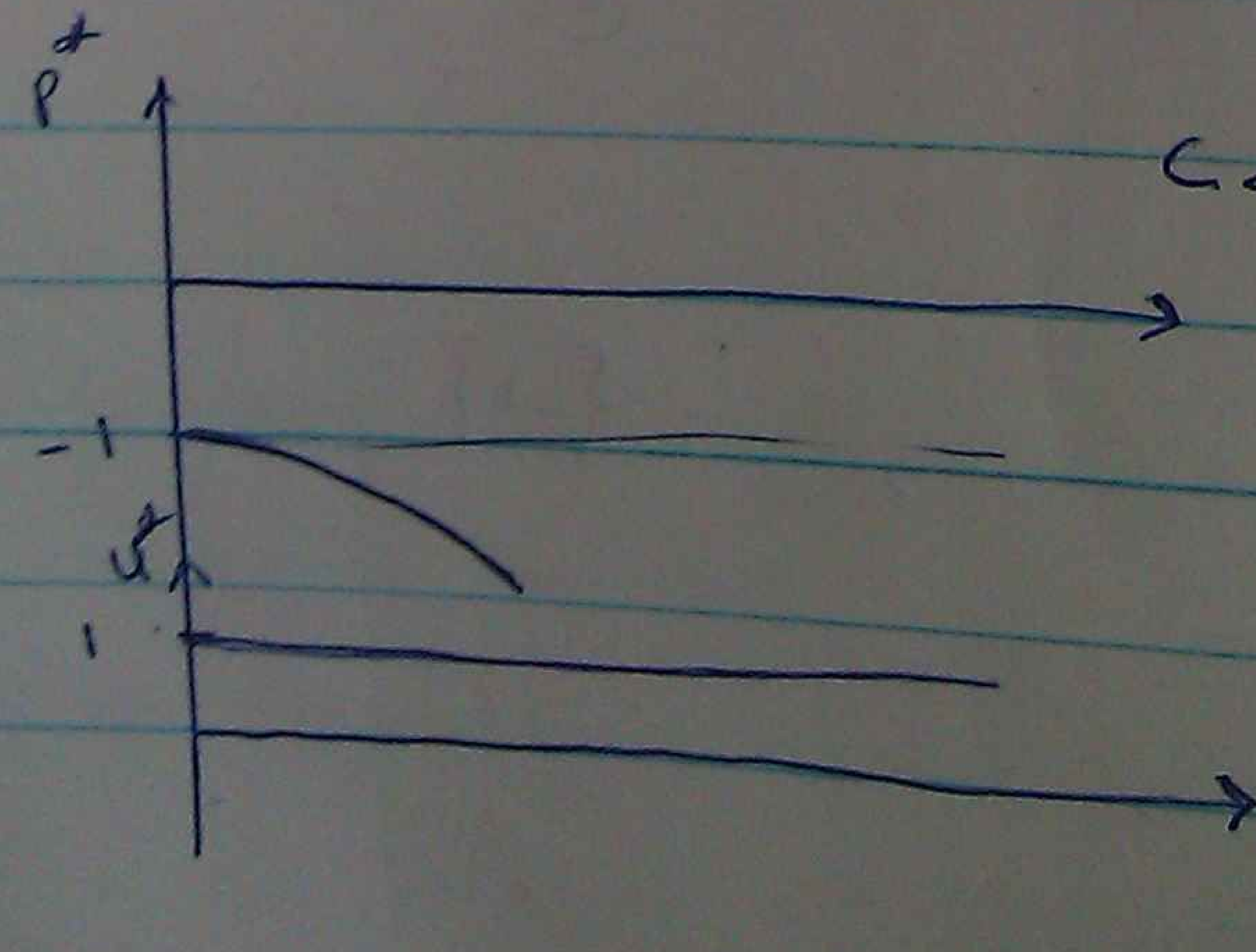
$0 < c < 1$

$\{0, -1\}$



$-1 < c < 0$

$\{0, 1\}$



$c < -1$

$\{1\}$

اگر $c=0 \Leftarrow$ $u=0$ $\{0\}$

مجموعه کنترل های قابل قبول:

$u^* \in \{-1\}, \{0,-1\}, \{0,1\}, \{1\}, \{0\}$

اگر مسأله حداقل زمان مطرح باشد $u=\pm 1$ است واضح است که اگر $x_0>0 \Leftarrow u^*=-1$

و اگر $x_0<0 \Leftarrow u^*=1$

فرض کنید حداقل زمان رسیدن T باشد:

$$x(T)=0=e^{-aT}x_0+\int_0^T e^{-a(T-\tau)}\underbrace{u(\tau)}_{\pm 1}d\tau$$

$$=e^{-aT}x_0 \pm e^{-aT}\left[\frac{1}{a}e^{a\tau}\Big|_0^T\right]$$

$$\Longrightarrow x_0=\mp\frac{1}{a}\left[e^{aT}-1\right]$$

برای هر x_0 ای یک حداقل زمان داریم

اگر $|x_0|>\frac{1}{a}[e^{aT}-1]$ باشد نمی‌توان با هیچ کنترلی x_0 را در زمان t به صفر رساند حال فرض کنید $|x_0|<\frac{1}{a}(e^{aT}-1)$ باشد یعنی فرصت کافی برای رساندن x_0 به مبدأ باشد در این حالت اگر $x_0>0$ باشد $u^*\in\{0,-1\}$

و اگر $x_0<0$ باشد

$u^*\in\{0,1\}$

به عبارت دیگر تا t_1 ثابت $u^* = 0$ و پس از آن تا T ، $u^* = -1$ برای $x_0 > 0$

و $u^* = 1$ برای $x_0 < 0$

فرض $x_0 > 0$:

$$x(t_1) = e^{-aT} x_0 + 0 = e^{-aT} x_0$$

$$x(T) = e^{-aT} x(t_1) + \int_{t_1}^{T} e^{-a(T-\tau)} (-1)\, d\tau$$

$u(\tau) = -1$ در این بازه زمانی

$+1$ برای $x_0 < 0$

$$0 = e^{-aT} x_0 - \frac{1}{a} e^{-aT} \left[e^{aT} - e^{at_1} \right]$$

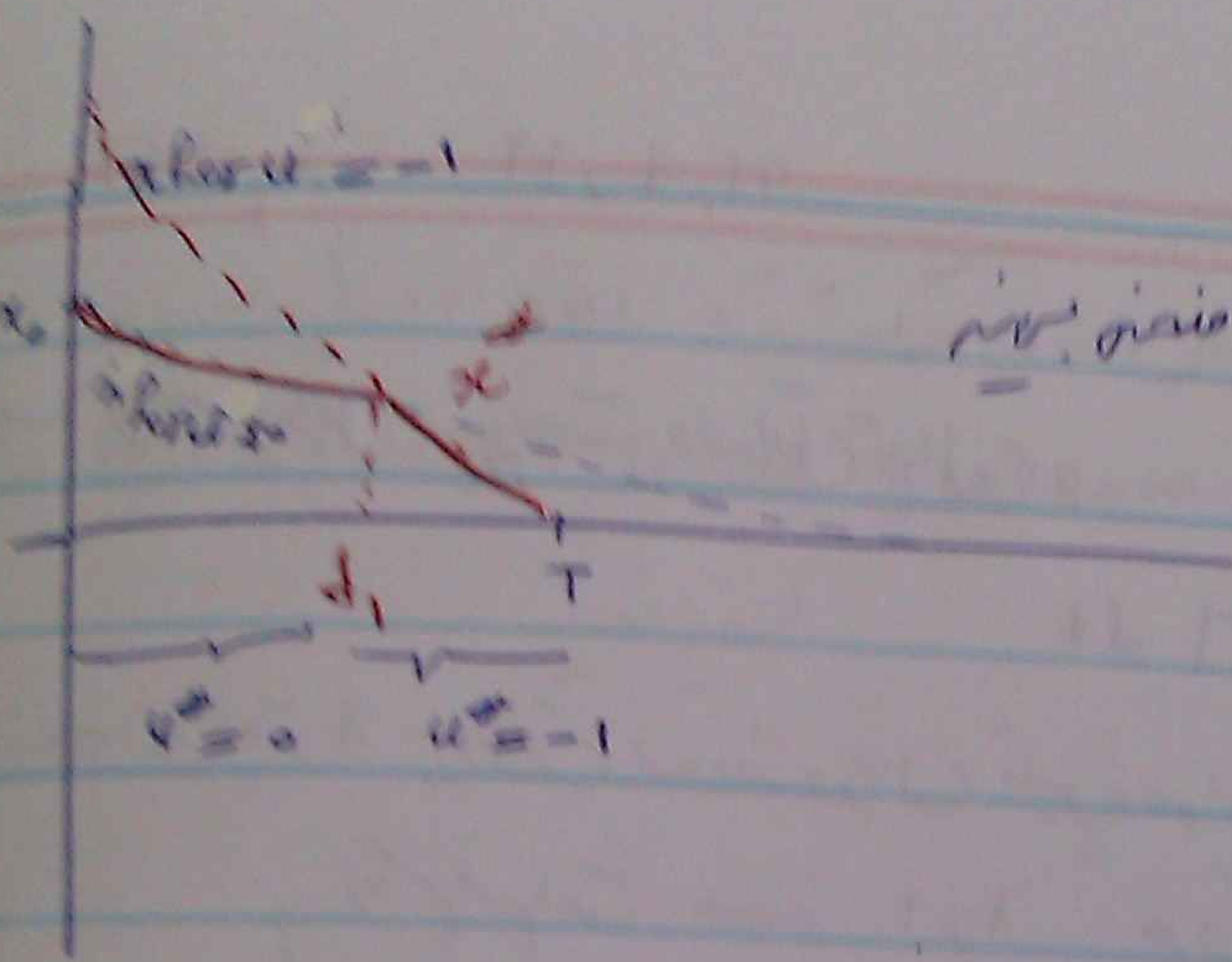
$$\Rightarrow t_1 = \frac{1}{a} \ln\left(e^{aT} - a x_0 \right)$$

