subject: Finite Element

روش اجزاء محدود:

فصل یکم: مقدمه

- مسائل مهندسی - روش های عددی - تاریخچه مختصر اجزاء محدود - مراحل اساسی روش اجزاء محدود - فرمول بندی مستقیم - فرمول بندی براساس مینیمم انرژی پتانسیل کل - فرمول بندی به روش مانده وزنی (روش کلی تر است - روش گالرکین) - تحلیل خرپاها با استفاده از روش اجزاء محدود

* روش مانده وزنی در تمام مسائل بصورت ODE و PDE ها قابل استفاده است.

مسائل مهندسی:

مسائل موجود در یک مهندسی در واقع مدل های ریاضی از حالات فیزیکی هستند. یعنی یک معادله دیفرانسیل با شرایط مرزی اولیه و طبیعی داریم. این معادله های دیفرانسیل معمولاً دو جواب دارند: یک جواب همگن است و جواب دیگر خصوصی است.

جواب همگن شامل پارامترهای مربوط به رفتار طبیعی سیستم میشود. مانند مدول الاستیسیته، ضریب هدایت حرارتی، ویسکوزیته سیال.

جواب خصوصی شامل تحریک خارجی است. مانند نیروها و ممان های خارجی، اختلاف حرارت در طول یک محیط، اختلاف فشار در یک سیال.

روش های عددی:

در اینجا بحث بوجود آمدن روش عددی مطرح می شود؟ در حل بسیاری از مسائل مهندسی هستند که برای آن ها جواب دقیق یا Closeform Solution به هر دلیلی وجود ندارد. (مثلاً به علت پیچیدگی و یا هندسی و شرایط مرزی معادله دیفرانسیل، تغییر دادن ضرایب معادله دیفرانسیل و ...) لذا این دسته از مسائل مهندسی تنها با روش های اجزای محدود قابل تحلیل اند.

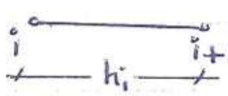
تفاوت روش دقیق با روش عددی در این است که روش دقیق مقدار تابع مورد نظر را در کل Domain به ما میدهد اما روش عددی بصورت گسسته و تنها در تعداد محدودی از نقاط جواب معادله را به ما میدهد.

روش های عددی در حل معادله دیفرانسیل به دو دسته تقسیم می شود:

۱- روش تفاضل محدود FDM ۲- روش اجزاء محدود FEM

در روش تفاضل محدود FDM معادله دیفرانسیل برای هر گره (node) نوشته می شود و سپس روابط تفاضلی جایگزین مشتقات می شود.

subject: Finite Element



$$\dot{u}_i = \frac{1}{h_i}(u_{i+1} - u_i)$$

با مبادلات مشتق معادلات دیفرانسیل ، مجهولات
دستگاه معادلات را جایگزین می‌کنیم و سپس
دستگاه چند معادله و چند مجهول تولید و حل
می‌گردد و نهایتاً مقادیر مجهول گره‌ها بدست می‌آید. این روش کاربری بسیار ساده دارد اما ضعف اصلی آن این بود که تنها برای مرزهای مستقیم قابل استفاده است و در مرزهای منحنی استفاده‌ای ندارد. ضعف بعدی این است که تنها مناسب مواد ایزوتروپ است.

روش اجزای محدود به نحوی از دهه‌ی 50 به بعد کلید خورد. در این روش از فرمول‌های انتگرالی به جای معادلات دیفرانسیل جهت تشکیل معادلات جبری استفاده می‌شود. در این روش یک تابع پیوسته‌ی تقریبی (تابع شکلی Shape Function) برای حل هر المان فرض می‌شود. جواب نهایی از اجتماع تک‌تک جواب‌ها حاصل می‌گردد. این کار با حفظ پیوستگی در مرزهای بین المانی صورت می‌گیرد.

تاریخچه مختصر روش اجزای محدود:

روش اجزای محدود در اوایل قرن بیستم متولد شد و مولود آنالیز ماتریسی سازه است که به محیط‌های گسترده بسط داده شده است. اولین حرکت سال 1900 بود که محقق یک محیط پیوسته Continua را با استفاده از مدل المان‌های میله‌ای الاستیک مدل شد. سپس در سال 1934 شخصی به نام Cournat یک مسئله تنش مستوی را با استفاده از المان‌های مثلثی تحلیل کرد و اولین مقاله را در Finite Element نوشت. در سال 1950 شرکت بوئینگ اولین کاربرد صنعتی اجزاء محدود را کلید زد و بال هواپیما را با استفاده از المان‌های مثلثی مدل‌سازی کرد. در سال 1960 پروفسور Clough برای اولین بار اصطلاح روش اجزاء محدود Finite Element Method را برای این مبحث به کار برد و در سال 1967 هم کتاب معروف Zienkiewicz نوشته شد و در سال 1970 نرم‌افزار Ansys اختراع شد و روش طراحی به خاطر ظهور Finite Element شروع شد.

مراحل اساسی روش اجزاء محدود:

شامل هفت مرحله در سه فاز است:

— فاز پیش پردازش:

۱– تفکیک مسئله به شکل المان‌های محدود یا به عبارتی تقسیم به گره‌ها و المان‌ها (Discretization)

۲– فرض یک تابع شکل که نمایانگر رفتار فیزیکی المان باشد. یعنی یک تابع پیوسته تقریبی برای حل المان.

subject: Finite Element

۳- نوشتن معادلات برای هر المان شامل ماتریس سختی و نیروی هر المان

۴- هم‌بندی یکایک المان‌ها جهت نمایش کل مسئله و تشکیل ماتریس سختی (سختی) اصلی یا کلی (Global)

۵- اعمال شرایط مرزی، شرایط اولیه و بارگذاری

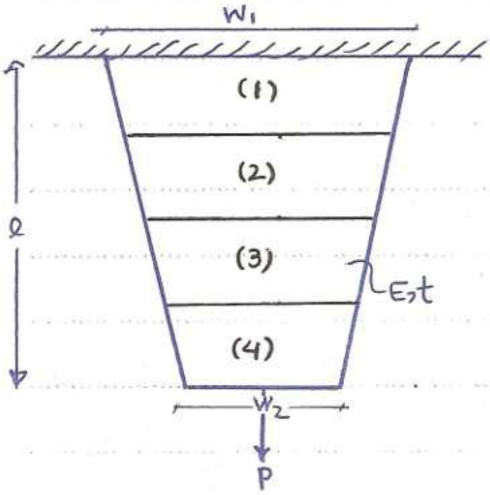
- فاز حل مسئله:

۶- حل مجموعه‌ای از معادلات خطی (غیر خطی) جبر معمولی برای یافتن مقادیر پارامتر مورد نظر در هر گره.

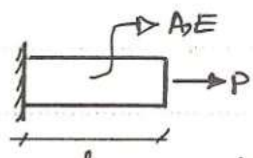
- فاز پس پردازش:

۷- یافتن اطلاعات مهم دیگر بر اساس مقادیر به دست آمده در هر گره مانند مقادیر تنش، کرنش، شار حرارتی.

مثال: تغییر مکان نقاط مختلف میله‌ای با مشخصات زیر را با اعمال وزن میله، بررسی کنید.



در مقاومت مصالح دانستیم:



$$\Delta l = \frac{PL}{AE} \rightarrow P = \frac{AE}{l}\Delta l$$

$$\rightarrow F = K\Delta$$

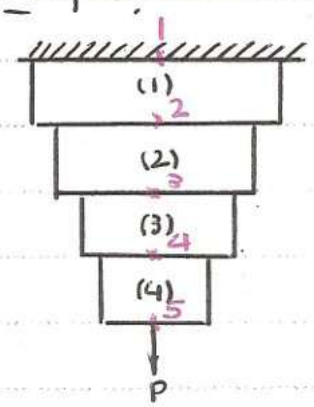
لذا می‌توانیم میله مخروطی را به صورت فنر زیر مدل‌سازی کنیم:

$$k = \frac{AE}{l}$$

میله مورد سوال، سطح مقطعش متغیر است.

آن را به 4 قسمت تقسیم می‌کنیم. مشاهده می‌شود که سطح مقطع قسمت‌های مختلف باز هم متغیر است.

به صورت زیر این قسمت‌ها را به المان تبدیل می‌کنیم:



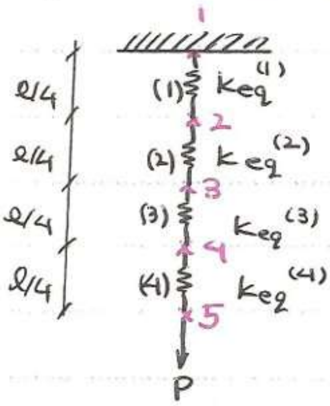
مسئله ما به 4 المان و 5 گره discretize می‌شود.

$$A^{i}_{avg} = \frac{A_i + A_{i+1}}{2}$$

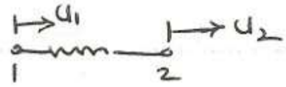
$$A_{(1)} = \frac{A_1 + A_2}{2}$$

در این حالت سازه ما شکلی به صورت گرفته است که می‌تواند به صورت فنر مدل شود. مدل فنر در صفحه بعد رسم شده است.

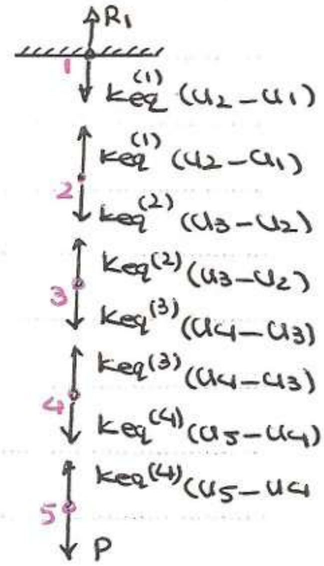
subject: Finite Element



$$k_{eq}^{(i)} = \frac{A_{avg}^{(i)} E}{l^{(i)}}$$



" میزان جابجایی یک متر "



روابط تعادل گره‌ها را می‌نویسیم:

گره 1 $\quad R_1 - k_{eq}^{(1)}(u_2-u_1) = 0$

گره 2 $\quad k_{eq}^{(1)}(u_2-u_1) - k_{eq}^{(2)}(u_3-u_2) = 0$ $\quad$ بصورت ماتریسی مرتب می‌کنیم ←

$\vdots$

گره 5 $\quad k_{eq}^{(4)}(u_5-u_4) - P = 0$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k_{eq}^{(1)} & -k_{eq}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ & k_{eq}^{(1)}+k_{eq}^{(2)} & -k_{eq}^{(2)} & 0 & 0 \\ & & k_{eq}^{(2)}+k_{eq}^{(3)} & -k_{eq}^{(3)} & 0 \\ \text{Sym} & & & k_{eq}^{(3)}+k_{eq}^{(4)} & -k_{eq}^{(4)} \\ & & & & k_{eq}^{(4)} \end{bmatrix}}_{} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}}_{} = \underbrace{\begin{bmatrix} -R_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \end{bmatrix}}_{}$$

$$\underline{K}\,\underline{u} = \underline{F}$$

$$\begin{bmatrix} k_{eq}^{(1)} & -k_{eq}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ & k_{eq}^{(1)}+k_{eq}^{(2)} & -k_{eq}^{(2)} & 0 & 0 \\ & & k_{eq}^{(2)}+k_{eq}^{(3)} & -k_{eq}^{(3)} & 0 \\ \text{Sym} & & & k_{eq}^{(3)}+k_{eq}^{(4)} & -k_{eq}^{(4)} \\ & & & & k_{eq}^{(4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

subject: Finite Element

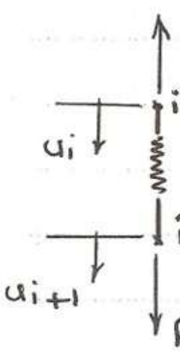
$\underline{R} = \underline{k}\,\underline{u} - \underline{F}$

$$\Big[\text{بردار عکس العمل های تکیه گاهی}\Big] = \Big[\text{ماتریس سختی}\Big]\Big[\text{بردار جابجایی}\Big] - \Big[\text{بردار نیرو}\Big]$$

حال مرحله اعمال شرایط مرزی است.

از شرایط مرزی می دانیم $u_1 = 0$ است. روش حل در اینجا این است که بجای اینکه سطر و ستون i ام را حذف کنیم، مقدار سطر و ستون i ام (درایه ii) را برابر یک قرار داده و سایر درایه های این سطر و ستون را صفر قرار دهیم.

(در جهت پایین، جهت مثبت می گیریم)



$f_i = k_{eq}^{(i)}(u_{i+1} - u_i)$

or $f_i = k_{eq}^{(i)}(u_i - u_{i+1})$

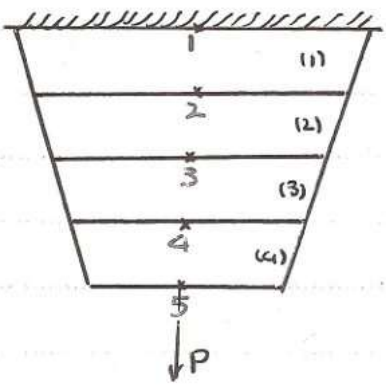
$f_{i+1} = k_{eq}^{(i)}(u_{i+1} - u_i)$

$$f_i = k_{eq}^{(i)} u_i - k_{eq}^{(i)} u_{i+1}$$
$$f_{i+1} = -k_{eq}^{(i)} u_i + k_{eq}^{(i)} u_{i+1}$$

$$\begin{bmatrix} f_i \\ f_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{eq}^{(i)} & -k_{eq}^{(i)} \\ -k_{eq}^{(i)} & k_{eq}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix}$$

Global رابطه $\underline{F} = \underline{k}\,\underline{u}$

Local رابطه $\underline{f} = \underline{k}\,\underline{u}$



	گره	
المان	i	i+1
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5

حالا نوبت به assemble کردن ماتریس های Local می رسد:

سطر i یا i+1 و ستون های مربوطه را با توجه به جدول فوق در ماتریس سختی کلی قرار می دهیم. (ر.ک. تحلیل سازه II - تحلیل ماتریسی سازه ها - دکتر نبازاده)

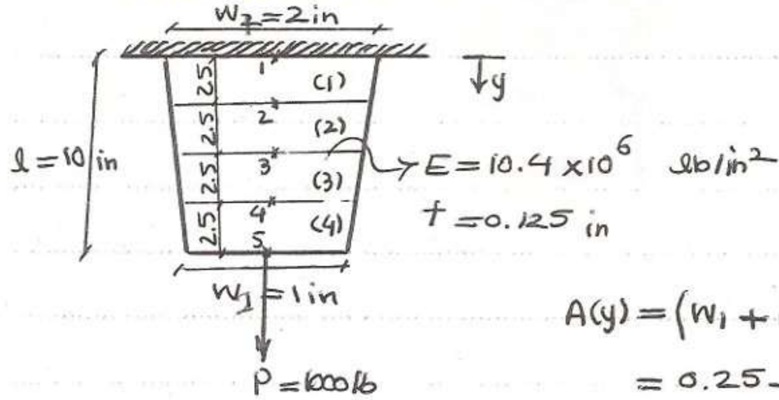
نحوهٔ assemble کردن توضیح داده شود

$[K_G][\underline{u}] = [P]$

بار خارجی

subject: Finite Element

حل با مقادیر عددی:



$$A(y) = \left(W_1 + \left(\frac{W_2 - W_1}{l}\right) y\right) t$$

$$= 0.25 - 0.0125y \quad ; \quad 0 \leq y \leq 10''$$

$$A_{avg}^{(i)} = \frac{1}{2}(A_i + A_{i+1})$$

المان	گره i	گره i+1	Aavg (in²)	Keq (lb/in)
1	1	2	0.234375	975×10^3
2	2	3	0.203125	845×10^3
3	3	4	0.17875	715×10^3
4	4	5	0.140625	585×10^3

با توجه به شرایط مرزی

$$10^3 \begin{bmatrix} \cancel{975}^{1} & \cancel{-975}^{0} & 0 & 0 & 0 \\ & 1820 & -845 & 0 & 0 \\ & & 1560 & -715 & 0 \\ & \text{Symetric} & & 1300 & -585 \\ & & & & +585 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1000 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 0.001026 \text{ in} \\ u_3 = 0.002210 \text{ in} \\ u_4 = 0.003608 \text{ in} \\ u_5 = 0.005317 \text{ in} \end{cases}$$

تمرین $\boxed{?}$: همین مسئله را با تعداد 8 المان حل کنید.

اگر مسئله فوق را با 8 المان حل نماییم جواب بصورت زیر خواهد بود (نقاط گره):

$u_1 = 0 \qquad u_2 = 0.0010268 \qquad u_3 = 0.002212 \qquad u_4 = 0.0036135$

$u_5 = 0.005328$

فاز پس پردازش:

در این فاز از اطلاعات بدست آمده، می توان سایر مقادیر مهم را بدست آورد. در این مسئله مثلاً می توانیم تنش در هر المان را بدست آوریم:

$$\sigma^{(i)} = \frac{f_i}{A_{avg}^{(i)}} = \frac{K_{eq}^{(i)}(u_{i+1} - u_i)}{A_{avg}^{(i)}} \Rightarrow$$

subject: Finite Element

$$\sigma^{(i)} = \frac{A_{avg}^{(i)} E / l \; (u_{i+1} - u_i)}{A_{avg}^{(i)}} = E\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{l}\right)$$

بصورت $\sigma^{(i)} = E\varepsilon^{(i)}$

$$\sigma^{(1)} = 10.4 \times 10^6 \left(\frac{0.001026 - 0}{2.5}\right) = 4268 \quad lb/in^2$$

$\sigma^{(2)} = 4925 \quad lb/in^2$

$\sigma^{(3)} = 5816 \quad lb/in^2$

$\sigma^{(4)} = 7109 \quad lb/in^2$

در محاسبه تنش با مشتق میزان جابجایی کار می‌کنیم. چون $\varepsilon = \frac{du}{dx}$ است ولذا دقت تنش از دقت میزان جابجایی کمتر است. به عبارت دیگر بطور کلی چنانچه مشتق وارد محاسبات شود، باعث کاهش دقت خواهد شد.

محاسبه نیروی عکس العمل: اینجا سازه معین است و نیروی عکس العمل به راحتی قابل محاسبه است. به عنوان روش کلی هم می‌توان از معادله زیر که قبلاً بدست آورده ایم استفاده نماییم:

$$R = k_{eq}^{(1)} (u_2 - u_1) = 975 \times 10^3 \times (0.001026 - 0) = 1000 \; lb$$

رابطه زیر را هم به عنوان رابطه ای دیگر برای عکس العمل های تکیه گاهی بدست آوردیم:

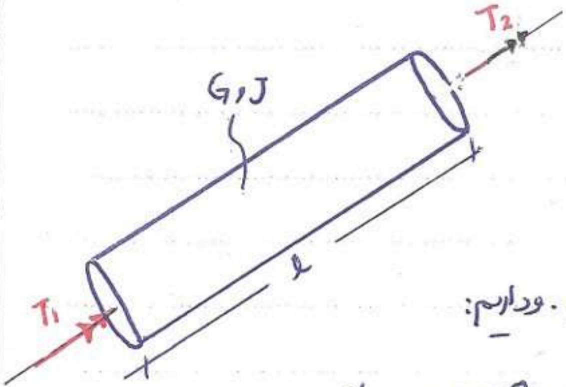
$$\underline{R} = \underline{k}\,\underline{u} - \underline{F}$$

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{Bmatrix} = 10^3 \times \begin{bmatrix} 975 & -975 & 0 & 0 & 0 \\ & 1820 & -845 & 0 & 0 \\ & & 1560 & -715 & 0 \\ & \text{symetric} & & 1300 & -585 \\ & & & & 585 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.001026 \\ 0.002210 \\ 0.003608 \\ 0.005317 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1000 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

پیچش مقاطع مدور

در پیچش مقاطع مدور اگر همه چیز ثابت باشد، $\Theta = \frac{TL}{GJ}$ خواهد بود.



$$\Theta = \frac{TL}{GJ} \Longrightarrow T = \left(\frac{GJ}{L}\right)\Theta$$

سختی پیچشی

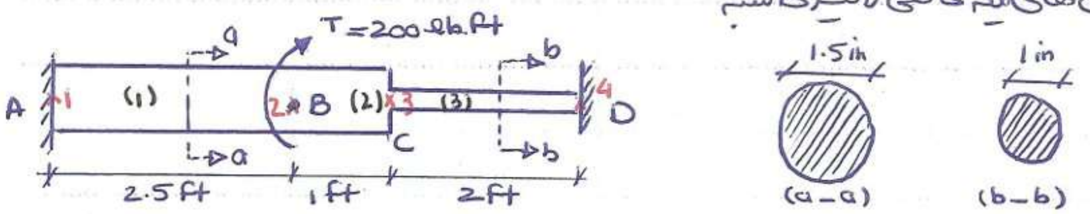
چون:

$$M = k\Theta \quad , \quad F = k\Delta$$

در این سری مسائل جهت مثبت را با پیچاننده در نظر می‌گیریم. و داریم:

$$\frac{GJ}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

مثال: با استفاده از اجزای محدود مسئله زیر را حل کرده و عکس العمل‌های تکیه‌گاهی را نیز محاسبه نمایید.



$G = 3.9 \times 10^6 \ lb/in^2 \qquad G = 4 \times 10^6 \ lb/in^2$

مسئله را به سه المان تقسیم می‌کنیم. (سه المان و چهار گره)

$$J^{(1)} = J^{(2)} = \frac{1}{2}\pi \times (0.75)^4 = 0.497 \ in^4$$

$$J^{(3)} = \frac{1}{2}\pi (0.5)^4 = 0.0982 \ in^4$$

$$K^{(1)} = \frac{3.9\times10^6 \times 0.497}{2.5\times12}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64610 & -64610 \\ -64610 & 64610 \end{bmatrix} \ lb.in$$

$$K^{(2)} = \frac{3.9\times10^6 \times 0.497}{1\times12}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 161525 & -161525 \\ -161525 & 161525 \end{bmatrix} \ lb.in$$

subject: Finite Element

$$\underset{\sim}{k}^{(3)} = \frac{4.0\times10^{6}\times 0.0982}{2\times12}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16367 & -16367 \\ -16367 & 16367 \end{bmatrix} \quad lb.in$$

المان	i	$i+1$
(1)	1	2
(2)	2	3
(3)	3	4

* $nnode = 4 \;;\; dofnode = 1$

$ndof = 4\times1 = 4$

$$\underset{\sim}{K}^{G} = \begin{bmatrix} 64610 & -64610 & 0 & 0 \\ -64610 & 226135 & -161525 & 0 \\ 0 & -161525 & 177892 & -16367 \\ 0 & 0 & -16367 & 16367 \end{bmatrix}$$

با توجه به شرط مرزی $\theta_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} \cancelto{1}{64610} & \cancelto{0}{-64610} & 0 & 0 \\ \cancelto{0}{-64610} & 226135 & -161525 & 0 \\ 0 & -161525 & 177892 & \cancelto{0}{-1637} \\ 0 & 0 & \cancelto{0}{-1637} & \cancelto{1}{1637} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -200\times12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{\sim}{\theta} = \underset{\sim}{k}^{-1}\underset{\sim}{F}$$

با توجه به شرط مرزی $\theta_4 = 0$

$\Rightarrow \quad \theta_1 = 0 \qquad \theta_2 = -0.0302 \text{ rad}$

$\theta_3 = -0.02742 \text{ rad} \qquad \theta_4 = 0$

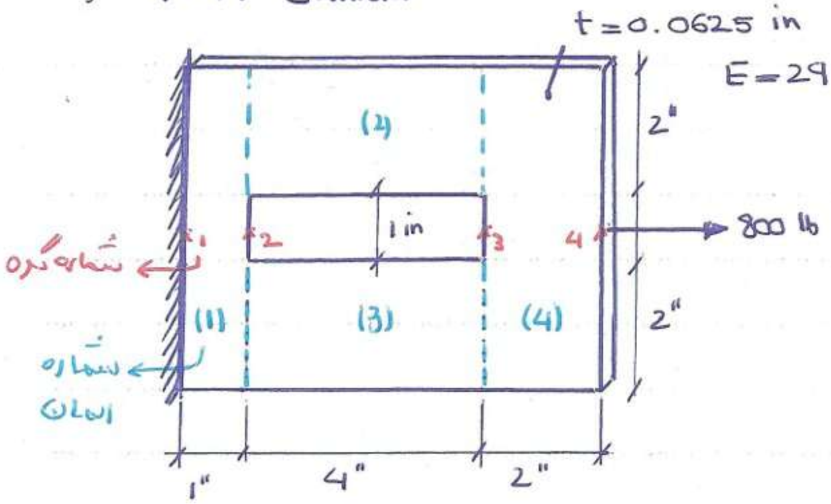
برای محاسبه عکس العمل های تکیه گاهی هم از رابطه کلی زیر استفاده می کنیم:

$$\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{k}^{(G)}\underset{\sim}{U} - \underset{\sim}{F}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_1 = 1951 \\ R_2 = 0 \\ R_3 = 0 \\ R_4 = 449 \end{cases} \quad lb.in$$

subject: Finite Element

مثال:



$E = 29 \times 10^{6}\ lb/in^{2}$

عملکرد سازه محوری است. ماتریس سختی local المانها را بدست می آوریم:

$$\underset{\sim}{k}^{(1)} = \frac{5 \times 0.0625 \times 29 \times 10^{6}}{1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 9.0625 \times 10^{6} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}$$

$$\underset{\sim}{k}^{(2)} = \underset{\sim}{k}^{3} = \frac{2 \times 0.0625 \times 29 \times 10^{6}}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 9.0625 \times 10^{5} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array}$$

$$\underset{\sim}{k}^{(4)} = \frac{5 \times 0.0625 \times 29 \times 10^{6}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 4.53125 \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array} \times 10^{6}$$

	گره	
المان	i	i+1
1	1	2
2	2	3
3	2	3
4	3	4

$$\underset{\sim}{k}^{(G)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 9.0625 & -9.0625 & 0 & 0 \\ -9.0625 & 10.875 & -1.8125 & 0 \\ 0 & -1.8125 & 6.34375 & -4.53125 \\ 0 & 0 & -4.53125 & 4.53125 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \times 10^{6}$$

شرایط مرزی 1 0

$$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{k}^{G} \underset{\sim}{u} \rightarrow 10^{6} \times \begin{bmatrix} 9.0625 & -9.0625 & & \\ -9.0625 & 10.875 & -1.8125 & \\ & -1.8125 & 6.34375 & -4.53125 \\ & & -4.53125 & 4.53125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 800 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \underset{\sim}{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8.827 \times 10^{-5} \\ 5.296 \times 10^{-4} \\ 7.062 \times 10^{-4} \end{bmatrix} in$$

مثلاً می‌خواهیم تنش را در هر المان حساب کنیم. داریم:

$$\sigma^{(1)}=E\left(\frac{u_2-u_1}{l^{(1)}}\right)=29\times10^{6}\times\left(\frac{8.827\times10^{-5}-0}{1}\right)=2500\ \text{lb/in}^2$$

به طور مشابه $\sigma^{(2)}=\sigma^{(3)}=3200\ \text{lb/in}^2 \qquad \sigma^{(4)}=2560\ \text{lb/in}^2$

مقادیر نرم افزار Ansys برای تنش در این المان ها به صورت زیر است:

$\sigma^{(2)}=\sigma^{(3)}=(3000-3500)$ psi $\longrightarrow$ چون در لبه‌های سوراخ تمرکز تنش داریم

$\sigma^{(4)}=(2200-2600$ psi$)$

نرم افزار Ansys رفتار واقعی را مدل کرده است. رفتار واقعی دیگر محوری نیست. رفتار واقعی این مسئله یک رفتار plane stress است و باید از المان های دو بعدی برای تحلیل مسئله استفاده کنیم. در اینجا میدان جابجایی دو بعدی است، متغیر u نبوده، بلکه u-v است.

فرمول بندی اجزاء محدود به روش می‌نیمم انرژی پتانسیل کل:

(در حالت یک بعدی)

انرژی کرنشی $U=\frac{1}{2}\int_v \sigma\varepsilon\,dv=\frac{1}{2}\int_v E\varepsilon^2\,dv$

انرژی کرنشی المان محوری (e) $\quad U^{(e)}=\frac{1}{2}\int_{v(e)}E\varepsilon^{2(e)}\,dv^{(e)} \xrightarrow{dv^{(e)}=A_{avg}^{(e)}\,dx}$

$$U^{(e)}=\frac{A_{avg}E}{2}\int_0^l\left(\frac{u_{i+1}-u_i}{l}\right)^2dx=\frac{A_{avg}E}{2l}\left(u_{i+1}^2+u_i^2-2u_iu_{i+1}\right)$$

المان (e) مابین گره های i و $i+1$ قرار دارد.

کار خارجی انجام شده توسط نیروی F_i که از گره i اعمال می‌شود $=F_iu_i$

$$\Pi=\sum_{e=1}^{\overset{\text{تعداد المان ها}}{n}}U^{(e)}-\sum_{i=1}^{\overset{\text{تعداد گره ها}}{m}}F_iu_i$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial u_i}=\underbrace{\sum_{e=1}^{n}\frac{\partial U^{(e)}}{\partial u_i}}_{Ku}-\sum_{i=1}^{m}F_i\frac{\partial u_i}{\partial u_i}=0\ ,\quad i=1,2,3,\dots,m$$

subject: Finite Element

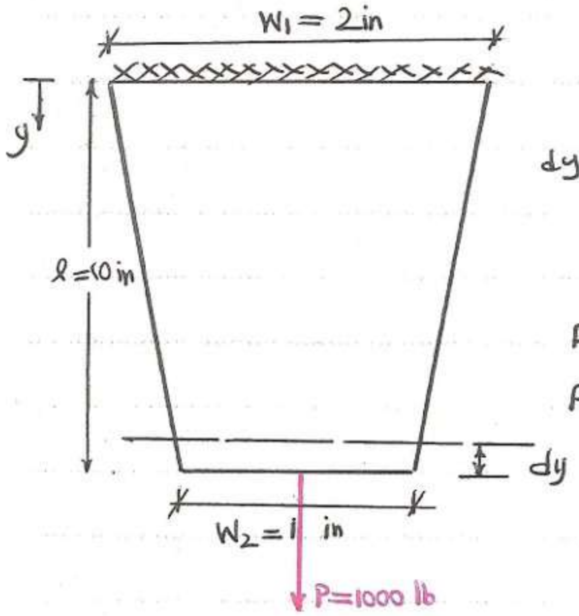
$$\frac{\partial U^{(e)}}{\partial u_i} = \frac{A_{avg}E}{l}(u_i - u_{i+1})$$

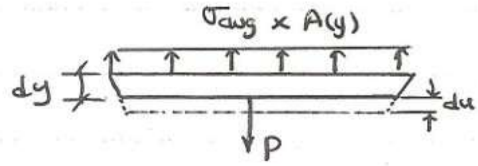
$$\frac{\partial U^{(e)}}{\partial u_{i+1}} = \frac{A_{avg}E}{l}(u_{i+1} - u_i) \longrightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial U^{(e)}}{\partial u_i} \\ \frac{\partial U^{(e)}}{\partial u_{i+1}} \end{bmatrix} = \frac{A_{avg}E}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix}$$

در اکثر مسائل Finite Element از این پس از روش مینیموم انرژی کرنشی استفاده می کنیم.