لحظه کلیدزنی از ۰ به ۱-

برای $x_0 < 0$:

$$t_1' = \frac{1}{a} \ln\left(e^{aT} + a x_0 \right)$$

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & x_0 > 0 ,\ t < t_1 \\ -1 & x_0 > 0 ,\ t_1 < t < T \\ 0 & x_0 < 0 ,\ t < t_1' \\ +1 & x_0 < 0 ,\ t_1' < t < T \\ 0 & x_0 = 0 \end{cases}$$



هدف اینکه در T ثانیه به صفر برسد

$$x_0 > 0 \;;\; 0 < t \leq t_1 \Longrightarrow x(t) = e^{-at} x_0$$

$$t_1 \leq t < T \longrightarrow x(t) = \frac{1}{a}\left[e^{a(T-t)} - 1 \right]$$

$$J = \int_{t_1}^{T} |-1| \, dt = T - t_1$$

اندازه بزرگ شدن T و t_1

جلسه ۱۷ ام : ۹۱,۹,۱۹

ترکیب وزنی حداقل سوخت و حداقل زمان :

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} [\lambda + |u(t)|] \, dt$$

با استفاده از پارامتر λ پردازش سوخت و زمان تعیین می‌شود.

زمان مهم است $\longrightarrow \lambda > 1$ هرچه بزرگتر باشد

سوخت مهم است $\longrightarrow \lambda < 1$ هرچه کوچکتر باشد

مثال:

$$\dot{x} = -ax + u$$

$|u(t)| \leq 1$ t_f آزاد یا نامعین

$$\mathcal{H} = \lambda + |u| - p\,a\,x(t) + p\,u(t)$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = a\,p(t) \Rightarrow p(t) = c_1 e^{at}$$

اصل حداقل یا به پونتریاگین

$$\Longrightarrow u^*(t) = \begin{cases} 1 & p^*(t) < -1 \\ 0 & -1 < p^*(t) < 1 \\ -1 & p^*(t) > 1 \\ \text{نامعین غیرمنفی} & p^*(t) = -1 \\ \text{نامعین غیرمثبت} & p^*(t) = +1 \end{cases}$$

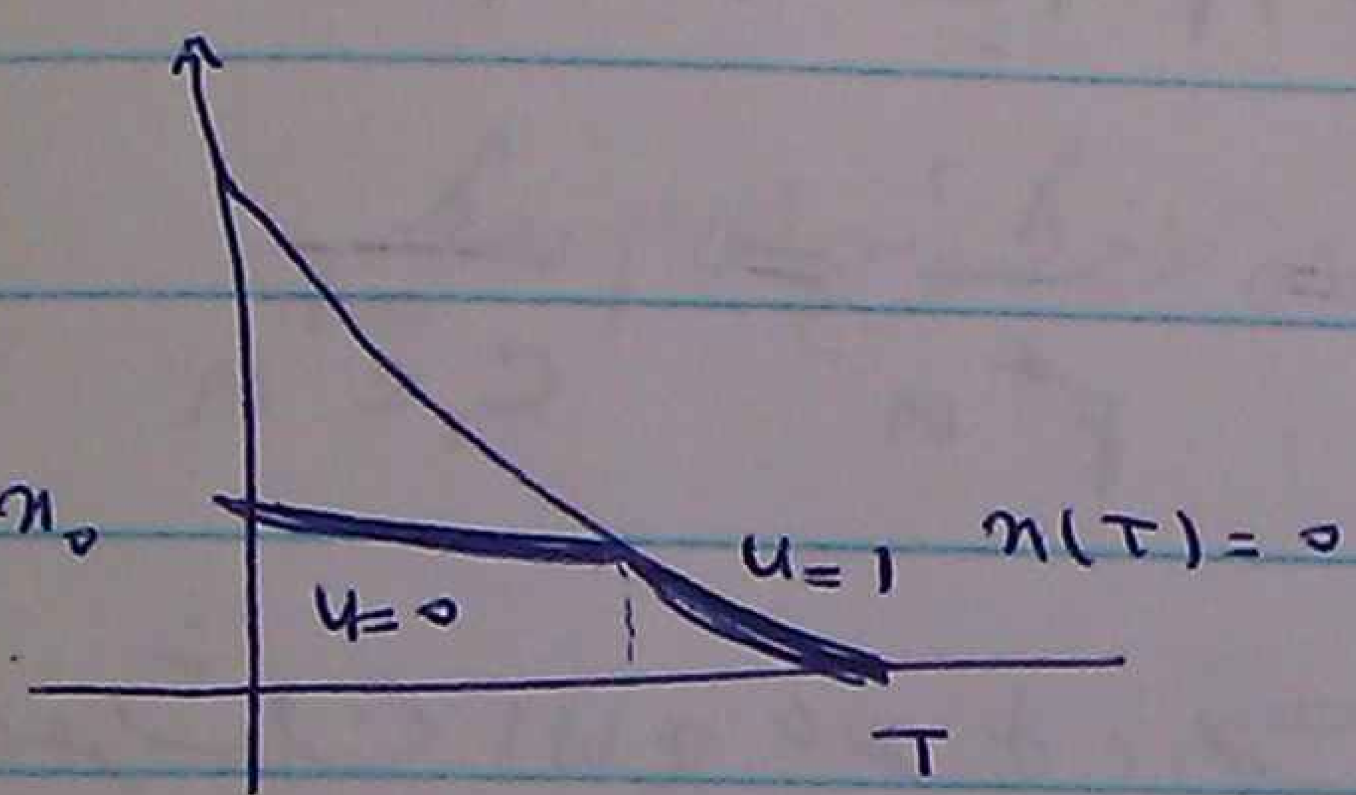
پیش نمی‌آید

اگر $u^*(t)=0$ ⟸ بی‌نهایت زمان طول می‌کشد تا $x(t)$ به مبدأ برسد.

کنترل $u^*(t)=0$ می‌دهد کوشش $J(u)\to\infty$ ⟸ $t_f\to\infty$

بهینه نیست.

یادآوری:



شرایط لازم برای بهینگی:

پونتریاگین و همکارانش شرایط لازم را برای بهینگی زیر بدست آوردند:

1. اگر زمان نهایی ثابت باشد و هامیلتونین به صورت صریح وابسته به زمان نباشد آنگاه هامیلتونین روی منحنی نهایی مقدار ثابت است.

$$H(x^*, u^*, p^*) = c \qquad \forall t \in [t_0, t_f]$$

2. اگر زمان نهایی آزاد باشد و هامیلتونین به طور صریح بستگی به زمان نداشته باشد آنگاه هامیلتونین روی منحنی نهایی صفر است.

$$H(x^*, u^*, p^*) = 0 \qquad \forall t \in [t_0, t_f]$$

در این مثال چون t_f آزاد است و H به t بطور صریح وابسته نیست پس

$$H(x^*, u^*, p^*) = 0 \qquad t \in [t_0, t_f]$$

if $u^*(t) = 0 \longrightarrow H(x^*, u^*, p^*) = \lambda - p^* a x^*(t) = 0$

$$x^*(t) = \frac{\lambda}{p^* a} = \frac{\lambda}{c_1 e^{at} a}$$

یعنی برای صفر شدن $x(t)$ باید t به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

پس u سوئیچ می‌خورد. اگر $u^* \in \{0, -1\}$ یعنی کنترل در $t_1 = t$ تغییر حالت می‌دهد.