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(F_i u_i) = F_i \qquad \frac{\partial}{\partial u_{i+1}}(F_{i+1} u_{i+1}) = F_{i+1}$$

دوباره سراغ همان سؤال میله با مقطع متغیر می رویم. این بار می خواهیم جواب دقیق را بدست آوریم:





$$\varepsilon = \frac{du}{dy}$$

$$P - \sigma_{avg} A(y) = 0$$

$$P - E\varepsilon A(y) = 0$$

$$\longrightarrow EA(y)\frac{du}{dy} = P$$

$$\int_0^u du = \int_0^y \frac{P}{EA(y)}dy \longrightarrow u(y) = \frac{Pl}{Et(W_2 - W_1)}\left[\ln\left(W_1 + \left(\frac{W_2 - W_1}{l}\right)y\right) - \ln W_1\right]$$

با ۲ المان دو گره ای

y	جواب دقیق	جواب اجزا محدود	با ۵ المان
0	0	0	0
2.5"	0.001027	0.001026	0.001027
5"	0.002213	0.002210	0.002212
7.5"	0.003615	0.003608	0.003614
10.0"	0.005333	0.005317	0.005329

subject: Finite Element

فرمول بندی به روش مانده وزنی:

$$EA(y)\frac{du}{dy} - P = 0 \;;\quad u(0)=0$$

برای حل این مسئله ای تابع آزمایشی $\bar{u}(y)$ (trial function) را فرض می‌کنیم به گونه‌ای که شرایط مرزی‌مان را هم این تابع می‌بایست ارضا نماید. به عنوان یک فرض داریم:

$$\bar{u}(y) = c_1 y + c_2 y^2 + c_3 y^3$$

$$\Rightarrow EA(y)\frac{d\bar{u}}{dy} - P = R$$

حل ما شامل می‌شود کردن مانده باقی مانده در سمت راست رابطه فوق است.

$$\int_D \omega R \, dD = 0 \longrightarrow$$

دامنه مسئله

اینکه تابع w چه تابعی در انتگرال فوق شود، حضرش Method را ایجاد می‌کند.

۱- روش تلفیقی (Collocation Method):

$$w = \delta(y - y_i)$$

تابع دیراک

در مسئله مورد قبل: $\int_0^l \delta(y-y_i)\,R(y)\,dy = R(y_i) = 0$

خاصیت: $\int f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = f(x_0)$

روش فوق این معنی را می‌دهد که انتگرال را روی نقاط مختلف مورد نظرمان صفر می‌کنیم.

در تابع حدس زده شده قبل سه مجهول c_1، c_2 و c_3 را داریم. لذا باید سه نقطه را انتخاب کرده خطا را در آن سه نقطه صفر کنیم تا کمیت‌هامان بدست آیند. این که این سه نقطه کدام نقاط باشند به انتخاب خودمان و شرایط مسئله است. مثلاً فرض می‌کنیم:

$$R(l/3) = R(2l/3) = R(l) = 0$$

$$\longrightarrow c_1 = 423.0776 \times 10^{-6}$$

$$c_2 = 21.65 \times 10^{-15}$$

$$c_3 = 1.153848 \times 10^{-6}$$

از اینکه $c_2 = 0$ است، می‌توان استنباط کرد که تابع مورد نظرمان یک تابع درجه 3 است و نکته مهم تر اینکه تابعمان یک تابع فرد است.

۲- روش زیردامنه Sub-Domain Method:

در روش زیر دامنه، انتگرال خطا را در چند بازه صفر می‌کنیم. فرضاً برای مثال قبل به جای صفر کردن خطا در سه نقطه، خطا را در سه بازه صفر می‌کنیم.

$$W_i = \Delta H_i(x) = H(x - x_i) - H(x - x_{i+1})$$

دستگاه مقابل : $\int_0^{l/3} R\,dy = 0 \qquad \int_{l/3}^{2l/3} R\,dy = 0 \qquad \int_{2l/3}^{l} R\,dy = 0$

با محاسبه از روابط بالا داریم :

$$\Rightarrow \tilde{u}(y) = 391.35088 \times 10^{-6}\, y + 6.075 \times 10^{-6}\, y^2 + 0.80961092 \times 10^{-6}\, y^3$$

۳- روش گالرکین : Galerkin's Method

در این روش هم باید $\int_0^l w_i R\,dy = 0$ شود.

$$\tilde{u}(y) = C_1 y + C_2 y^2 + C_3 y^3$$

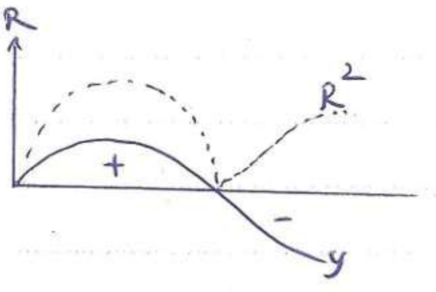
در این روش : $w_i = \varphi_i \quad ; \quad \varphi_1 = y \quad \varphi_2 = y^2 \quad \varphi_3 = y^3$

$$\rightarrow \int_0^l y R\,dy = 0 \qquad \int_0^l y^2 R\,dy = 0 \qquad \int_0^l y^3 R\,dy = 0$$

با انجام چنین محاسباتی :

$$\tilde{u}(y) = 400.642 \times 10^{-6}\, y + 4.006 \times 10^{-6}\, y^2 + 0.935 \times 10^{-6}\, y^3$$

٤- روش می‌نیمم مجموع مربعات : Least squares Method



باید تابع $\int_a^b R^2\,dy$ ، می‌نیمم شود.

$$\Rightarrow \int_a^b \frac{\partial R}{\partial C_i} R\,dy = 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3, \ldots, N$$

به نوعی می‌توان در این روش نوشت : $w_i = \dfrac{\partial R}{\partial C_i}$

دو دستگاه مقابل داریم : $\int_0^l \frac{\partial R}{\partial C_1} R\,dy = 0 \qquad \int_0^l \frac{\partial R}{\partial C_2} R\,dy = 0 \qquad \int_0^l \frac{\partial R}{\partial C_3} R\,dy = 0$

$$\Rightarrow \tilde{u}(y) = 389.773 \times 10^{-6}\, y + 6.4412 \times 10^{-6}\, y^2 + 0.789 \times 10^{-6}\, y^3$$

جواب حاصل از ۴ روش فوق را مقایسه می‌کنیم تا ببینیم کدام یک بیشتر است.

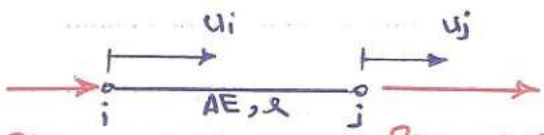
subject: Finite Element

مقایسه جواب حاصل از روش های مانده وزنی :

روش ←	دقیق	تلفیقی	زیردامنه	گالرکین	مینیمم مربعات
$y=0$	0	0	0	0	0
		4	2	3	1
$y=2.5''$	0.001027	0.001076	0.001029	0.001041	0.001027
$y=5''$	0.002213	0.002259	0.002209	0.002220	0.002208
$y=7.5''$	0.003615	0.003660	0.003618	0.003624	0.003618
$y=10''$	0.005333	0.005384	0.005330	0.005342	0.005331

تحلیل خرپاها با استفاده از روش اجزای محدود :

خرپا متشکل از اعضای میله‌ای دوسر مفصل است که ساز و کار انتقال نیرو در اعضا محوری است :



$f_i = k(u_i - u_j)$ $f_j = k(u_j - u_i)$

$k = \frac{AE}{l}$

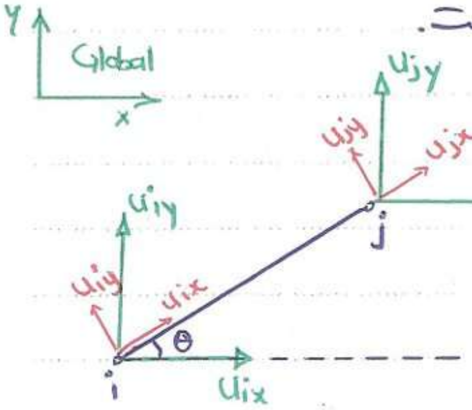
در مورد جهت اعمالی داریم :

$$\begin{bmatrix} f_i \\ f_j \end{bmatrix} = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}$$

در خرپاها همه اعضا لزوماً افقی نیستند و اعضای مایل هم داریم. برای چنین اعضایی می‌توان نوشت :

دو محور مختصات در اجزای محدود داریم : Local و Global .

همواره مختصات local ، محور x آن بر محور عضو منطبق است.



در گره i :

$$u_{ix} = u_{ix}\cos\theta - u_{iy}\sin\theta$$
$$u_{iy} = u_{ix}\sin\theta + u_{iy}\cos\theta$$

در گره j :

$$u_{jx} = u_{jx}\cos\theta - u_{jy}\sin\theta$$
$$u_{jy} = u_{jx}\sin\theta + u_{jy}\cos\theta$$

subject: Finite Element

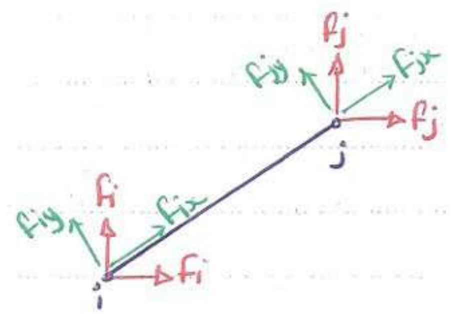
روابط صفحه قبل را در قالب برداری ـ ماتریسی می نویسیم. داریم:

$$\begin{bmatrix} U_{ix} \\ U_{iy} \\ U_{jx} \\ U_{jy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ u_{jx} \\ u_{jy} \end{bmatrix}$$

به عبارتی: $\underline{U} = \underline{T}\,\underline{u}$ ← local بردارهای جابجایی

Global بردارهای جابجایی

مشابه همین روابط برای نیروها هم برقرار است. به عبارتی:



$$\underline{F} = \underline{T}\,\underline{f} \qquad \underline{F} = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \end{bmatrix} \qquad \underline{f} = \begin{bmatrix} f_{ix} \\ f_{iy} \\ f_{jx} \\ f_{jy} \end{bmatrix}$$

هدف نهایی بدست آوردن ماتریس سختی یک المان خرپایی در مختصات Global است:

در مختصات محلی المان $\underline{f} = \underline{k}\,\underline{u}$

$$\begin{bmatrix} f_{ix} \\ f_{iy} \\ f_{jx} \\ f_{jy} \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ u_{jx} \\ u_{jy} \end{bmatrix} , \quad k = \frac{AE}{l}$$

$$\underline{U} = \underline{T}\,\underline{u} \longrightarrow \underline{u} = \underline{T}^{-1}\underline{U}$$

$$\underline{f} = \underline{k}\,\underline{u} \longrightarrow \underline{T}^{-1}\underline{F} = \underline{k}\,\underline{T}^{-1}\underline{U} \xrightarrow[\underline{T}]{\text{طرفین} \times} \underline{F} = \underbrace{\underline{T}\,\underline{k}\,\underline{T}^{-1}}_{\underline{k}^{(e)}}\underline{U}$$

یادآوری: $\underline{T}^{-1} = \underline{T}^{T}$

ولذا ماتریس سختی Global المان بصورت زیر بدست می آید:

subject: Finite Element

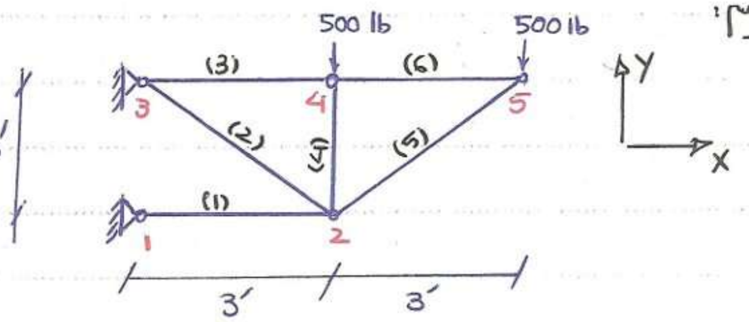
$$\underset{\sim}{k}^{(e)} = \frac{AE}{l}\begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ & s^2 & -sc & -s^2 \\ \text{Symetric} & & c^2 & sc \\ & & & s^2 \end{bmatrix}$$

مثال ۸: خرپای سازه ی نشان داده شده در شکل را با استفاده از روش اجزای محدود بطور کامل تحلیل نمایید.

برای تمامی اعضا هم داریم:

$E = 1.9 \times 10^6 \ lb/in^2 \qquad A = 8 \ in^2$

گره ها و المان ها را ابتدا شماره گذاری می کنیم:



درجه آزادی برای هر گره: $dofnode = 2$ تعداد گره ها: $nnode = 5$

کل درجات آزادی: $ndof = 5 \times 2 = 10$

برای المان های (1)، (3)، (4) و (6): $k = \frac{AE}{l} = \frac{8 \times 1.9 \times 10^6}{3 \times 12} = 4.22 \times 10^5 \ lb/in$

برای المان های (2) و (5): $k = \frac{AE}{l} = \frac{8 \times 1.9 \times 10^6}{3\sqrt{2} \times 12} = 2.98 \times 10^5 \ lb/in$

المان (1): $\theta = 0$

$$\underset{\sim}{k}^{(1)} = 4.22 \times 10^5 \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \end{array}$$

المان (2): $\theta = 135^\circ$

$$\underset{\sim}{k}^{(2)} = 1.49 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

المان (3): $\theta = 0^\circ$

المان (4): $\theta = 90^\circ$

المان (5): $\theta = 45^\circ$

المان (6): $\theta = 0^\circ$

subject: Finite Element

$$
\underset{\sim}{K} = 10^5 \times \begin{bmatrix}
4.22 & 0 & -4.22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-4.22 & 0 & 7.2 & 0 & -1.49 & 1.49 & 0 & 0 & -1.49 & -1.49 \\
0 & 0 & 0 & 7.2 & 1.49 & -1.49 & 0 & -4.22 & -1.49 & -1.49 \\
0 & 0 & -1.49 & 1.49 & 5.71 & -1.49 & -4.22 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1.49 & -1.49 & -1.49 & 1.49 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -4.22 & 0 & 8.44 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -4.22 & 0 & 0 & 0 & 4.22 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1.49 & -1.49 & 0 & 0 & -4.22 & 0 & 5.71 & 1.49 \\
0 & 0 & -1.49 & -1.49 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.49 & 1.49
\end{bmatrix}
$$

صدق شرایط مرزی

$$
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -500 \\ 0 \\ -500 \end{bmatrix}
= 10^5 \times \begin{bmatrix}
4.22 \to 1 & 0 & -4.22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 \to 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-4.22 & 0 & 7.2 & 0 & -1.49 & 1.49 & 0 & 0 & -1.49 & -1.49 \\
0 & 0 & 0 & 7.2 & 1.49 & -1.49 & 0 & -4.22 & -1.49 & -1.49 \\
0 & 0 & -1.49 & 1.49 & 5.71 \to 1 & -1.49 & -4.22 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1.49 & -1.49 & -1.49 & 1.49 \to 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -4.22 & 0 & 8.44 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -4.22 & 0 & 0 & 0 & 4.22 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1.49 & -1.49 & 0 & 0 & -4.22 & 0 & 5.71 & 1.49 \\
0 & 0 & -1.49 & -1.49 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.49 & 1.49
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} U_{1x} \\ U_{1y} \\ U_{2x} \\ U_{2y} \\ U_{3x} \\ U_{3y} \\ U_{4x} \\ U_{4y} \\ U_{5x} \\ U_{5y} \end{bmatrix}
$$

شرایط مرزی : $U_{1x}=0$ $U_{1y}=0$ $U_{3x}=0$ $U_{3y}=0$

درجه آزادی سطر 1 2 5 6

$\rightarrow$ $U_{1x}=0$ $U_{1y}=0$ $U_{2x}=-0.00355$ $U_{2y}=-0.01026$ $U_{3x}=0$ $U_{3y}=0$ $U_{4x}=0.00118$

$U_{4y}=-0.0114$ $U_{5x}=0.00240$ $U_{5y}=-0.0195$ (برحسب in)