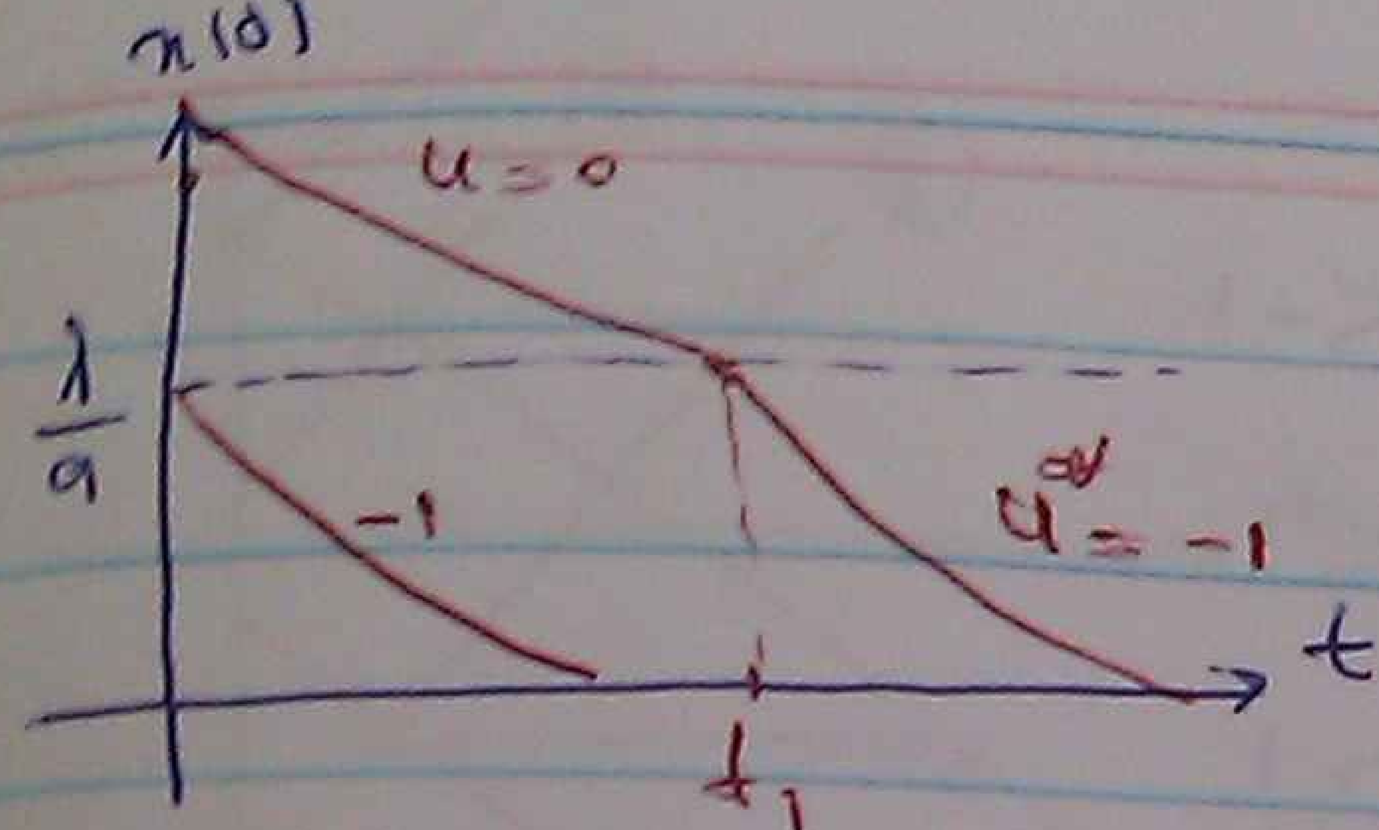
$$\Rightarrow |u^*| = -u^*(t)$$

$$H(x^*, p^*, u^*) = \lambda - u^*(t) - p^*(t)\, a x^*(t) + p^*(t) u^*(t)$$

$$H^*(t_1) = \lambda + 1 - a x^*(t_1) - 1 = \lambda - a x^*(t_1) = 0$$

$p^*(t_1) = 1$ لحظه سوئیچ کنترل از صفر به -1

$$\Rightarrow x^*(t_1) = \frac{\lambda}{a}$$



$$u=0 \rightarrow x(t)=x_0 e^{-at}$$

$$x(t_1)=x_0 e^{-at_1}=\frac{\lambda}{a}$$

$$t_0=0$$

$$e^{-at_1}=\frac{\lambda}{a x_0} \rightarrow -at_1=\ln\frac{\lambda}{a x_0}$$

$$\Longrightarrow t_1=\frac{1}{a}\ln\frac{a x_0}{\lambda}$$

هرچقدر λ بزرگتر زودتر می‌تواند سوئیچ انجام دهد.

Ex. قانون کنترل بهینه را برای انتقال سیستم:

$$\dot{x}_1=x_2$$

$$\dot{x}_2=u(t)$$

از $x(0)=x_0\neq 0$ دلخواه به وضعیت نهایی $x(t_f)=0$ با مینیمم‌سازی معیار

$$J(u)=\int_0^{t_f}[\lambda+|u(t)|]\,dt$$

$$|u(t)|\leq 1$$

این یک سیستم ذاتاً ناپایدار است که می‌خواهد از مبدأ دور شود. را پیدا کنید.

$$H=\lambda+|u|+p_1x_2+p_2u(t)$$

$$H^*\leq H \Longrightarrow |u^*|+p_2^*u^*\leq |u|+p_2^*u$$

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 & p_2^* < -1 \\ 0 & -1 < p_2^* < 1 \\ -1 & p_2^* > 1 \\ \text{نامعین غیرمنفی} & p_2^* = -1 \\ \text{نامعین غیرمثبت} & p_2^* = +1 \end{cases}$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1} = 0 \longrightarrow p_1^*(t) = c_1$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2} = -p_1 \Rightarrow p_2^*(t) = -c_1 t + c_2$$

فرض کنید $p_2^*(t) = -1$ (یعنی مدتی رو -1 باشد) $\Leftarrow$ $p_1 = 0$

$$\mathcal{H} = \lambda + u^*(t) - u^*(t) = \lambda > 0$$

چون t_f آزاد است پس باید $\mathcal{H} = 0$ $\Leftarrow$ تناقض

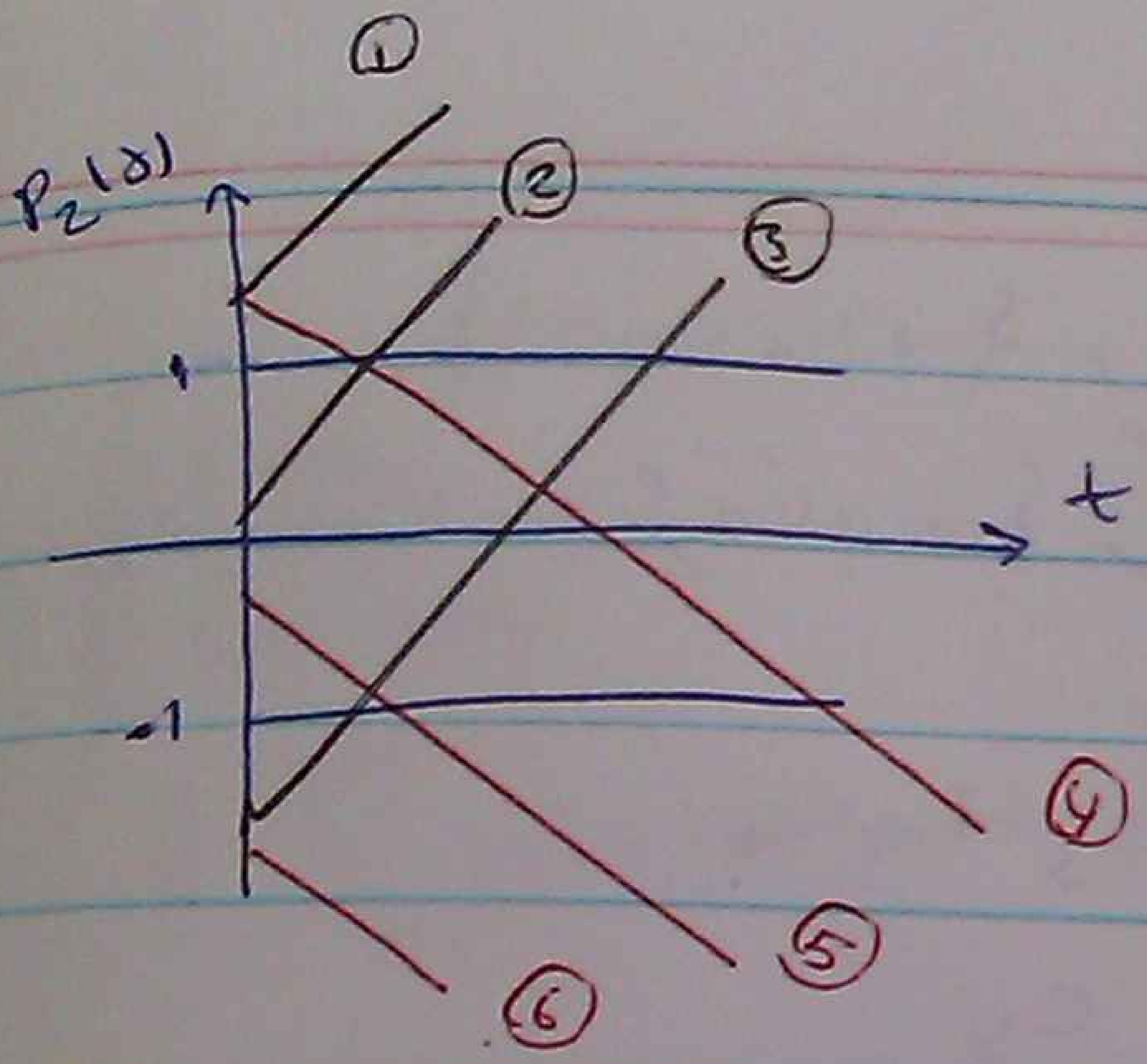
یعنی فرض $p_2^*(t) = -1$ درست نیست. بهمین ترتیب برای $p^*(t) = +1$ نمی‌تواند

برای مدتی روی این نقطه باشند

واضح است که $p_2^*(t)$ فقط یکبار می‌تواند خطوط $p_2^*(t) = \pm 1$ را قطع کند.