عکس العمل های تکیه گاهی را هم بدست آوریم:

$$\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{K}^{(G)} \underset{\sim}{U} - \underset{\sim}{F}$$

$$\underset{\sim}{R} = \begin{bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2x} \\ R_{2y} \\ R_{3x} \\ R_{3y} \\ R_{4x} \\ R_{4y} \\ R_{5x} \\ R_{5y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1500 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1500 \\ 1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{lb}$$

بدست آوردن نیروهای هر المان:

برای هر المان

$$f_{ix} = k(u_{ix} - u_{jx})$$

$$k = \frac{AE}{l}$$

$$\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{u} \longrightarrow \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{T}^{-1} \underset{\sim}{U}$$

به عنوان مثال می خواهیم نیروی المان (5) را بدست بیاوریم:

$$\begin{bmatrix} u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{5x} \\ u_{5y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos 45 & \sin 45 & 0 & 0 \\ -\sin 45 & \cos 45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 45 & \sin 45 \\ 0 & 0 & -\sin 45 & \cos 45 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{T}^{-1}} \begin{bmatrix} -0.00355 \\ -0.001026 \\ 0.00240 \\ -0.0195 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} u_{2x} = -0.00976 \\ u_{2y} = -0.00474 \\ u_{5x} = -0.01209 \\ u_{5y} = -0.01549 \end{bmatrix} \Rightarrow f = 2.98 \times 10^5 \times (u_{2x} - u_{5x}) = 696 \text{ lb} \quad (C)$$

برای بدست آوردن تنش هر عضو داریم:

$$\sigma^{(i)} = k(u_{ix} - u_{jx}) = \frac{E}{l}(u_{ix} - u_{jx})$$

$$\sigma^{(5)} = 87 \text{ psi}$$

subject: Finite Element

المان های یک بعدی:

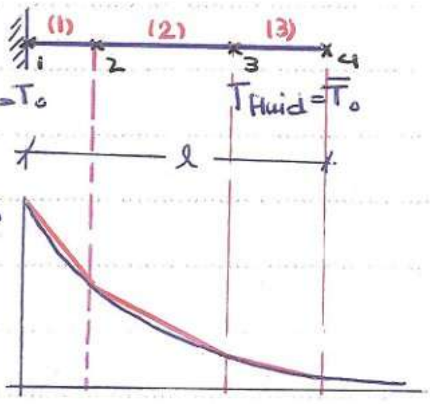
المان های یک بعدی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی ODE استفاده می شوند. به عبارتی هر مسئله ای که به صورت یک ODE مدل شود، با استفاده از المان های یک بعدی تحلیل می شود. پرکاربردترین گروه المان های یک بعدی، المان های خطی هستند.

المان های خطی:

معادله ای مثل $EA\frac{d^2u}{dx^2} - P(x) = 0$ همراه با دو شرط مرزی، یک المان خطی است.

فرض می کنیم میله ای مثل شکل زیر با مقادیر حرارتی مشخص داریم. دمای ابتدای میله را T_{base} و دمای انتهای میله را T_{fluid} فرض می کنیم.

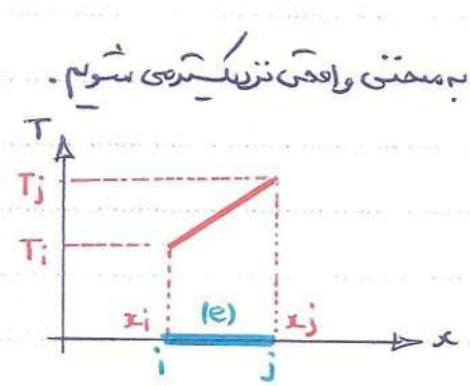
توزیع حرارت هم مطابق نمودار زیر است.



در فصل قبل به روش های باقیمانده وزنی عمل کردیم و $T(x)$ را یک تابع چند جمله ای مرتبه n در نظر می گرفتیم و ضرایب را تعیین می کردیم. در اینجا برای یافتن T، تابع را به صورت n تابع خطی در نظر می گیریم. فرض می کنیم که تغییرات تابع در طول یک المان، به صورت خطی است.

طول المان ها می تواند برای قسمت هایی که تغییرات حرارتی شدید است کوچک تر شده و در جاهایی که تغییرات محسوس نیست، بزرگتر شود. در مثال فوق، تابع دقیق T را با سه خط تقریب زدیم.

در مناطقی که تغییرات تابع شدید است، هرچه المان را کوچکتر کنیم، به منحنی واقعی نزدیکتر می شویم.



$$T^{(e)} = C_1 + C_2 X$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_i = C_1 + C_2 x_i \\ T_j = C_1 + C_2 x_j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{T_i X_j - T_j X_i}{X_j - X_i} \\ C_2 = \dfrac{T_j - T_i}{X_j - X_i} \end{cases}$$

subject: Finite Element

با جایگذاری و مرتب کردن داریم:

$$T^{(e)} = \left(\frac{X_j - X}{X_j - X_i}\right)T_i + \left(\frac{X - X_i}{X_j - X_i}\right)T_j$$

به عبارتی : $T^{(e)} = S_i T_i + S_j T_j$

که S_i و S_j توابع شکلی یا shape function هستند. S_i و S_j به ترتیب توابع شکل تغییر گره های i و j هستند. قابل دقت است که هر گره، تابع شکل تغییر خودش را دارد.

وظیفه ی تابع شکل این است که ارتباط بین مقادیر گره ای تابع را با خود تابع در طول المان تعیین کند. به تابع شکل می توان بطوری توابع انترپلاسیون هم گفت.

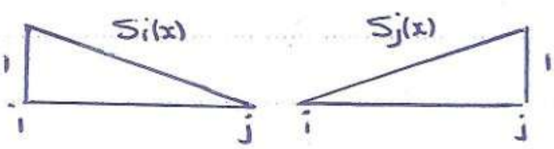
میدان تغییر شکل $u^{(e)} = S_i u_i + S_j u_j = [S_i \quad S_j]\begin{bmatrix}u_i\\ u_j\end{bmatrix} = \underline{S}^T \underline{u}$

در حالت کلی هر پارامتر دلخواهی مثل $\psi^{(e)}$:

$$\psi^{(e)} = [S_i \quad S_j]\begin{bmatrix}\psi_i\\ \psi_j\end{bmatrix}$$

خواص توابع شکل خطی :

۱- مقدار تابع شکل در گره تعریف شده برابر با مقدار واحد (۱) و در سایر گره ها برابر با صفر می باشد.



۲- به عنوان دومین خاصیت برای توابع شکل داریم: $S_i + S_j = 1$ (همواره)

۳- این خاصیت فقط در المان های خطی برقرار است:
مجموع مشتقات شکل برابر صفر است.

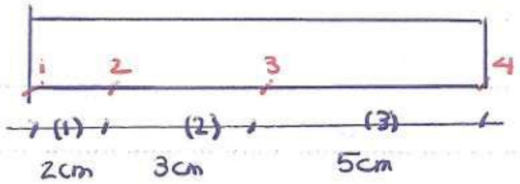
$$\frac{d}{dx}(S_i) + \frac{d}{dx}(S_j) = 0$$

مثال: جهت تعیین توزیع دما در طول یک پره از المان های یک بعدی خطی استفاده شده است. دماهای گرهی و موقعیت آن ها در شکل نشان داده شده است. دمای پره در:

الف) $X = 4cm$ ب) $X = 8cm$ چقدر می باشد؟

subject: Finite Element

$T_{base} = 50°c$ $\qquad$ $T_{fluid} = 18°c$



$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 41 \\ 34 \\ 20 \end{bmatrix} °c$$

در حل مسئله فوق یک معادله دیفرانسیل درجه 2 داشته‌ایم و به 2 شرط مرزی نیاز داشته‌ایم. از آنجایی که $T_f=18$ و $T_4=20$ با هم برابر نیستند می‌توان این استدلال را نمود که مقدار T_f به عنوان شرط مرزی انتخاب نشده است. چهار حالت می‌توان برای شرایط مرزی متصور شد:

۱- T_b و T_f $\qquad$ ۲- مشتق T_b و T_f $\qquad$ ۳- مشتق T_b و مشتق T_f

۴- T_b و مشتق T_f

ومسلماً شرایط مرزی انتخاب شده برای این مسئله یکی از حالت های 3 یا 4 است.

المان x_i $\qquad$ مختصاتی که دمایش را می‌خواهیم بدست آوریم

$$T^{(2)} = S_2^{(2)} T_2 + S_3^{(2)} T_3 = \left(\frac{x_3 - x}{x_3 - x_2}\right) T_2 + \left(\frac{x - x_2}{x_3 - x_2}\right) T_3 = \left(\frac{5-4}{3}\right) 41 + \left(\frac{4-2}{3}\right) 34$$

المان x_j $\qquad$ طول المان

درجه حرارت در $x = 4^{cm}$ $= 36.3°c$

$x = 8cm$ در المان سوم قرار می‌گیرد. لذا المان سوم را انتخاب کرده و باید معادلات را با توابع شکل گره‌های 3 و 4 نوشت:

$$T^{(3)} = S_3^{(3)} T_3 + S_4^{(3)} T_4$$
$$= \left(\frac{x_4 - x}{x_4 - x_3}\right) T_3 + \left(\frac{x - x_3}{x_4 - x_3}\right) T_4$$
$$= \left(\frac{10-8}{5}\right) 34 + \left(\frac{8-5}{5}\right) 20 = 25.6°c$$

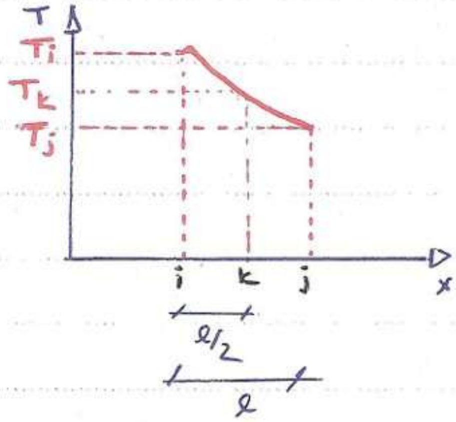
درجه حرارت در $x = 8^{cm}$:

بیان شده بود که توابع شکل هر گره یکتا هستند. اما در مثال فوق فرضاً $S_3^{(2)}$ و $S_3^{(3)}$ داریم. این اشکال به خاطر مختصات Global است که وارد می‌شود. اگر هر المان را در مختصات local بررسی کنیم، این مشکل مرتفع می‌گردد.

استفاده از المان‌های خطی یک مشکل دارد و آن این است که اکثر جواب‌های معادلات دیفرانسیل به صورت منحنی بوده و خط هیچ‌گاه نمی‌تواند به خوبی یک curve را مدل کند. می‌توان تعداد المان‌ها

subject: Finite Element

دارزیاد کرد اما این کار هم محاسبات را به شدت افزایش می دهد.
می توان به جای فرض تغییر خطی، تابع را به صورت سهمی در نظر گرفت و این مسئله را تابعی حل نمود.
در این حالت برای المان به گره سوم k هم نیاز داریم. این گره در وسط المان در نظر گرفته می شود (طبق فرض)
بهینه المانی، المان سه گره ای یک بعدی یا المان درجه 2 یا المان رسته بالاتر Higher Order
می گویند.



$$T^{(e)} = C_1 + C_2 x + C_3 x^2$$

$$\begin{cases} T_i = C_1 + C_2 x_i + C_3 x_i^2 \\ T_k = C_1 + C_2 x_k + C_3 x_k^2 \\ T_j = C_1 + C_2 x_j + C_3 x_j^2 \end{cases}$$

با جایگذاری و مرتب کردن داریم:

مشابه حالت خطی : $T^{(e)} = S_i T_i + S_j T_j + S_k T_k$

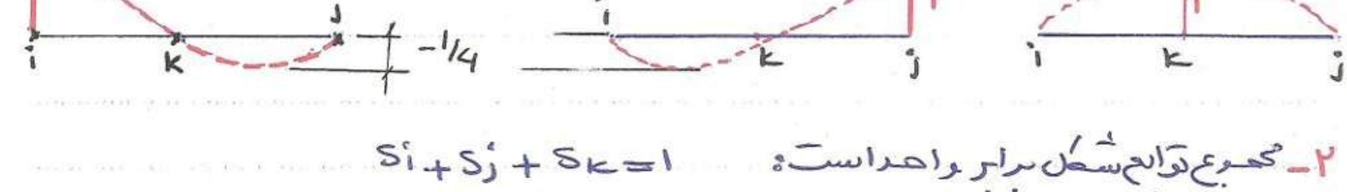
$$\begin{cases} S_i = \frac{2}{l^2}(x - x_j)(x - x_k) \\ S_j = \frac{2}{l^2}(x - x_i)(x - x_k) \\ S_k = \frac{-4}{l^2}(x - x_i)(x - x_j) \end{cases}$$

به عنوان یادآوری ذکر می شود که درجه حرارت در اینجا یک مثال بود و هر تابعی مثل φ را می توان با استفاده از توابع شکلی، اینترپلاسیون شود:

$$\varphi^{(e)} = \begin{bmatrix} S_i & S_j & S_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \varphi_k \end{bmatrix}$$

خواص توابع شکل درجه دوم:

۱- مقدار تابع در گره ی متناظر برابر واحد و در سایر گره ها برابر صفر است.



۲- مجموع توابع شکل برابر واحد است: $S_i + S_j + S_k = 1$

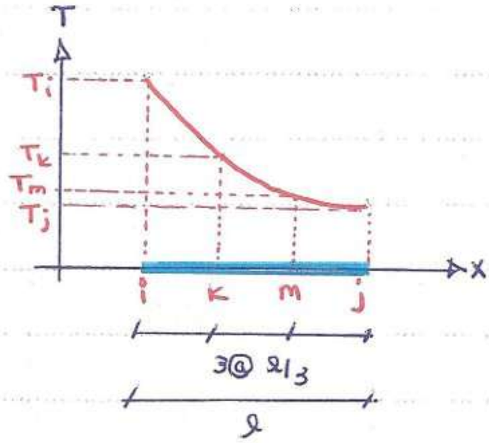
subject: Finite Element

یادآوری می‌شود که رابطه خاصیت سوم در توابع المان‌های خطی اینجا برقرار نیست. یعنی:

$$\frac{d}{dx}(S_i) + \frac{d}{dx}(S_j) + \frac{d}{dx}(S_k) \neq 0$$

المان‌های یک‌بعدی درجه سوم:

order 3 به عنوان یک order خوب و با دقت کافی شناخته شده است. در این حالت تغییرات تابع در طول المان، به عنوان یک تابع مرتبه سه خواهد بود.



$$T^{(e)} = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3$$

در اینجا جای‌گذاری مقادیر گرهی و حل کردن چهار معادله چهار مجهول حاصل انرژی دشوار است و هرچه ثابت‌های C بیشتر شوند، کار سخت‌تر می‌شود. می‌خواهیم تابع شکل را بدون حل کردن چهار معادله چهار مجهول حل کنیم. داریم:

با استفاده از خواص تابع شکل:

$$S_i = \alpha\,(x - x_k)(x - x_m)(x - x_k)$$

$$S_i(x = x_i) = 1 \Rightarrow 1 = \alpha\,(-l/3)(-2l/3)(-l) \rightarrow \alpha = \frac{-9}{2l^3}$$

$$\Rightarrow S_i(x) = -9/2l^3\,(x - x_k)(x - x_m)(x - x_j)$$

$$S_j(x) = +9/2l^3\,(x - x_i)(x - x_k)(x - x_m)$$

$$S_k(x) = \beta(x - x_i)(x - x_m)(x - x_j)$$

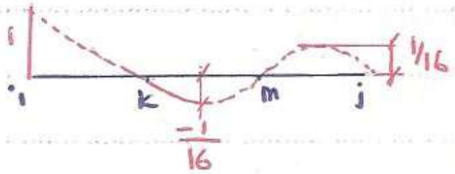
$$S_k(x = x_k) = 1 = \beta \times \frac{2l^3}{27} \rightarrow \beta = \frac{27}{2l^3}$$