حداکثر یکبار قطع می‌کند می‌تواند اصلاً قطع نکند.

کنترل‌های قابل قبول:



1) $u^* \in \{-1\}$

2) $u^* \in \{0, -1\}$

3) $u^* \in \{+1, 0, -1\}$

4) $u^* \in \{-1, 0, +1\}$

5) $u^* \in \{0, +1\}$

6) $u^* \in \{+1\}$

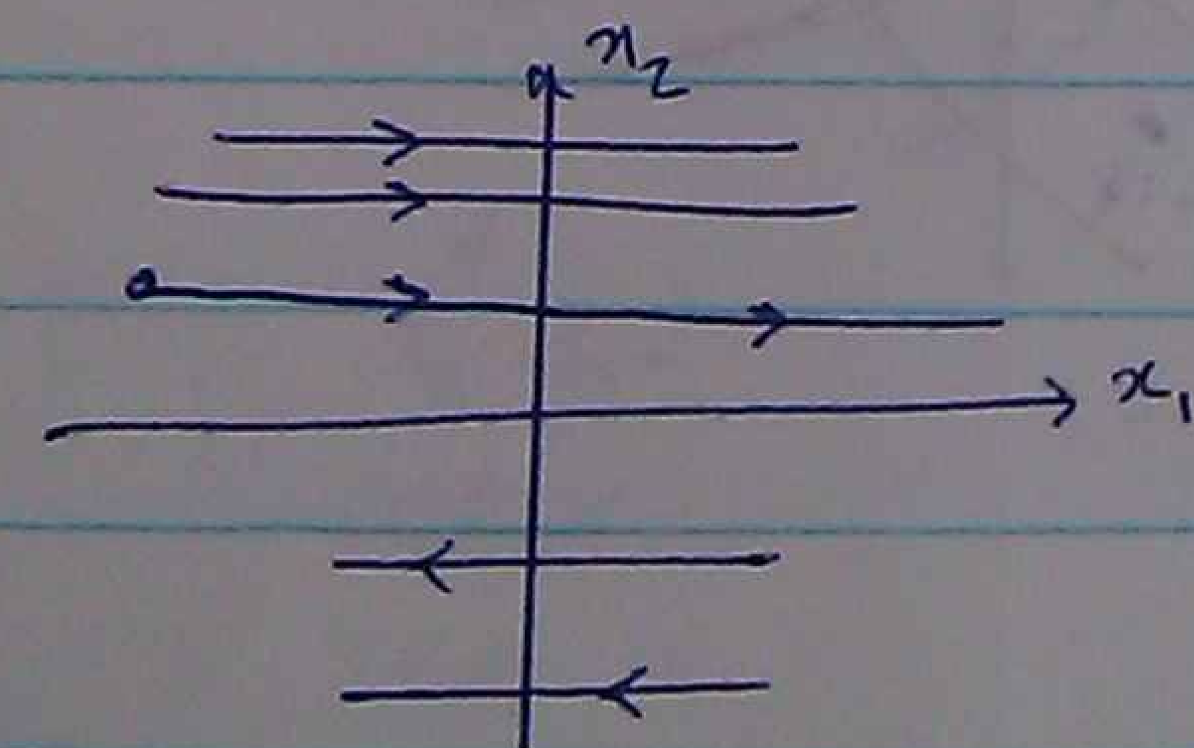
$u^* = 0$ جزء هیچ‌کدام از کنترل‌ها نیست چون به ازای آن ناپایدار می‌شود.

$u^* \notin \{-1, +1\}$ چون p_2 جهش ندارد. X

اگر x_2 مثبت باشد باید در نهایت منفی بشود.

اگر $u(t) = 0$ یا $u(t) > 0$

$u(t) = 0$



x_2 ثابت است.

برای x_2 مثبت x_1 شروع به زیاد شدن می‌کند و برای x_2 منفی x_1 شروع به کم شدن می‌کند.

$u(t)$ وقتی مثبت x_2 را زیاد می‌کند و x_1 شروع به زیاد شدن می‌کند پس سیستم ناپایدار می‌شود.

″ ″ منفی ″ ″ ″ کم ″ ″ ″ ″ ″ x_2 ″ کم ″ ″ ″

$u^*(t) \in \{-1\},\ \{0,-1\},\ \{+1,0,-1\}$

در نهایت باید ۱- شود تا به صفر نزدیک شود.

$u(t)=0 \Longrightarrow$

$\dot{x}_1 = x_2 \qquad x_1(t) = c_3 t + c_4$

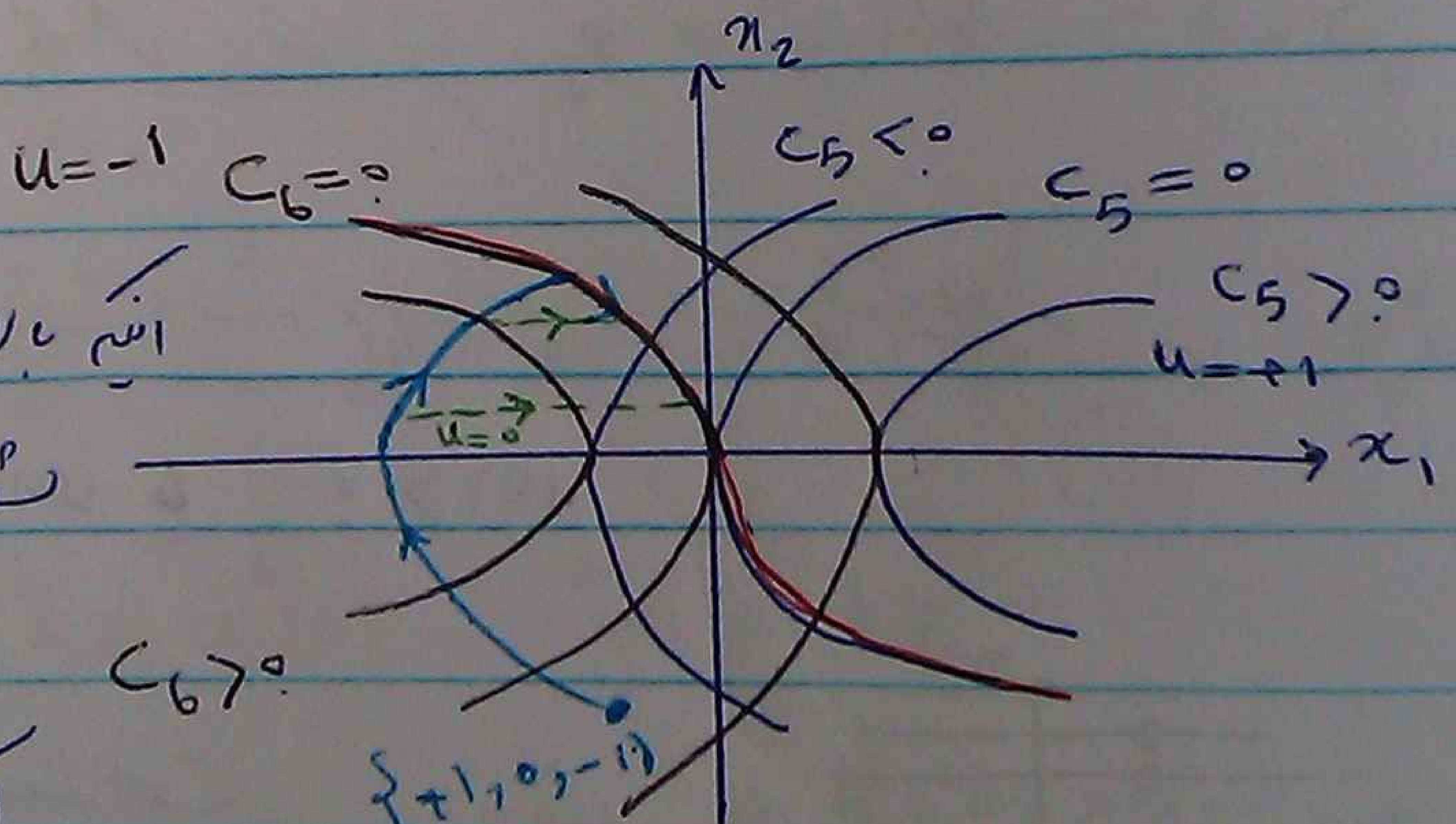
$\dot{x}_2 = 0 \qquad x_2(t) = c_3$

$u(t) = 1 \Longrightarrow x_1(t) = \frac{1}{2} x_2^2(t) + c_5$

$u(t) = -1 \Longrightarrow x_1(t) = -\frac{1}{2} x_2^2(t) + c_6$

اگه بالاتر سوئیچ کنیم $u=0$ شود یا پایین‌تر بستگی به λ دارد

اگر λ بزرگ باشد بالاتر سوئیچ می‌شود.