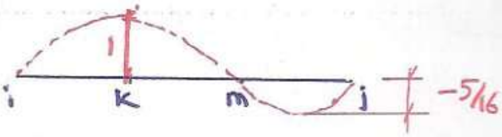
$$\Rightarrow S_k(x) = \frac{27}{2l^3}(x - x_i)(x - x_m)(x - x_j)$$

$$S_m(x) = -\frac{27}{2l^3}(x - x_i)(x - x_k)(x - x_j)$$

خواص این توابع مشابه خواص توابع شکل درجه دوم است.

subject: Finite Element





تعیین توابع شکل المان های لاگرانژی در حالت کلی : (برای مرتبه n ام)

$$S_K(x) = \prod_{M=1}^{N} \frac{x - x_M \text{ omitting } x - x_K}{x_K - x_M \text{ omitting } x_K - x_K}$$

برای بررسی رابطه فوق المان سه گرهی زیر را در نظر می گیریم :

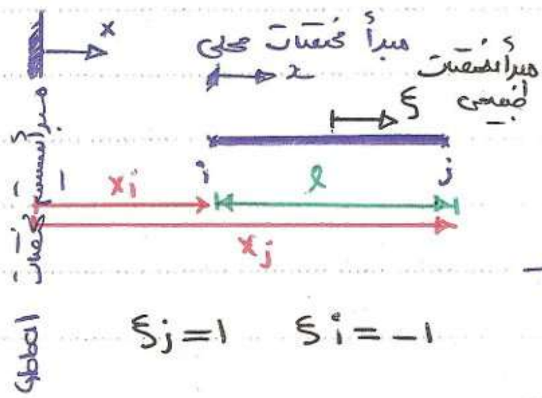
$N = 2$

با استفاده از رابطه فوق : $S_i(x) = \dfrac{(x - x_k)(x - x_j)}{(x_i - x_k)(x_i - x_j)}$

$$\rightarrow S_i(x) = \frac{(x - x_k)(x - x_j)}{-l/2 * -l} = \frac{2}{l^2}(x - x_k)(x - x_j)$$

local , Global and Natural Cordinate مختصات اصلی ، محلی و طبیعی :

Global در مختصات $S_i(X) = \dfrac{X_j - X}{X_j - X_i}$ $\quad S_j(X) = \dfrac{X - X_i}{X_j - X_i}$



$\xi_j = 1 \quad \xi_i = -1$

از روی شکل واضح است : $X = X_i + x$

$$\rightarrow S_i(x) = \frac{\overbrace{X_j - X_i}^{l} - x}{l} = 1 - \frac{x}{l}$$

$0 \leq x \leq l$

$$S_j(x) = \frac{X_i + x - X_i}{l} = \frac{x}{l}$$

نمایش تابع شکل در مختصات محلی خیلی کار را ساده تر کرده و تابع شکلی در این نمایش همواره یکی است .

از آن جایی که $dx = dX$ است می توان انتگرال های به صورت زیر را ساده سازی کرد :

$$\int_{X_i}^{X_j} S_i(X)\,dX = \int_0^l S_i(x)\,dx$$

subject: Finite Element

نگرش جدیدی مطرح شد که انتگرال های تغییر فوق را باز هم ساده‌تر کرده و به سمت روش‌های عددی برد.
در این نگرش برای بیان آن، مختصات طبیعی با مبدأ در وسط المان تعریف می‌شود.

تعریف می‌شود $0 \leq x \leq l$ $\quad \xi = \frac{2x}{l} - 1$ در مختصات طبیعی

or

$$x = \frac{l}{2}(1+\xi)$$

$dx = \frac{l}{2} d\xi$ و تابع زیر انتگرال که

$$\Rightarrow \begin{cases} S_i(\xi) = \dfrac{1-\xi}{2} \\ S_j(\xi) = \dfrac{1+\xi}{2} \end{cases} \qquad -1 \leq \xi \leq +1$$

همچنین پیداست که توابع شکل در نوشتار فوق، باز هم خواص خود را حفظ کرده اند.

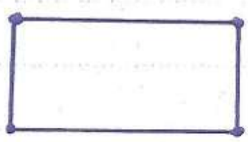
$$T^{(e)} = \frac{1}{2}(1-\xi)T_i + \frac{1}{2}(1+\xi)T_j$$

$$x = \frac{1}{2}(1-\xi)x_i + \frac{1}{2}(1+\xi)x_j$$

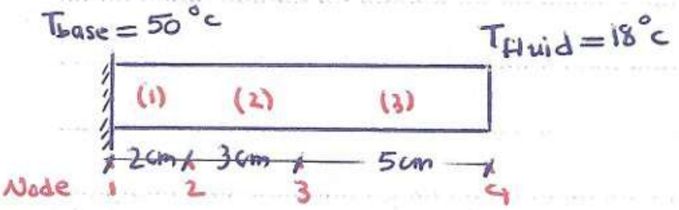
$$X = \frac{1}{2}(1-\xi)X_i + \frac{1}{2}(1+\xi)X_j$$

درصورتی که برای بیان شکل هندسی مسئله (مختصات نقاط) از توابع شکل استفاده شود، المان درنظر گرفته شده المان ایزوپارامتری نامیده می‌شود.

فرض می‌کنیم یک المان مستطیلی با مقادیر مشخص داریم.



مثال: دمای پره را در مثال قبل در موقعیت اصلی $X = 8cm$ با استفاده از مختصات محلی تعیین کنید.
همچنین دمای پره را در موقعیت اصلی $X = 7.5^{cm}$ با استفاده از مختصات طبیعی تعیین نمایید.



$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 41 \\ 34 \\ 18 \end{bmatrix} {}^{\circ}C$$

$$T^{(3)} = S_3T_3 + S_4T_4$$
$$= \left(1-\frac{x}{l}\right)T_3 + \left(\frac{x}{l}\right)T_4 = \left(1-\frac{3}{5}\right)\times 34 + \left(\frac{3}{5}\right)\times 20 = 25.6\ ^\circ c$$

ب) $x = 7.5^{cm}$

مختصات نقطه‌ی فوق، دقیقاً وسط المان سوم است. با استفاده از مختصات طبیعی داریم:

$$T^{(3)} = S_3(\xi)T_3 + S_4(\xi)T_4$$
$$= \frac{1}{2}(1-\xi)T_3 + \frac{1}{2}(1+\xi)T_4 = \frac{1}{2}(T_3+T_4) = 27\ ^\circ c$$

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال $\int_{x_i}^{x_j} S_j^2\, dx$ با استفاده از:

الف) دستگاه مختصات اصلی یا کلی (Global).

ب) مختصات محلی و

ج) مختصات طبیعی. طول المان $x_j - x_i = l$: نقض برابس

زیرا تابع شکل مربوط به یک المان خطی است.

الف) دستگاه مختصات اصلی یا کلی

$$\int_{x_i}^{x_j} S_j^2\, dx = \int_{x_i}^{x_j} \left(\frac{x-x_i}{l}\right)^2 dx = \frac{(x-x_i)^3}{3l^2}\Bigg|_{x_i}^{x_j} = \frac{l}{3}$$

ب) مختصات محلی

مختصات اصلی $x_i \leq x \leq x_j \rightarrow$ مختصات محلی $0 \leq x \leq l \;;\; dx = dx$

$$\int_{x_i}^{x_j} S_j^2\, dx = \int_0^l \left(\frac{x}{l}\right)^2 dx = \frac{x^3}{3l^2}\Bigg|_0^l = \frac{l}{3}$$

ج) دستگاه مختصات طبیعی

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{4}(1+\xi)^2 \frac{l}{2}\, d\xi = \frac{l}{8}(1+\xi)^3 \times \frac{1}{3}\Bigg|_{-1}^{+1} = \frac{l}{3}$$

انتگرال عددی: معادله‌ی تربیع گوس - لژاندر:

در اینجا در حقیقت هدف پیدا کردن انتگرال‌هایی به صورت $\int_a^b f(x)dx$ به صورت عددی است. روش گوس لژاندر بهترین روش عددی برای یافتن حاصل انتگرال‌هایی به صورت فوق است. این معادله بیان می‌دارد:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{i=1}^{n} W_i\, f(x_i)$$

در این روش نقاط خاصی را در دامنه مورد انتگرال‌گیری پیدا کرده و به هر کدام از نقاط وزنی می‌دهیم (w) که

مجموع حاصلضرب تابع وزن در مقدار تابع در آن نقاط خاص برابر انتگرال است.

در این روش x را بصورت زیر تغییر متغیر می‌دهیم:

$x = c_0 + c_1\lambda \quad , \quad a \le x \le b$ بطوریکه $\Rightarrow -1 \le \lambda \le +1$

$$\begin{cases} a = c_0 + c_1(-1) \\ b = c_0 + c_1(+1) \end{cases} \Rightarrow \quad c_0 = \frac{b+a}{2} \quad , \quad c_1 = \frac{b-a}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{b+a}{2} + \left(\frac{b-a}{2}\right)\lambda \xrightarrow[\text{نظر می‌گیریم}]{\text{این انتگرال را در}} \int_{-1}^{+1} f(\lambda)\,d\lambda = \sum_{i=1}^{n} w_i\, f(\lambda_i)$$

$$dx = \frac{b-a}{2}\,d\lambda$$

فرمول فوق به فرمول n نقطه‌ای گوس لژاندر موسوم است که معمولاً در سخت‌ترین حالات $n = 10$ کافی است. اما درگشت مختلف ضرایب را برای $n = 20$ هم بدست آورده اند.

[از چند جمله‌ای های لژاندر استفاده کرده‌ایم] $\quad (1 , \lambda , \lambda^2 , \lambda^3)$: برای حالت $n = 2$

$$f(\lambda) = 1 \Rightarrow \int_{-1}^{+1} (1)\,d\lambda = 2 = w_1(1) + w_2(1)$$

$$f(\lambda) = \lambda \Rightarrow \int_{-1}^{+1} \lambda\,d\lambda = 0 = w_1(\lambda_1) + w_2(\lambda_2)$$

$$f(\lambda) = \lambda^2 \Rightarrow \int_{-1}^{+1} \lambda^2\,d\lambda = \frac{2}{3} = w_1(\lambda_1)^2 + w_2(\lambda_2)^2$$

$$f(\lambda) = \lambda^3 \Rightarrow \int_{-1}^{+1} \lambda^3\,d\lambda = 0 = w_1(\lambda_1)^3 + w_2(\lambda_2)^3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_1 = w_2 = 1.0000000 \\ \lambda_1 = -\lambda_2 = 0.577350269\,^{*} \end{cases}$$

* مقدار فوق همان $\frac{\sqrt{3}}{3}$ است.

تعداد نقاط	عامل وزنی (w_i)	نقاط منفرد (λ_i)
2	$w_1 = 1.0000000$ $w_2 = 1.0000000$	$\lambda_1 = -\lambda_2 = 0.577350269$
3	$w_1 = 0.55555556$ $w_2 = 0.88888889$ $w_3 = w_1$	$\lambda_1 = -\lambda_3 = 0.774596669$ $\lambda_2 = 0$

subject: Finite Element

مثال: حاصل انتگرال زیر را با روش گوس-لژاندر بدست بیاورید.

$$\int_2^6 (x^2+5x+3)\,dx = 161.3333333$$

تغییر متغیر میدهیم $n=2 \quad , \quad b=6 \; ; \; a=2 \qquad x=\frac{6+2}{2}+\frac{6-2}{2}\lambda = 4+2\lambda$

$$\int_2^6 (x^2+5x+3)\,dx = \int_{-1}^{+1} \underbrace{2\left[(4+2\lambda)^2+5(4+2\lambda)+3\right]}_{f(\lambda)} d\lambda \cong w_1 f(\lambda_1)+w_2 f(\lambda_2)$$

$w_1=w_2=1 \qquad \longrightarrow I = 50.644452676 + 110.688880653$

$\lambda_1=-\lambda_2=0.577350269 \qquad = 161.3333333$

نکته: اگر تابع $f(x)$ تحت انتگرال گیری یک چندجمله‌ای (polynomial) باشد، انتگرال n نقطه‌ای گوس-لژاندر برای تابع polynomial تا درجه $2n-1$ دارای دقت کامل است.

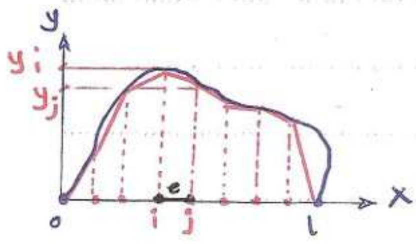
برای انتگرال مثال قبل هم می‌توان مستقیم بنویسیم:

$$\int_{x_i}^{x_j} S_j^2\,dx = \frac{l}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{(1+\xi)^2}{4}d\xi = \frac{l}{8}\left[w_1 f(\xi_1)+w_2 f(\xi_2)\right] = 0.3333333\,l$$

حل یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی مرتبه 2 با شرایط مرزی دلخواه به کمک روش اجزای محدود:

معادله دیفرانسیل مرتبه 2 در حالت کلی: $C_1\frac{d^2y}{dx^2}+C_2\frac{dy}{dx}+C_3y+C_4=f(x) \quad , \quad 0\leq x\leq L$

فرض می‌کنیم شرایط مرزی هم مشخص باشد.



محدوده‌ی محور x را المان بندی کرده ایم و برای المان ij، مشخصات مورد نظر را نوشته ایم.

$$y^{(e)} = S_iy_i + S_jy_j \quad , \quad x_i\leq x\leq x_j$$

فرض می‌کنیم المان ها، طول برابر دارند.

$$\begin{cases} S_i = \dfrac{x_j - x}{l} \\ S_j = \dfrac{x - x_i}{l} \end{cases}$$

subject: Finite Element

در اصل مسئله می‌خواهیم معادله دیفرانسیل order 2 را حل کنیم.

برای توابع شکل در حالت کلی داریم: $S = a + bX$

در این روش با استفاده از روش گالرکین حاصل آمده و خطای وزنی را برای گره‌های i و j صفر می‌کنیم. یعنی به جای تابع وزنی در فرمول گالرکین از تابع شکلی استفاده می‌کنیم.

$$R_i = \int_D W_i \bar{R}\, dD = 0$$

با استفاده از روش گالرکین:

$$R_i^{(e)} = \int_{x_i}^{x_j} S_i \left[C_1 \frac{d^2 y^{(e)}}{dx^2} + C_2 \frac{dy^{(e)}}{dx} + C_3 y^{(e)} + C_4 - F(x) \right] dx = 0$$

$$R_j^{(e)} = \int_{x_i}^{x_j} S_j \left[C_1 \frac{d^2 y^{(e)}}{dx^2} + C_2 \frac{dy^{(e)}}{dx} + C_3 y^{(e)} + C_4 - F(x) \right] dx = 0$$

برای سادگی، انتگرال‌های فوق را تفکیک می‌کنیم:

$$R_i^{(e)} = C_1 \int_{x_i}^{x_j} S_i \frac{d^2 y^{(e)}}{dx^2} dx + C_2 \int_{x_i}^{x_j} S_i \frac{dy^{(e)}}{dx} dx + C_3 \int_{x_i}^{x_j} S_i y^{(e)} dx + C_4 \int_{x_i}^{x_j} S_i dx - \int_{x_i}^{x_j} F(x) dx = 0$$

$$R_i^{(e)} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 \xrightarrow{\text{به طور مشابه}} R_j^{(e)} = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5$$

$$\underbrace{I_1 = C_1 \int_{x_i}^{x_j} S_i \frac{d^2 y^{(e)}}{dx^2} dx}_{\text{Strong Formulation}}$$

مشکل محاسبه انتگرال فوق این است که چون y را خطی در نظر گرفتیم مشتق دوم برابر صفر خواهد بود لذا انتگرال فوق قابل محاسبه نیست.

$$I_1 = \underbrace{C_1 S_i \frac{dy^{(e)}}{dx} \Big|_{x_i}^{x_j} - C_1 \int_{x_i}^{x_j} \frac{dS_i}{dx} \frac{dy^{(e)}}{dx} dx}_{\text{Weak Formulation}} = -C_1 \frac{dy^{(e)}}{dx} \Big|_{x=x_i} + \frac{C_1}{\ell} y^{(e)} \Big|_{x_i}^{x_j}$$

$$= -C_1 \frac{dy^{(e)}}{dx} \Big|_{x=x_i} + \frac{C_1}{\ell} (y_j - y_i)$$

$$\frac{dy^{(e)}}{dx} = \frac{dS_i}{dx} y_i + \frac{dS_j}{dx} y_j = \frac{1}{\ell} (y_j - y_i)$$

subject: Finite Element

$$I_2=c_2\int_{x_i}^{x_j} s_i\frac{dy^{(e)}}{dx}dx=\frac{c_2}{l}(y_j-y_i)\int_{x_i}^{x_j} s_i dx=+\frac{c_2}{2}(y_j-y_i)$$

$$I_3=c_3\int_{x_i}^{x_j} s_i(s_iy_i+s_jy_j)dx=c_3y_i\int_{x_i}^{x_j} s_i^2dx+c_3y_j\int_{x_i}^{x_j} s_is_jdx$$

$$=c_3\frac{l}{3}y_i+c_3\frac{l}{6}y_j$$

$$I_4=c_4\int_{x_i}^{x_j} s_idx=c_4\frac{l}{2}$$

$$I_5=-\int_{x_i}^{x_j} s_if(x)dx$$

I_5 هم نسبت به تابع $f(x)$، مقدار معلومی دارد و تعیین می‌شود.