هرچه u را بیشتر صفر داشته باشیم زمان بیشتری طول می‌کشد اما سوخت کمتری مصرف می‌شود.

اگر $\lambda=0$ باشد چرا که بیشتر می‌آید ناحیه آرک singular اتفاق می‌افتد

۹۱,۴,۲۶ جلسه هجدهم

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u(t) \end{cases}$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [\lambda + |u|]\, dt$$

$$|u(t)| \leq 1$$

$$x(0) = x_0 \longrightarrow x(t_f) = 0$$

$$H = \lambda + |u| + p_1 x_2 + p_2 u(t)$$

$$\dot{p}_1 = \frac{-\partial H}{\partial x_1} = 0 \longrightarrow p_1 = c_1$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = p_1 \Longrightarrow p_2 = -c_1 t + c_2$$

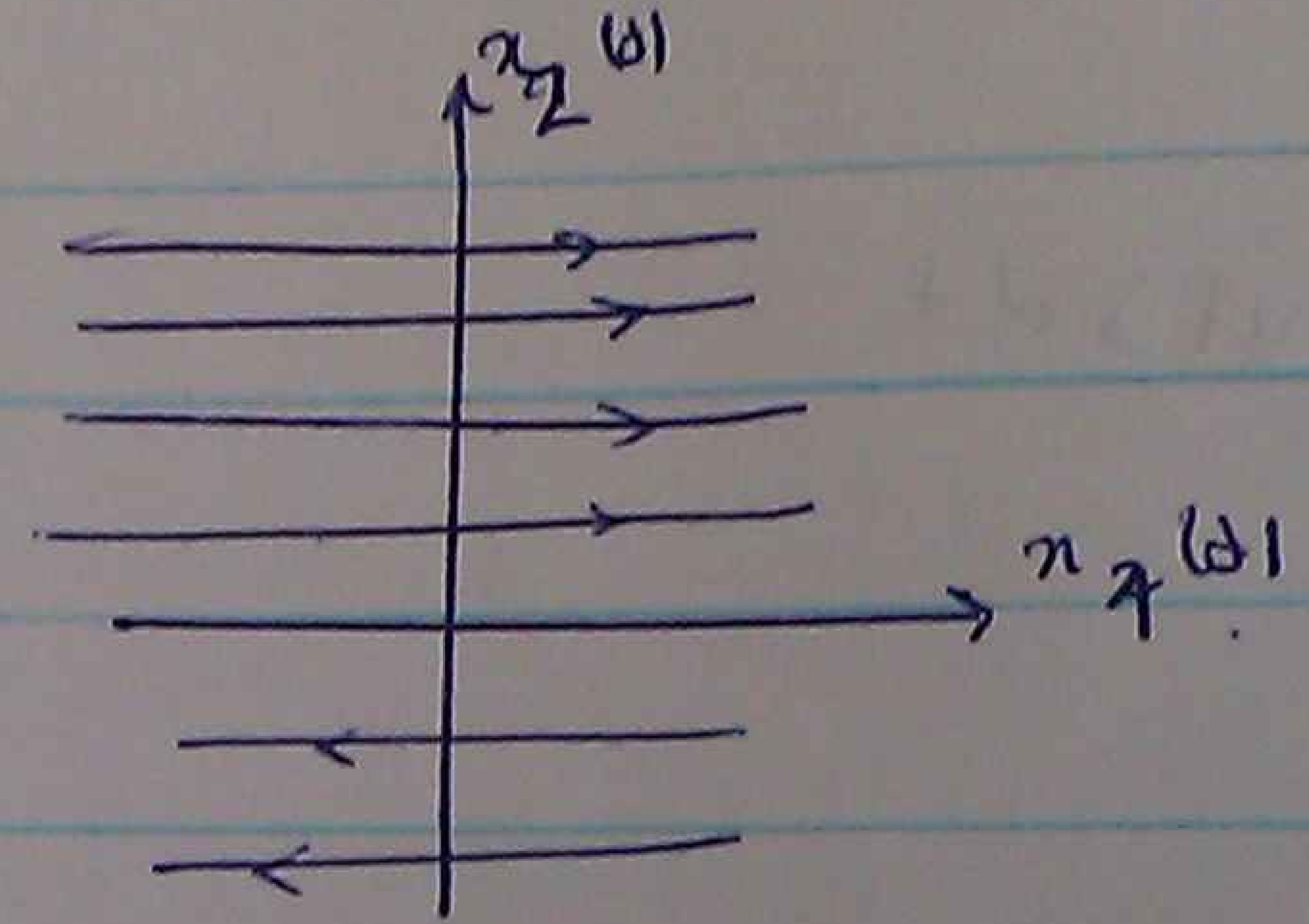
$$u^*(t) = \begin{cases} 1 & p_2^* < -1 \\ 0 & -1 < p_2 < 1 \\ -1 & 1 < p \end{cases}$$

مثلا $x(0)$ که مثبت

$$u^* = \{-1\}, \{0, -1\}, \{+1, 0, -1\}$$

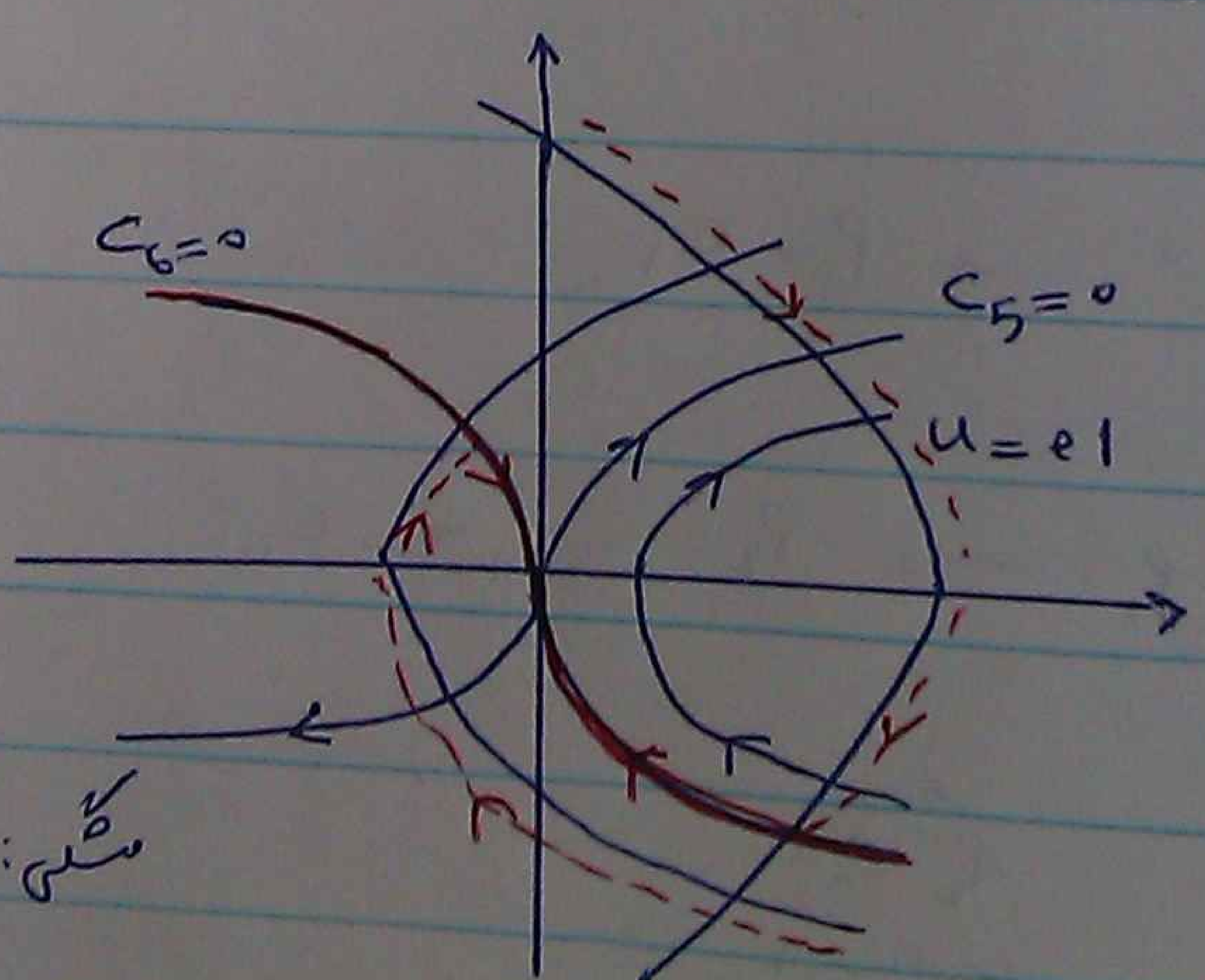
$u(t) = 0 \longrightarrow x_2 = c_3 \longrightarrow x_1 = c_3 t + c_4$