بطور مشابه: $J_1=c_1\frac{dy^{(e)}}{dx}\Big|_{x=x_j}+\frac{c_1}{l}(y_j-y_i)$

$$J_2=-\frac{c_2}{2}(y_i-y_j) \quad ; \quad J_3=c_3\frac{l}{6}y_i+c_3\frac{l}{3}y_j$$

$$J_4=c_4\frac{l}{2} \quad ; \quad J_5=-\int_{x_i}^{x_j} s_jf(x)dx$$

میدانیم: $\begin{bmatrix} R_i^{(e)} \\ R_j^{(e)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} c_1\frac{dy^{(e)}}{dx}\Big|_{x=x_i} \\ -c_1\frac{dy^{(e)}}{dx}\Big|_{x=x_i} \end{bmatrix}+\frac{c_1}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_i \\ y_j \end{bmatrix}+\frac{c_2}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_i \\ y_j \end{bmatrix}-\frac{c_3l}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_i \\ y_j \end{bmatrix}$$

$$=\underbrace{\frac{c_4l}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} I_5 \\ J_5 \end{bmatrix}}_{\text{که بردار نیرو}}$$

با تکرار دستگاه معادلات فوق برای تمامی المان‌ها و جمع کردن مقتضی (assembling) آنها، شرایط مرزی را صدق داده و با حل دستگاه چند معادله چند مجهول، مجهولات گرهی بدست می‌آید.

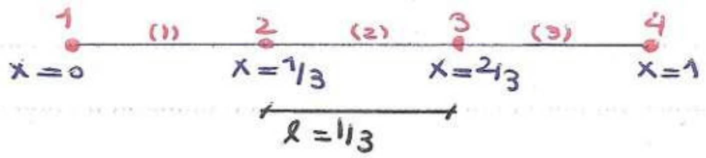
مثال: معادله دیفرانسیل زیر را در محدوده‌ی $0 \leqslant x \leqslant 1$ با فرض سه المان خطی مساوی بصورت عددی

subject: Finite Element.

حل مسایل

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u = -x \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \quad , \quad u(0) = u(1) = 0$$

انجام :



$C_1 = 1 \; , \; C_2 = 0 \; , \; C_3 = -1$

$C_4 = 0 \; , \; f(x) = -x$

برای المان شماره ی (1) : $\quad i=1 \quad j=2$

$$\begin{bmatrix} \left.\dfrac{du^{(1)}}{dx}\right|_{x=0} \\ \left.\dfrac{-du^{(1)}}{dx}\right|_{x=\frac{1}{3}} \end{bmatrix} + \frac{1}{1/3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \left(-1 \times \frac{1/3}{6}\right)\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\int_0^{1/3} S_1^{(1)} f(x)\,dx = -\int_0^{1/3}\left(\dfrac{1/3 - x}{1/3}\right)(-x)\,dx = 0.01852 \\ -\int_0^{1/3} S_2^{(1)} f(x)\,dx = -\int_0^{1/3}\left(\dfrac{x-0}{1/3}\right)(-x)\,dx = 0.03704 \end{bmatrix}$$

برای المان شماره ی (2) : $\quad i=2 \quad j=3$

$$\begin{bmatrix} \left.\dfrac{du^{(2)}}{dx}\right|_{x=\frac{1}{3}} \\ \left.\dfrac{-du^{(2)}}{dx}\right|_{x=\frac{2}{3}} \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\int_{1/3}^{2/3} S_2^{(2)} f(x)\,dx = -\int_{1/3}^{2/3}\left(\dfrac{2/3 - x}{1/3}\right)(-x)\,dx = 0.07407 \\ -\int_{1/3}^{2/3} S_3^{(2)} f(x)\,dx = -\int_{1/3}^{2/3}\left(\dfrac{x - 1/3}{1/3}\right)(-x)\,dx = 0.09259 \end{bmatrix}$$

برای المان شماره ی (3) : $\quad i=3 \quad , \quad j=4$

$$\begin{bmatrix} \left.\dfrac{du^{(3)}}{dx}\right|_{x=\frac{2}{3}} \\ \left.\dfrac{-du^{(3)}}{dx}\right|_{x=1} \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} + \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.12963 \\ 0.14815 \end{bmatrix}$$

subject: Finite Element

شرایط تکیه‌گاهی

$$\begin{bmatrix} u'(0) \\ \dfrac{-du^{(1)}}{dx}\Big|_{x=\frac{1}{3}} + \dfrac{du^{(2)}}{dx}\Big|_{x=\frac{1}{3}} \\ \dfrac{-du^{(2)}}{dx}\Big|_{x=\frac{2}{3}} + \dfrac{du^{(3)}}{dx}\Big|_{x=\frac{2}{3}} \\ -u'(1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3.111 & -2.944 & 0 & 0 \\ -2.944 & 3.111+3.111 & -2.944 & 0 \\ 0 & -2.944 & 3.111+3.111 & -2.944 \\ 0 & 0 & -2.944 & 3.111 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

انتقال به آنطرف

انتقال به آنطرف

$u_1 = 0$, $u_4 = 0$

$$= \begin{bmatrix} 0.01852 - u'(0) \\ 0.03704 + 0.07407 = 0.1111 \\ 0.09259 + 0.12963 = 0.2222 \\ 0.14815 + u'(1) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.04478 \\ 0.0569 \\ 0 \end{bmatrix}$$

صفر می‌کنیم

صفر می‌کنیم

$$u^{(1)} = S_1^{(1)} u_1 + S_2^{(1)} u_2 = 0.1343\,x \qquad 0 \leq x \leq \frac{1}{3}$$

$$u^{(2)} = S_2^{(2)} u_2 + S_3^{(2)} u_3 = 0.03266 + 0.03636\,x \qquad \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$$

$$u^{(3)} = S_3^{(3)} u_3 + S_4^{(3)} u_4 = 0.1707 - 0.1707\,x \qquad \frac{2}{3} \leq x \leq 1$$

مثلاً در $x = \frac{1}{2}$:

از اجزاء محدود : $u(x=\frac{1}{2}) = 0.03266 + 0.03636 \times \frac{1}{2} = 0.05084$

راه‌حل دقیق : $u(x) = \dfrac{2e\sinh x}{1-e^2} + x \Rightarrow u(x=\frac{1}{2}) = 0.05659$

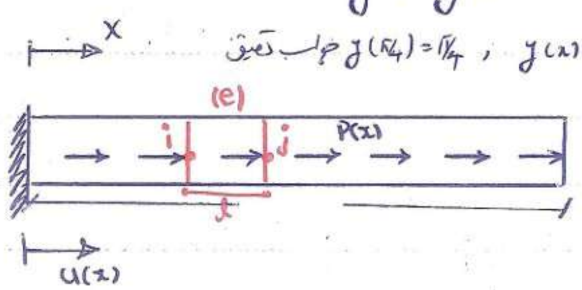
تمرین: با استفاده از المان لاگرانژی مرتبه دوم معادله دیفرانسیل مرتبه دوم را مجدداً بصورت پارامتریک حل نمایید. با کمک نتایج بدست آمده مسئله فوق را برای سه المان مرتبه دو تکرار نموده و نتایج را با نتایج حاصل از المان خطی مقایسه کنید.

$$y'' + 4y = 4\cos 2x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 0$$

جواب دقیق $y(\pi/4) = \pi/4$, $y(x) = \cos 2x + x\sin 2x$

مثال سازه‌ای:

تغییر شکل الاستیک سازه محوری را بدست آورید.



subject: Finite Element

معادله حاکم بر یک سازه محوری الاستیک با شکل زیر قابل نمایش است:

$$\begin{cases} EA\dfrac{d^2u}{dx^2} - P(x) = 0 \\ u(x=0)=0 \qquad \text{[شرط مرزی]} \end{cases}$$

نیروی محوری $N = EA\dfrac{du}{dx}$

$EA\dfrac{du}{dx}(x=L)=0$ [شرط مرزی]

نیروی محوری در انتهای تیر صفر است چرا $\sigma = E\varepsilon = E\dfrac{du}{dx}$; $N = \sigma A = EA\dfrac{du}{dx}$

از یک المان دو نودی ساده برای حل معادله فوق استفاده می کنیم. طول المان l است.

$$\begin{cases} C_1 = EA \ , \quad C_2 = C_3 = C_4 = 0 \\ f(x) = P(x) \end{cases}$$

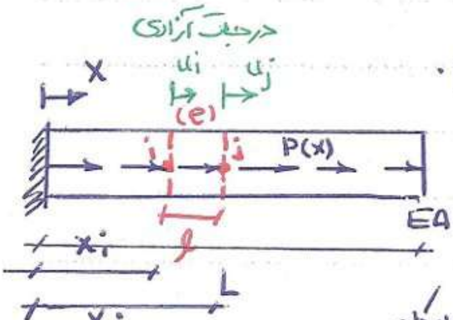
با توجه به رابطه ای که برای المان دو گره ای بدست آورده ایم (در طول درس)، برای المان دو گره ای فوق دستگاه معادلات بصورت زیر می شود:

ماتریس سختی یک المان دو گره ای یا خرپایی

برای المان (e):

$$\begin{bmatrix} EA\dfrac{du}{dx}\Big|_{x=x_i} \\ -EA\dfrac{du}{dx}\Big|_{x=x_j} \end{bmatrix} + \underbrace{\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{K^{(e)}}\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\int_{x_i}^{x_j} S_i P(x)\,dx \\ -\int_{x_i}^{x_j} S_j P(x)\,dx \end{bmatrix}}_{f^{(e)}}$$

فرمول بندی مسئله با روش می نیمم انرژی پتانسیل کل:



همان مسئله ی قبل را تحت بارگذاری دلخواه P(x) در نظر می گیریم.

برای حل مسئله، انرژی پتانسیل المان (e) را می نویسیم:

$$\Pi^{(e)} = U^{(e)} - W^{(e)}$$

انرژی پتانسیل کل — انرژی کرنشی داخلی — انرژی ناشی از بارهای خارجی

انرژی کرنشی داخلی همیشه از رابطه کلی زیر حساب می شود:

در حالت کلی $U = \dfrac{1}{2}\int_V \underline{\sigma}^T \underline{\varepsilon}\, dV$

در حالت یک بعدی $\sigma = E\varepsilon \rightarrow U = \dfrac{1}{2}\int_V \sigma\varepsilon\, dV = \dfrac{1}{2}\int_V E\varepsilon^2\, dV$

V حجم المان است.

subject: Finite Element

اعضای محوری و شرایط یک بعدی در نظر گرفته و انرژی کرنشی داخلی شان را از رابطه فوق بدست می آوریم :

$$U^{(e)} = \frac{1}{2}\int_{V^{(e)}} E\varepsilon^{(e)^2}\, dV^{(e)}$$

از طرفی در مسائل سازه های با عملکرد محوری : $\varepsilon^{(e)} = \dfrac{du^{(e)}}{dx}$

در اجزای محدود تبدیل میدان پیوسته به مجموع وزنی توابع شکل است. بعبارتی :

$$u^{(e)} = S_i u_i + S_j u_j = [\,S_i \quad S_j\,]\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \underline{S}^T \bar{\underline{u}} = \bar{\underline{u}}^T \underline{S}$$

$$\frac{du^{(e)}}{dx} = \begin{bmatrix} \dfrac{dS_i}{dx} & \dfrac{dS_j}{dx} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \underline{B}\,\bar{\underline{u}}$$

$$U^{(e)} = \frac{1}{2}\int_{V^{(e)}} E\varepsilon^{(e)^2}\, dV^{(e)} = \frac{1}{2}\int_{V^{(e)}} E\varepsilon^{(e)^2} A\,dx = \frac{1}{2}\int_{x_i}^{x_j} \varepsilon^{(e)} E A \varepsilon^{(e)}\, dx \quad (*)$$

$$\underline{\varepsilon}^{(e)} = \underline{B}\bar{\underline{u}} \rightarrow (\underline{\varepsilon}^{(e)})^2 = \bar{\underline{u}}^T \underline{B}^T \underline{B}\,\bar{\underline{u}}$$

$$* \rightarrow U^{(e)} = \frac{1}{2}\int_{x_i}^{x_j} (\varepsilon^{(e)})^T E A\, \varepsilon^{(e)}\, dx = \boxed{\frac{1}{2}\int_{x_i}^{x_j} \bar{\underline{u}}^T \underline{B}^T E A \underline{B}\,\bar{\underline{u}}\, dx}$$

حال به محاسبه $W^{(e)}$ می پردازیم. کاری که نیروهای خارجی انجام میدهند کاری است که نیروی $P(x)$ انجام میدهد:

$$W^{(e)} = \int_{x_i}^{x_j} P(x)\, u^{(e)}\, dx = \int_{x_i}^{x_j} \bar{\underline{u}}^T \underline{S}\, P(x)\, dx$$

$$\Pi^{(e)} = \frac{1}{2}\int_{x_i}^{x_j} \bar{\underline{u}}^T \underline{B}^T E A \underline{B}\,\bar{\underline{u}}\, dx - \int_{x_i}^{x_j} \bar{\underline{u}}^T \underline{S}\, P(x)\, dx$$

شرط پایداری سازه ← می نیمم شدن انرژی پتانسیل کل ← $\dfrac{\partial \Pi^{(e)}}{\partial \bar{\underline{u}}^T} = 0 \Rightarrow$

$$\left(\int_{x_i}^{x_j} \underline{B}^T E A \underline{B}\, dx\right)\bar{\underline{u}} - \int_{x_i}^{x_j} \underline{S}\, P(x)\, dx = 0 \Rightarrow \underbrace{\left(\int_{x_i}^{x_j} \underline{B}^T E A \underline{B}\, dx\right)}_{\underline{k}^{(e)}}\bar{\underline{u}} = \underbrace{\int_{x_i}^{x_j} \underline{S}\, P(x)\, dx}_{\underline{f}^{(e)}}$$

همواره در حالت کلی : $\dfrac{\partial U^{(e)}}{\partial \bar{\underline{u}}^T} = \underline{k}^{(e)}$

subject: Finite Element

همواره درحالت کلی:

$$\frac{\partial U^{(e)}}{\partial \bar{\underset{\sim}{u}}^T}=\underset{\sim}{k}^{(e)} \qquad \int_D \underset{\sim}{S}\,P(D)\,dD=\underset{\sim}{f}^{(e)}$$

داریم:

$$\Pi^{(e)}=\frac{1}{2}\int_{x_i}^{x_j}\bar{\underset{\sim}{u}}^T \underset{\sim}{B}^T EA\,\underset{\sim}{B}\,\bar{\underset{\sim}{u}}\,dx-\int_{x_i}^{x_j}\bar{\underset{\sim}{u}}^T \underset{\sim}{S}\,P(x)\,dx$$

$S_j=S_j(x)$ $\quad S_i=S_i(x)$ ← برای راحتی کار از مختصات محلی استفاده میکنیم ← $dx=dx$ جزء

$$\underset{\sim}{B}=\left[\frac{dS_i}{dx} \quad \frac{dS_j}{dx}\right] \qquad \underset{\sim}{k}^{(e)}=\int_0^{\ell}\underset{\sim}{B}^T EA\,\underset{\sim}{B}\,dx$$

برای یک المان دوگره ای یک‌بعدی:

$$\begin{cases} S_i=1-\dfrac{x}{\ell} \\ S_j=\dfrac{x}{\ell}\end{cases}$$

برای بدست آوردن ماتریس سختی المان، باید بردار B را بدست آوریم:

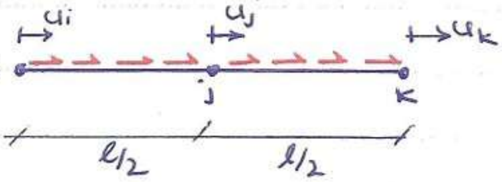
$$\underset{\sim}{B}=\left[\frac{-1}{\ell} \quad \frac{1}{\ell}\right]$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{k}^{(e)}=EA\int_0^{\ell}\begin{bmatrix}-1/\ell \\ 1/\ell\end{bmatrix}\left[\frac{-1}{\ell} \quad \frac{1}{\ell}\right]dx=EA\int_0^{\ell}\begin{bmatrix}1/\ell^2 & -1/\ell^2 \\ -1/\ell^2 & 1/\ell^2\end{bmatrix}dx$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{k}^{(e)}=\frac{EA}{\ell}\begin{bmatrix}1 & -1 \\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{f}^{(e)}=\int_0^{\ell}\begin{bmatrix}S_i \\ S_j\end{bmatrix}q\,dx=q\int_0^{\ell}\begin{bmatrix}1-x/\ell \\ x/\ell\end{bmatrix}dx=\begin{bmatrix}q\ell/2 \\ q\ell/2\end{bmatrix}$$

تعیین ماتریس سختی و بردار نیروی المان یک‌بعدی 3 گره ای:



از قبل می‌دانیم که توابع شکل یک المان 3 گره‌ای بصورت زیرند:

$$S_i=\left(\frac{x}{\ell}-1\right)\left(\frac{2x}{\ell}-1\right)$$

$$S_k=4\left(\frac{x}{\ell}\right)\left(1-\frac{x}{\ell}\right)$$

$$S_j=\frac{x}{\ell}\left(2\frac{x}{\ell}-1\right)$$

$$\bar{\underset{\sim}{u}}=\begin{bmatrix}u_i \\ u_k \\ u_j\end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{B}=\left[\frac{dS_i}{dx} \quad \frac{dS_k}{dx} \quad \frac{dS_j}{dx}\right]=\left[\frac{4x}{\ell}-3 \quad 4-\frac{8x}{\ell} \quad \frac{4x}{\ell}-1\right]\times 1/\ell$$

برای ماتریس سختی المان داریم:

subject: Finite Element

$$\underset{\sim}{k}^{(e)}=\frac{EA}{l^2}\int_0^l \begin{bmatrix}4x/l-3\\ 4-8x/l\\ 4x/l-1\end{bmatrix}\left[\frac{4x}{l}-3 \quad 4-\frac{8x}{l} \quad \frac{4x}{l}-1\right]dx \Rightarrow$$

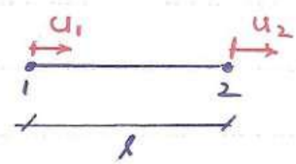
برای محاسبه‌ی انتگرال های مسئله‌ی فوق، تغییر متغیری مثل زیر می‌دهیم:

$$\frac{x}{l}=u \rightarrow x=lu \rightarrow dx=l\,du$$

$$\underset{\sim}{K}^{(e)}=\frac{EA}{3l}\begin{bmatrix}7 & -8 & 1\\ sym & 16 & -8\\ & & 7\end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{f}^{(e)}=ql\int_0^1\begin{bmatrix}(u-1)(2u-1)\\ 4u(1-u)\\ u(2u-1)\end{bmatrix}du=\frac{ql}{6}\begin{bmatrix}1\\4\\1\end{bmatrix}$$

تعیین توابع شکل به روش کلی:

$$u(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots \quad = \langle 1 \quad x \quad x^2 \quad \dots\rangle\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\ \vdots\end{bmatrix}=\underset{\sim}{P}(x)\,\underset{\sim}{a} \qquad (1)$$



در المان فوق $u(x)=a_0+a_1x$

یا به عبارتی $u(x)=\underbrace{\langle 1 \quad x\rangle}_{\underset{\sim}{P}(x)}\underbrace{\begin{bmatrix}a_0\\a_1\end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{a}}$

و شرایط مرزی برای المان فوق $\begin{cases}u(x=0)=u_1\\ u(x=l)=u_2\end{cases}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & l\end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{C}}\underbrace{\begin{bmatrix}a_0\\a_1\end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{a}}=\underbrace{\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{u}} \Rightarrow \underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{a}=\bar{\underset{\sim}{u}} \rightarrow \underset{\sim}{a}=\underset{\sim}{C}^{-1}\bar{\underset{\sim}{u}} \qquad (2)$$

رابطه (2) را در رابطه (1) جایگذاری می‌کنیم: $u(x)=\underset{\sim}{P}(x)\,\underset{\sim}{C}^{-1}\,\bar{\underset{\sim}{u}}$

و از طرفی: $u=\underset{\sim}{S}^T\bar{\underset{\sim}{u}}$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{S}^T=\underset{\sim}{P}(x)\,\underset{\sim}{C}^{-1}$$

مثلاً در مثال فوق:

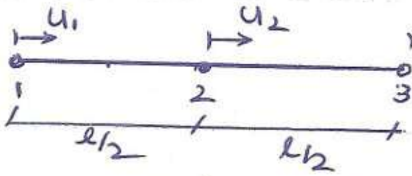
$$\underset{\sim}{C}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{-1}{l} & \frac{1}{l}\end{bmatrix} \rightarrow \underset{\sim}{S}^T=\langle 1 \quad x\rangle\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{-1}{l} & \frac{1}{l}\end{bmatrix}=\left\langle 1-\frac{x}{l} \quad \frac{x}{l}\right\rangle$$

$$\hookrightarrow \underset{\sim}{S}=\begin{bmatrix}1-\frac{x}{l}\\ \frac{x}{l}\end{bmatrix}$$

subject: Finite Element

حالا فرض می‌کنیم که می‌خواهیم توابع شکل گره‌های 1 ، 2 ، 3 را برای یک المان 3 گره‌ای بدست آوریم. با توجه به تعداد درجات آزادی ، میدان شکل این المان حداقل باید با یک تابع درجه 2 تقریب زده شود.

$$u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = \langle 1 \quad x \quad x^2 \rangle \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$



$$\Rightarrow \underset{\sim}{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{l}{2} & \frac{l^2}{4} \\ 1 & l & l^2 \end{bmatrix}$$

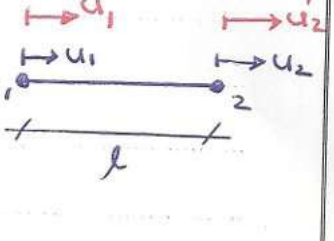
$$\Rightarrow \underset{\sim}{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{l} & \frac{4}{l} & \frac{-1}{l} \\ \frac{2}{l^2} & \frac{-4}{l^2} & \frac{2}{l^2} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{S}^T = \langle 1 \quad x \quad x^2 \rangle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{l} & \frac{4}{l} & \frac{-1}{l} \\ \frac{2}{l^2} & \frac{-4}{l^2} & \frac{2}{l^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{\sim}{S} = \begin{bmatrix} 1 - 3\frac{x}{l} + 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 \\ 4\left(\frac{x}{l}\right) - 4\left(\frac{x}{l}\right)^2 \\ -\frac{x}{l} + 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to S_1 \\ \to S_2 \\ \to S_3 \end{array}$$

نکته‌ای که مطرح می‌شود ، پیوسته کردن تابع شکل المان به گونه‌ای است که مشتق در مرز المان‌ها پیوسته باشد. در این حالت باید به جای اینکه در حالت C^0 حل کنیم ، در حالت C^1 حل کرده و توابع شکل برای هر گره به این صورت است که یک تابع شکل مربوط به u_1 و دیگری مربوط به u'_1 است. یعنی هر گره دو تابع شکل دارد. فرضاً برای یک المان دو گرهی داریم:

$$P(x) = \langle 1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \rangle \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \qquad u'(x) = \langle 0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2 \rangle \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\bar{u}} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u'_1 \\ u_2 \\ u'_2 \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix}_{4\times4}$$



subject: Finite Element

$$S^T = P(x)C^{-1} \Rightarrow S = \begin{bmatrix} 1-3\left(\frac{x}{l}\right)^2+2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\ x\left(\frac{x}{l}-1\right)^2 \\ 3\left(\frac{x}{l}\right)^2-2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\ \frac{x^2}{l}\left(\frac{x}{l}-1\right) \end{bmatrix}$$

چون ما تابع شکل یک المان ۴ گرهی را از نوع C^0 بدست آوردیم مشاهده می شود که توابع شکل با حالت فوق کاملاً متفاوت است.

الف) تیر دو گرهی:

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

$$= \underbrace{\langle 1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \rangle}_{P(x)} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{dy}{dx} = \langle 0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2 \rangle \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$S^T = P(x)\,C^{-1}$$

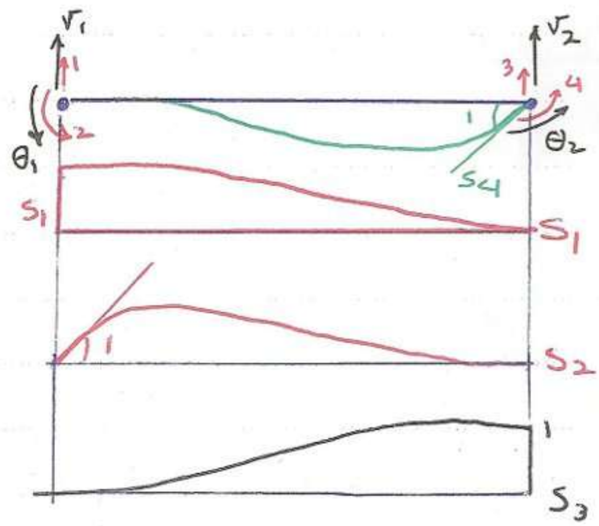
توابع شکل هرمیت:

$$S_1 = 1-3\left(\frac{x}{l}\right)^2+2\left(\frac{x}{l}\right)^3$$

$$S_2 = x\left(\frac{x}{l}-1\right)^2$$

$$S_3 = 3\left(\frac{x}{l}\right)^2-2\left(\frac{x}{l}\right)^3$$

$$S_4 = \frac{x^2}{l}\left(\frac{x}{l}-1\right)$$



subject: Finite Element.

تمرین: (سری چهارم): میله ی غیرمنشوری نشان داده شده در شکل تحت اثر بار محوری یکنواخت مفروض می باشد.

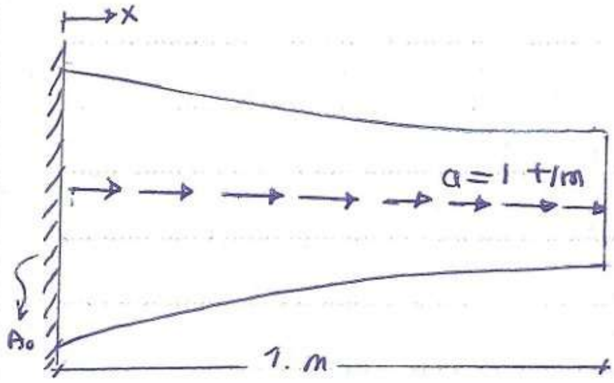
مطلوبست:

الف) تعیین تغییر مکان دقیق انتهای آزاد میله.

ب) الگوریتم برنامه ی کامپیوتری جهت تعیین تغییر مکان انتهای آزاد میله با در نظر گرفتن المان های نوع (I)، (II)، (III)، (IV)، (V). برای المان های ذیل مسئله مراجعه کنید.

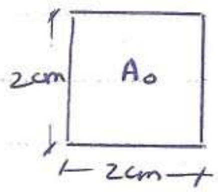
تعداد المان ها از 1 تا 50 المان با گام 1 المان در نظر گرفته می شود.

نتایج را در قالب یک جدول و یک نمودار مشرح زیر وارد کرده و بررسی نتایج بدست آمده، بحث نمایید.



$A_0 = 4 cm^2$

$E = 2.04 \times 10^6 \ kg/cm^2$

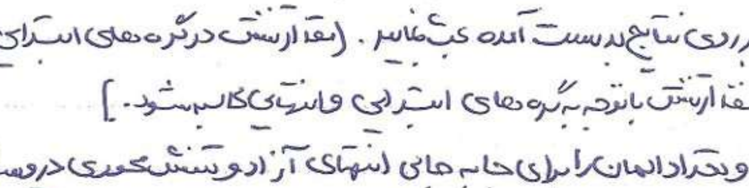


$A(x) = A_0 e^{-x}$

تعداد المان ↓ / نوع المان →	(I)	(II)	(III)	(IV)	(V)
1					
2					
⋮					
49					
50					

ج) رسم تغییرات تنش محوری در طول میله با در نظر گرفتن 50 المان و مقایسه آن با مقدار دقیق (نمودار دقیق) در قالب یک نمودار برای هر 5 نوع المان. و بررسی نتایج بدست آمده بحث نمایید. (مقدار تنش در گره های ابتدایی و انتهایی هر المان در نظر گرفته شود.) [* مقدار تنش با توجه به گره های ابتدایی و انتهایی کامل شود.]

د) نمودار خطای روش عددی برحسب نوع المان و تعداد المان را برای جابجایی انتهای آزاد و تنش محوری در وسط میله رسم نمایید.



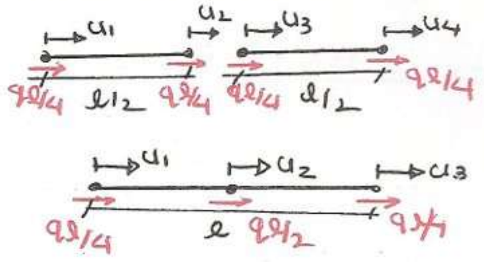
$$\text{خطا} = \frac{|\text{مقدار دقیق پارامتر} - \text{مقدار عددی پارامتر}|}{\text{مقدار دقیق پارامتر}} \times 100\%$$

"المان ها"

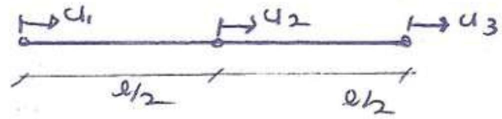
(I)

$$k^{(e)} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad f^{(e)} = \frac{ql}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

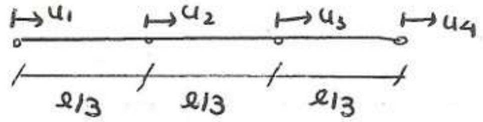
subject: Finite Element

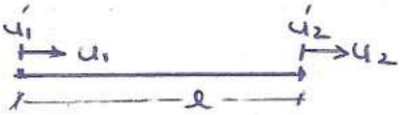
(II) 

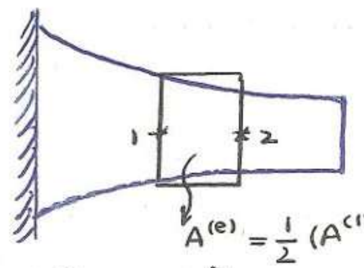
(توزیع از دو المان خطی)

(III) 

(المان سهمی) $$F^{(e)} = \frac{ql}{6}\begin{bmatrix}1\\4\\1\end{bmatrix}$$

(IV) 

(V)
نوع C^1




$$A^{(e)} = \frac{1}{2}\left(A^{(1)} + A^{(2)}\right)$$

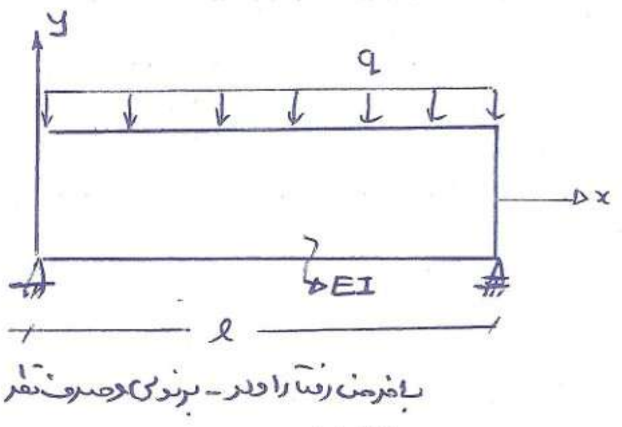
برای مساحت المان داریم

در المان C^1، تنش در نقطه ابتدای المان Eu'_1 و در نقطه دوم Eu'_2 است. تنش المان چنین می‌شود:

$$\sigma^{(e)} = \frac{1}{2}\left(\sigma_1^{(e)} + \sigma_2^{(e)}\right)$$

البته بهتر است که از همان فرمول $\frac{E}{l}(u_2 - u_1)$ استفاده نماییم.