$= x_2(t) t + c_4$



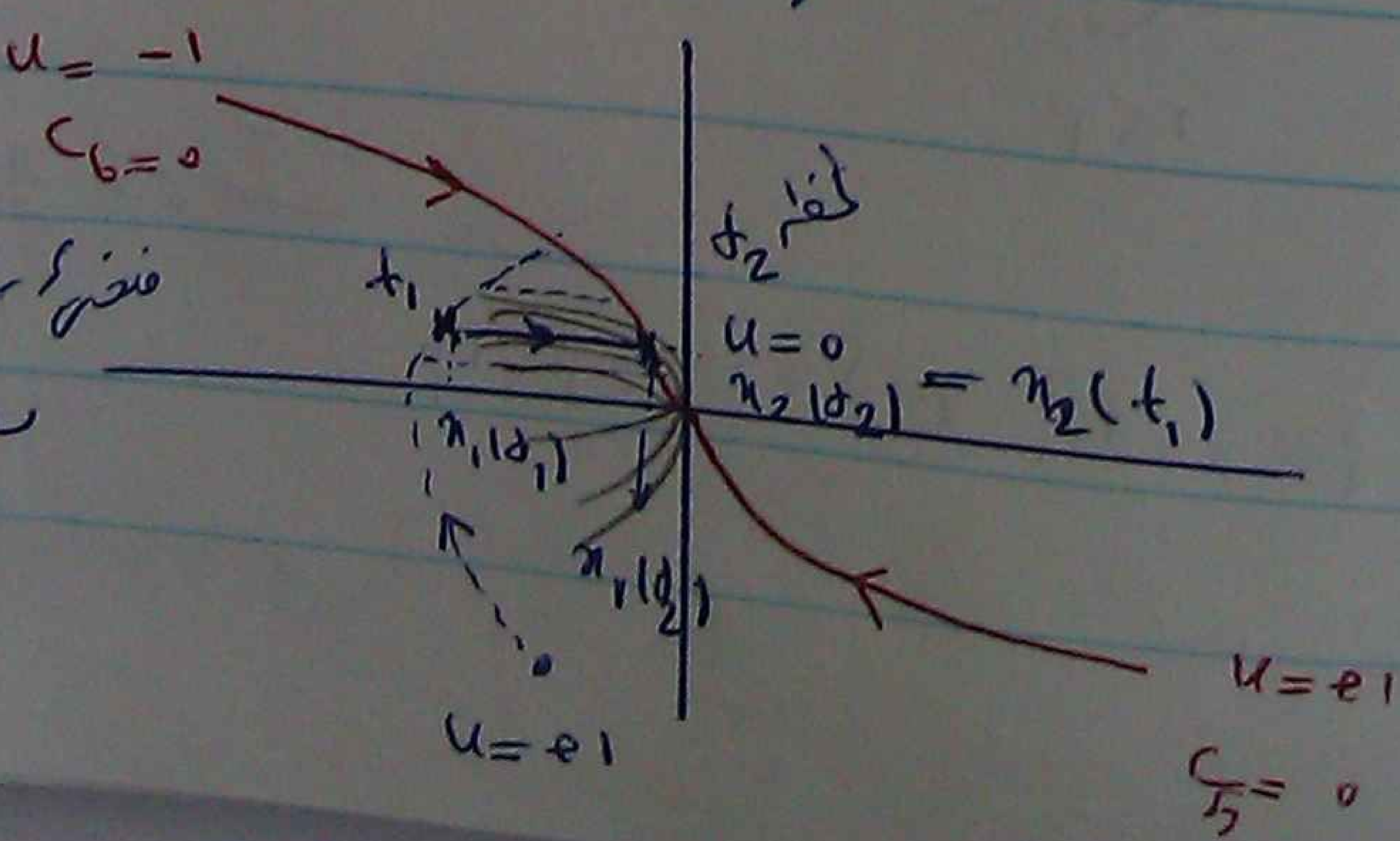
$u(t) = +1 \longrightarrow x_1(t) = \frac{1}{2} x_2^2(t) + c_5$

$u(t) = -1 \longrightarrow x_1(t) = -\frac{1}{2} x_2^2(t) + c_6$



مشکل: مکان هندسی نقاطی که باید سوئیچ داشته باشیم؟ به ازای هر t محکم

فضای افقی برای حالتی است که سوخت کم مصرف کند



(با $u=-1$ می‌دهیم تا به نقطهٔ t_1 برسد سپس $u=0$ می‌گذاریم تا به منحنی برسد.)

$u=-1$

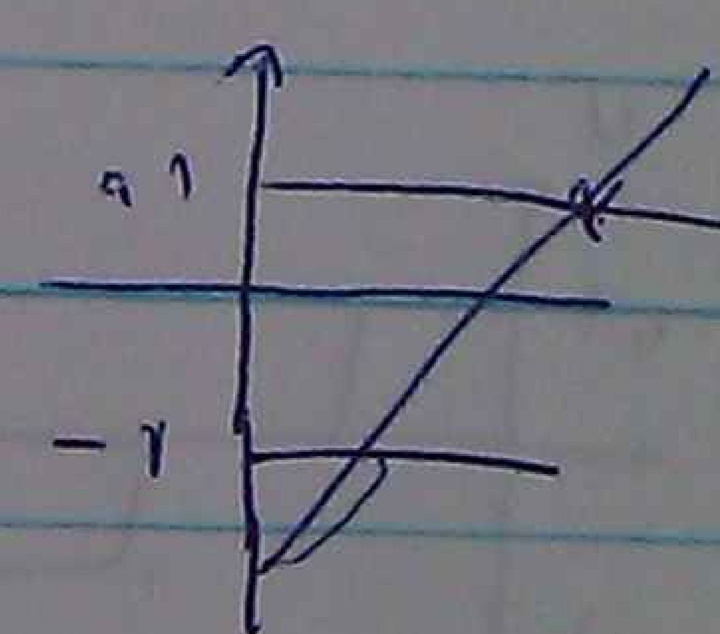
$C_6=0 \Longrightarrow x_1(t) = -\frac{1}{2} x_2^2(t)$

$x_1(t_2) = -\frac{1}{2} x_2^2(t_2) = -\frac{1}{2} x_2^2(t_1)$

روی خط $u(t)=0 \longleftarrow$

$$\begin{cases} x_1(t) = x_2(t)\cdot t + C_4 \\ x_1(\underset{\sim}{t_2}) = x_1(t_1) + x_2(t_1)(\underset{\sim}{t_2} - t_1) \end{cases} \quad *$$

$P_2(t_1) = -1 = -C_1 t_1 + C_2$



$P_2(t_2) = +1 = -C_1 t_2 + C_2$

$t_2 - t_1 = -\dfrac{2}{C_1} \quad **$

$H = \lambda + |u| + P_1 x_2 + P_2 u(t)$

$H(t_1) = \lambda + C_1 x_2(t_1) = 0 \longrightarrow x_2(t_1) = -\dfrac{\lambda}{C_1}$

$H(t_2) = \lambda + C_1 x_2(t_2) = 0 \longrightarrow x_2(t_2) = -\dfrac{\lambda}{C_1}$

$\Longrightarrow C_1 = -\dfrac{\lambda}{x_2(t_1)}$

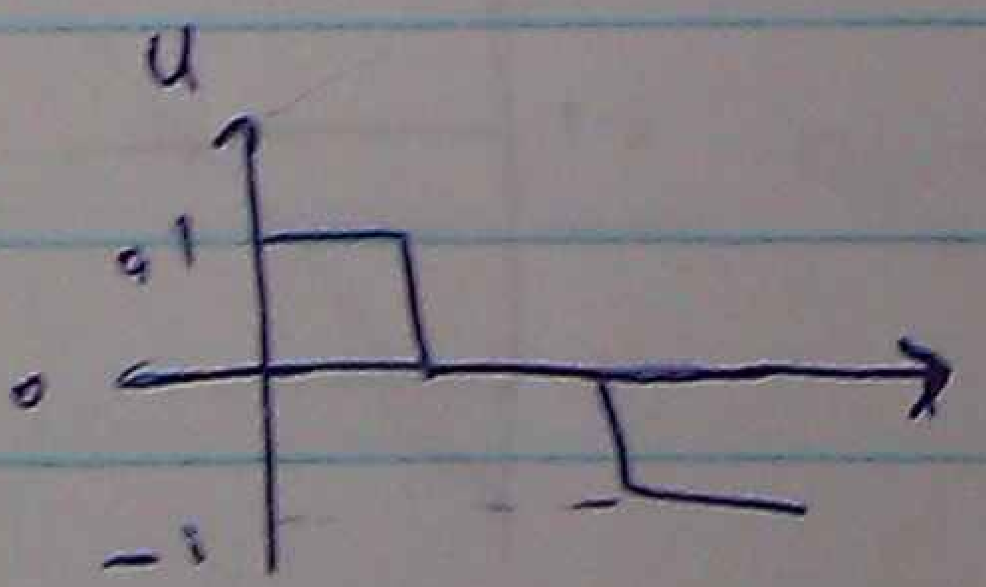
$$** \Rightarrow \quad t_2 - t_1 = \frac{2x_2(t_1)}{\lambda}$$

$$* \Rightarrow \begin{cases} x_1(t_2) = x_1(t_1) + \dfrac{2x_2^2(t_1)}{\lambda} \\ x_1(t_2) = -\tfrac{1}{2}x_2^2(t_2) = -\tfrac{1}{2}x_2^2(t_1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\tfrac{1}{2}x_2^2(t_1) = x_1(t_1) + \frac{2x_2^2(t_1)}{\lambda}$$

$$x_1(t_1) = -\frac{\lambda+4}{2\lambda}x_2^2(t_1)$$

(هرچه λ بزرگتر باشد دیرتر سوئیچ می‌خورد λ کوچکتر یعنی سوخت برایمون مهم است.)



- اگر بالایی منفی بود اول ۱- می‌دهیم بعد صفر سپس ۱+ .

- مثال اندرسن

سیستم $\dot{x} = -ax(t) + u(t)$ باید از یک وضعیت اختیاری $x(0)=x_0$ با حداقل کردن

$$J(u) = \int_0^{t_f} (\lambda + u^2(t))\,dt$$

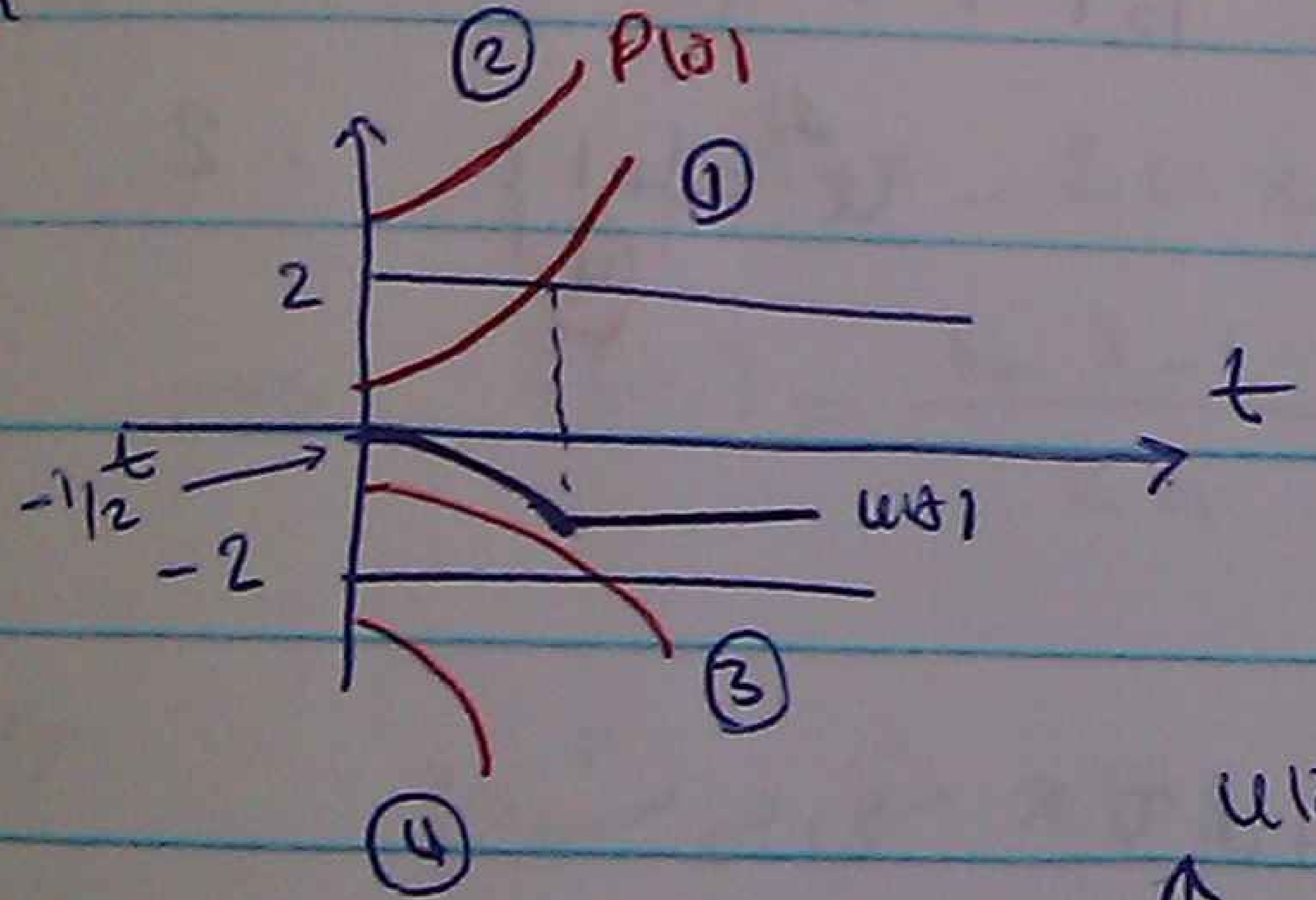
به مبدأ منتقل شود. $a, \lambda > 0$ و $|u(t)| \le 1$

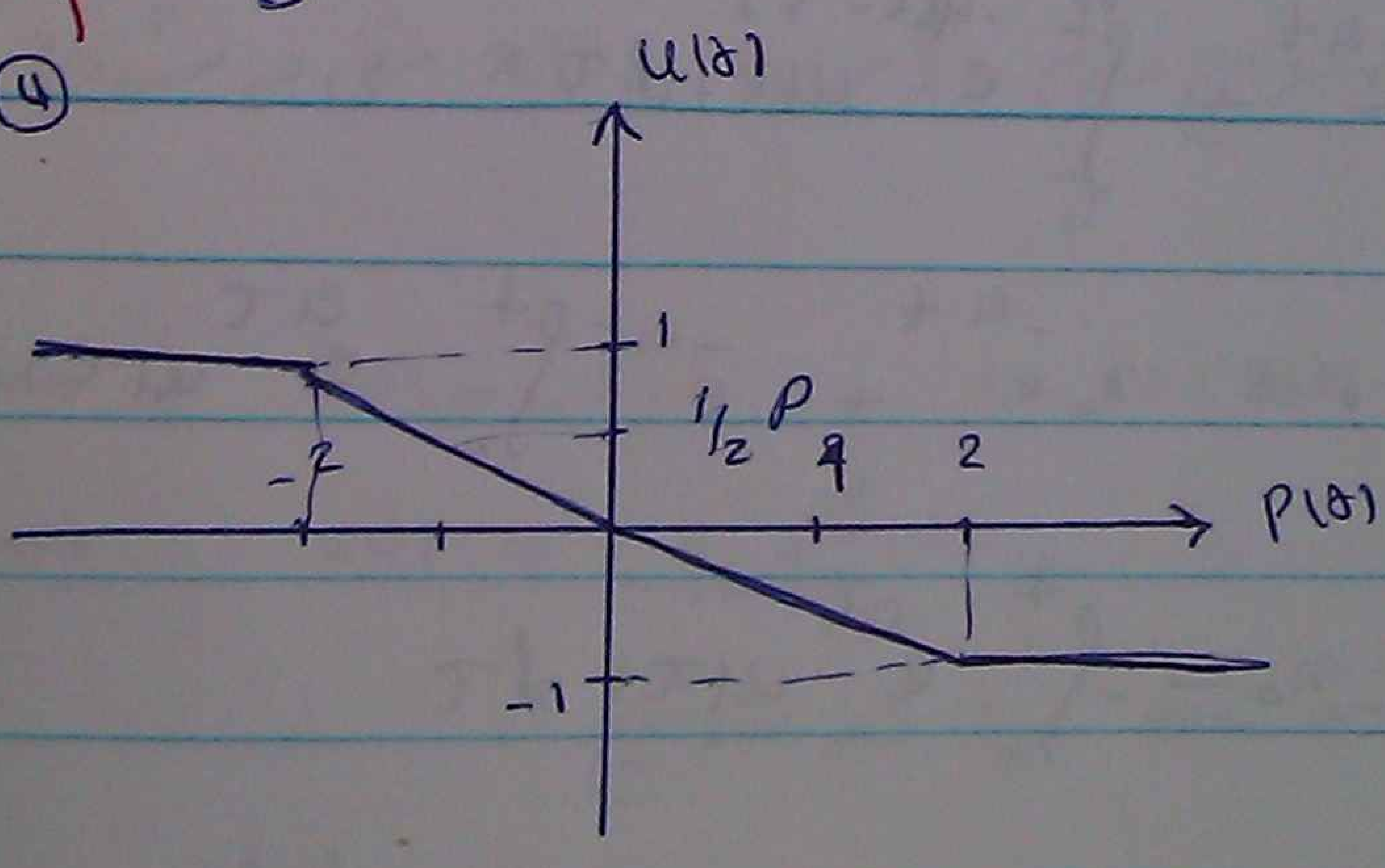
t_f آزاد.

$$\mathcal{H} = \lambda + u^2(t) + p_1(-a x(t) + u(t))$$
$$= \lambda + u^2 - p_1 a x + p_1 u$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = pa \longrightarrow p = c_1 e^{at}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 2u + p = 0 \longrightarrow u^*(t) = -\tfrac{1}{2} p^*(t) \qquad -2 < p^*(t) < 2$$





$$u^*(t) = \begin{cases} +1 & ; p(t) < -2 \\ -\tfrac{1}{2} p(t) & ; -2 < p(t) < 2 \\ -1 & ; 2 < p(t) \end{cases}$$

کنترل های قابل قبول :

اگر $x_0 > 0$

سیستم قبل از سوئیچ به صفر برسد.

1. $u^* = \{-\frac{1}{2}p^*\}$ (2) یا $\{-\frac{1}{2}p^*, -1\}$ (1)
2. $u^* = \{-1\}$ (2)

اگر $x_0 < 0$

1. $u^*(t) = \{-\frac{1}{2}p^*\}$ یا $\{-\frac{1}{2}p^*, +1\}$ (3)
2. $u^* = \{+1\}$ (4)

$$\dot{x} = -ax + u$$

$$x(t) = x_0 e^{-at} + \int_0^{t_f} e^{-a(t-\tau)} u(\tau)\, d\tau$$

$$x(t_f) = 0 = x_0 e^{-at} + e^{-at}\int_0^{t} e^{a\tau} u(\tau)\, d\tau$$

$$x_0 = -\int_0^{t} e^{a\tau} u(\tau)\, d\tau$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x_0 > 0 \longrightarrow u(\tau) < 0 \\ x_0 < 0 \longrightarrow u(\tau) > 0 \end{cases}$$

چون t_f آزاد است و هامیلتونین صریحاً به t وابسته نیست پس $\mathcal{H} = 0$

$$\rightarrow \lambda + u^2(t) - pa\,x(t) + p\,u(t) = 0$$

فرض می‌کنیم سوئیچ در $t = t_1$ انجام شود.

$t = t_1$

$p(t_1) = 2$

$u(t_1) = -1$

$$\lambda + 1 - 2a\,x(t_1) - 2 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x(t_1) = \frac{\lambda - 1}{2a}$$

$\Longrightarrow$ اگر $\lambda < 1$ سوئیچ نداریم. (چون $x(t_1)$ منفی می‌شود)

$\forall t > t_1 \Longrightarrow \quad u(t) = -1 \quad$ و $\quad 0 < x(t) < \dfrac{\lambda - 1}{2a}$

$\forall t < t_1 \Longrightarrow \quad u(t) = -\frac{1}{2}\,p(t)$

اگر $x_0 < 0$ باشد $\Leftarrow$ t_1' لحظه سوئیچ

$$x(t_1') = -\frac{\lambda - 1}{2a}$$

$t > t_1' \Longrightarrow \left(0 > x(t) > -\dfrac{\lambda - 1}{2a}\right) \quad -\dfrac{\lambda - 1}{2a} < x(t) < 0$

اگر $\lambda < 1$ باشد t_1 وجود ندارد.

مثال:

$$\left(J = \int (0.8 + u^2(t))\, dt \right.$$

$$\dot{x} = -ax + u$$

در این مثال $\lambda = 0.8$ بنابراین هیچگاه $p(t)$ با اشباع نمی‌رسد و u ، ۱- نمی‌شود

بنابراین کافی است از رابطه زیر u محاسبه شود. $\left(u^* = -\frac{1}{2} p^* \right.$

در ناحیه غیر اشباع داریم:

$$u^*(t) = -\frac{1}{2} p^*(t)$$

$$H = \lambda + \frac{1}{4} p^{*2} - p a x(t) - \frac{1}{2} p^{*2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad p^* = 2\left[-ax^* \pm \sqrt{(ax^*(t))^2 + \lambda} \right]$$

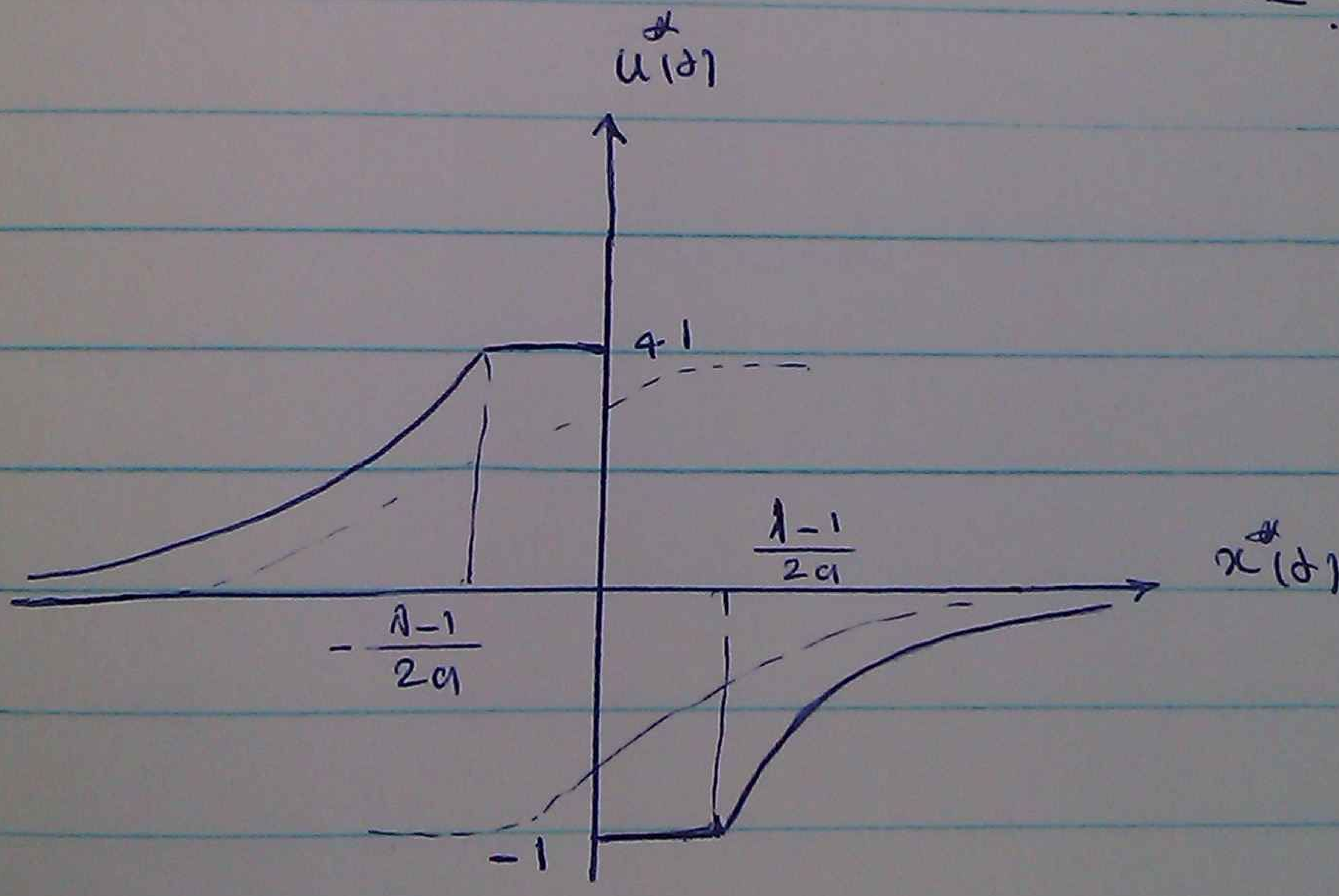
$$u^*(t) = ax \pm \sqrt{(ax^*(t))^2 + \lambda}$$

p برحسب x بدست می‌آید بنابراین u برحسب x است که یک رابطه

close loop است یعنی فیدبک داریم.

$$u^*(t) = \begin{cases} a\,x(t) - \sqrt{(a\,x(t))^2 + \lambda} & 0 < \frac{\lambda - 1}{2a} < x(t) \\ -1 & 0 < x(t) < \frac{\lambda - 1}{2a} \\ +1 & -\frac{\lambda - 1}{2a} < x(t) < 0 \\ a\,x(t) + \sqrt{(a\,x(t))^2 + \lambda} & x(t) < -\frac{\lambda - 1}{2a} < 0 \end{cases}$$

$x(t) = 0$



$\lambda < 1$ هیچوقت سوئیچ انجام نمی‌گیرد و به اشباع نمی‌رسد.

به x_0 وابسته نیست.