المان تیر در تحلیل عددی تیرها:



$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x)$$

$$EI\frac{d^3y}{dx^3} = V(x)$$

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = -q(x)$$

با فرض رفتار اویلر - برنولی و صرف نظر از تغییر شکل‌های محوری

گفته شد در یک مسائل یک بعدی: $U^{(e)} = \frac{1}{2}\int_V E\varepsilon^{2(e)}\, dV^{(e)}$

در تیرها: $\varepsilon = -\frac{y}{r}$

$$k = \frac{1}{r} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \simeq y'' \rightarrow U^{(e)} = \frac{1}{2}\int E\left(y^{(e)}/r\right)^2 dV^{(e)}$$

subject: Finite Element

در تیرها $\rightarrow U^{(e)} = \frac{E}{2} \underbrace{\int_{A^{(e)}} y^{2(e)} \, dA^{(e)}}_{I^{(e)}} \int_0^l y^{(e)''^2} dx = \frac{EI}{2} \int_0^l \bar{u}^T B^T B \bar{u} \, dx$

$$y^{(e)} = S_1 v_1 + S_2 \theta_1 + S_3 v_2 + S_4 \theta_2 = \langle S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4 \rangle \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = S^T u$$

$$y''^{(e)} = \left\langle \frac{d^2 S_1}{dx^2} \quad \frac{d^2 S_2}{dx^2} \quad \frac{d^2 S_3}{dx^2} \quad \frac{d^2 S_4}{dx^2} \right\rangle \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = B u$$

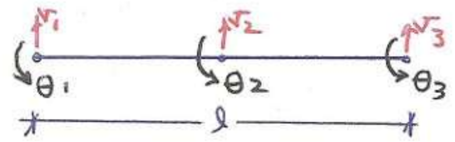
درحالت کلی هستیم $\quad k_u^{(e)} = \frac{\partial U^{(e)}}{\partial \bar{u}^T} \rightarrow K^{(e)} = EI \int_0^L B^T B \, dx$

$$k^{(e)} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad \text{يا} \quad k_{ij}^{(e)} = EI \int_0^L S_i'' S_j'' \, dx$$

بدست آوردن بردار نیرو:

$$f^{(e)} = q \int_0^l \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} ql/2 \\ ql^2/12 \\ ql/2 \\ -ql^2/12 \end{bmatrix}$$

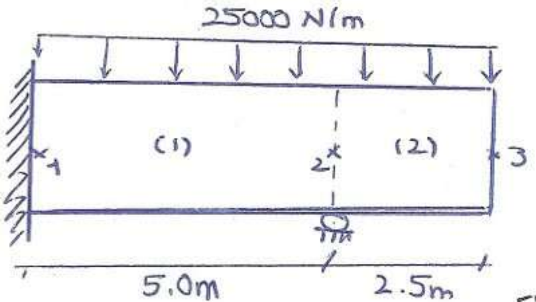
می توانستیم بصورت Advance و نگرش دیگر، المان تیر را دقتش را بالاتر ببریم:



مثال: تیر نشان داده شده در شکل تحت بار گسترده‌ای یکنواخت را در نظر بگیرید. با در نظر گرفتن دو المان تیر مطابق شکل مطلوبست تعیین: الف) تغییر مکان قائم در گره ۳ و دوران در گره های ۲ و ۳ . ب) عکس‌العمل‌ها

subject: Finite Element

تکلیف ۱-



$I = 118.6 \times 10^6 \ mm^4$

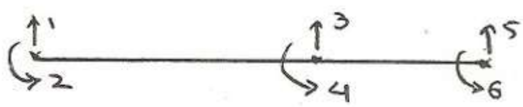
$E = 200 \ GPa$

$$\underset{\sim}{K}^{(1)} = \frac{200\times10^9 \times 118.6\times10^6 \times 10^{-12}}{5^3}\begin{bmatrix} 12 & 6(5) & -12 & 6(5) \\ & 4(5)^2 & -6(5) & 2(5)^2 \\ & & 12 & -6(5) \\ & & & 4(5)^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2277120 & 5692800 & -2277120 & 5692800 \\ & 18976000 & -5692800 & 9488000 \\ & & 2277120 & -5692800 \\ & & & 18976000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{array}$$

$$\underset{\sim}{f}^{(1)} = \begin{bmatrix} -25000 \times \frac{5}{2} = -62500 \\ -25000 \times \frac{5^2}{12} = -52083.33 \\ -25000 \times \frac{5}{2} = -62500 \\ 25000 \times \frac{5^2}{12} = 52083.33 \end{bmatrix} \begin{array}{c} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{array} \qquad \underset{\sim}{f}^{(2)} = \begin{bmatrix} -31250 \\ -13020.833 \\ -31250 \\ 13020.833 \end{bmatrix} \begin{array}{c} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{array}$$

$$\underset{\sim}{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} 18216960 & 22771200 & -18216960 & 22771200 \\ & 37952000 & -22771200 & 18976000 \\ & & 18216960 & -22771200 \\ & & & 37952000 \end{bmatrix} \begin{array}{c} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{array}$$



المان \ گره	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	3	4	5	6

$$\underset{\sim}{K}^{(G)} = \overline{K}^{(1)}_{6\times6} + \overline{K}^{(2)}_{6\times6} \quad ; \quad \underset{\sim}{f}^{(G)} = \overline{\underset{\sim}{f}}^{(1)} + \overline{\underset{\sim}{f}}^{(2)}$$

شرایط مرزی : $v_1 = v_2 = 0 \quad ; \quad \theta_1 = 0$

$\theta_2 = -0.0013724 \ (rad)$

↳ مجهولات بدست می‌آیند $v_3 = -0.0085772 \ (mm)$

$\theta_3 = -0.00411704 \ (rad)$

subject: Finite Element

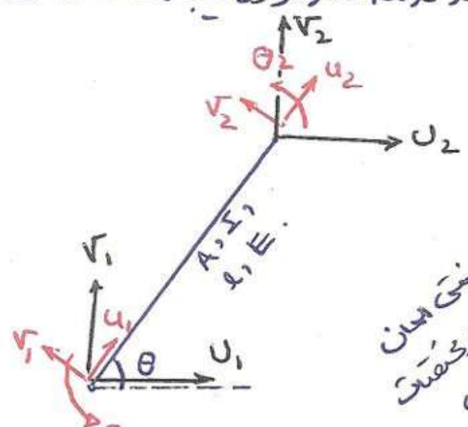
$$\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{K}^{(G)} u - \underset{\sim}{f}^{(G)} \longrightarrow \underset{\sim}{R} = \begin{bmatrix} R_1 = 54687 \ (N) \\ M_1 = +39062.5 \ (N.m) \\ R_2 = 132814 \ (N.m) \\ M_2 = 0 \\ R_3 = 0 \\ M_3 = 0 \end{bmatrix}$$

المان تیرستون - تحلیل قاب ها :

المان تیرستون ترکیبی از المان تیر و المان خرپا است . به عبارتی :

المان تیر « 4 درجه آزادی » + المان خرپایی « 2 درجه آزادی » = المان تیرستون « 6 درجه آزادی »

المان تیرستون در حالت کلی می تواند با یک زاویه ی θ در نظر گرفته شود و در اینجا مختصات محلی و کلی (local و Global) معنا پیدا می کنند.



ماتریس سختی المان تیرستون در مختصات محلی

$$\underset{\sim}{K}^{(e)} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \frac{AE}{l} & 0 & 0 & -\frac{AE}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{-12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{-6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{AE}{l} & 0 & 0 & \frac{AE}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{array}$$

* θ در مختصات محلی و کلی تفاوتی نمی کند.

$$\begin{cases} U_1 = u_1 \cos\theta - v_1 \sin\theta \\ V_1 = u_1 \sin\theta + v_1 \cos\theta \\ \Theta_1 = \theta_1 \end{cases}$$

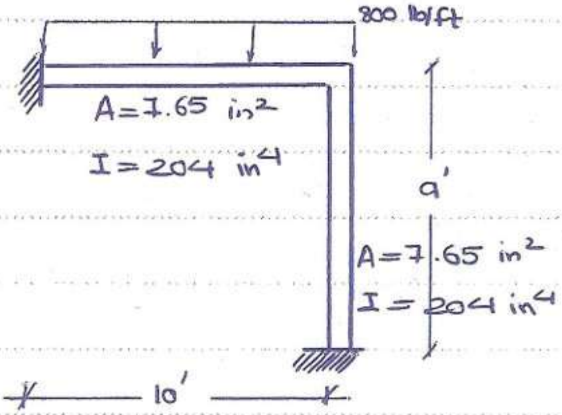
$$\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{u} \ ; \ \underset{\sim}{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \Theta_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \Theta_2 \end{bmatrix} \ ; \ \underset{\sim}{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

subject: Finite Element

$$
\underset{\sim}{T} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{\sim}{K}^{(e)} = \underset{\sim}{T}\, \underset{\sim}{k}^{(e)}\, \underset{\sim}{T}^{T}
$$

بردار نیروی المان در مختصات کلی $F^{(e)} = \underset{\sim}{T}\, \underset{\sim}{f}^{(e)}$

تمرین سری پنجم: قاب خمشی ـ محوری نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. مطلوب است تعیین تغییر مکان های افقی و قائم و دوران محل اتصال تیر و ستون و عکس العمل های تکیه گاهی.



المان های دو بعدی:

المان های دو بعدی از نظر کلی دو شکل بیشتر ندارند: ۱- المان های مستطیلی ۲- المان های مثلثی
هر المان دو بعدی دیگری ترکیبی از المان های فوق است. به عنوان مثال المان ذوزنقه ای از روی المان های فوق ساخته شده است. به عبارتی همه ی المان های دو بعدی از المان های پایه فوق تولید شده اند.

المان مستطیلی هم بر دو نوع است: ۱- المان مستطیلی دو خطی چهار گره ای
۲- المان مستطیلی درجه دو هشت گره ای

المان مثلثی هم بر دو نوع است: ۱- المان مثلثی خطی سه گره ای
۲- المان مثلثی درجه دو شش گره ای.

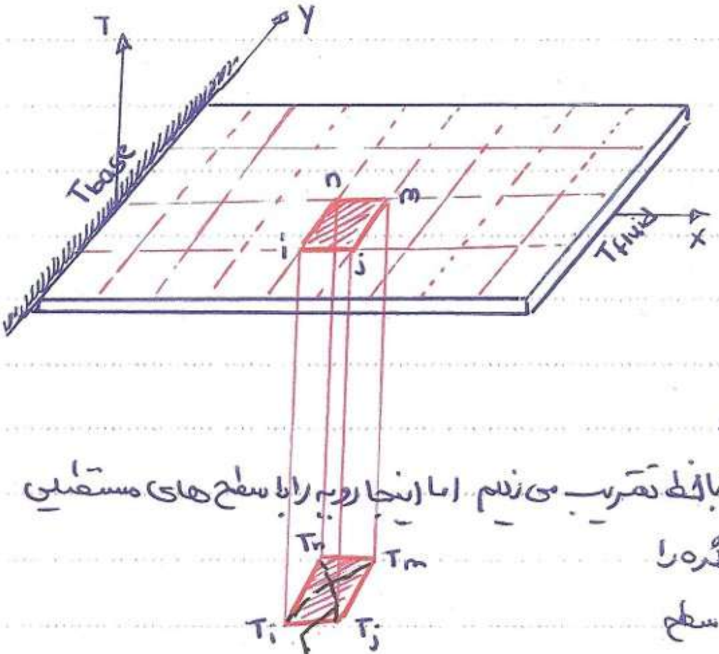
بحث المان های دو بعدی را با نوع اول المان های مستطیلی شروع می کنیم.

subject: Finite Element

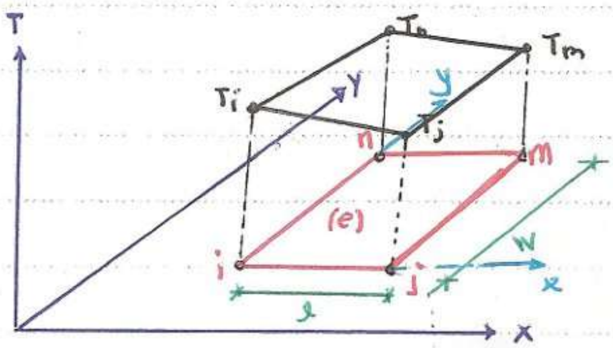
المان‌های مستطیلی دوخطی (چهارگوشه‌ای):

برای شرح المان‌های مستطیلی دوخطی چهارگوشه‌ای همان مثال انتقال حرارت در یک تیغه را این بار در هر دو جهت x و y در نظر می‌گیریم. یعنی این بار تغییرات انتقال حرارت هم در جهت x است و هم در جهت y.

در حالت یک‌بعدی، تغییرات انتقال حرارت یک منحنی بود اما در اینجا یک رویه است. در قبل، منحنی را با خط تقریب می‌زدیم اما اینجا رویه را با سطح‌های مستطیلی تقریب می‌زنیم. در هر سطح مستطیلی هم چهارگوشه را در نظر می‌گیریم که این چهارگوشه، ماهیت و وضعیت سطح مورد نظر در تیغه را به ما نشان می‌دهند.

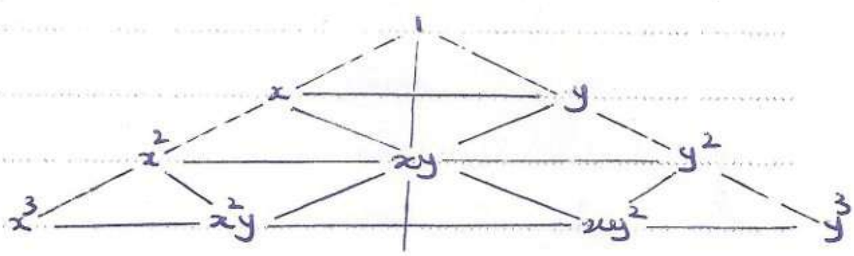


حالت دقیق رویه است که به صورت سطح تقریب زده است.



$$T^{(e)} = b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 xy$$

مثلث پاسکال



$$\begin{cases} x=0, y=0 \rightarrow T^{(e)} = T_i \\ \vdots \\ x=0, y=W \rightarrow T^{(e)} = T_n \end{cases}$$

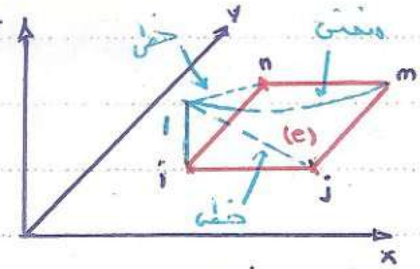
$$\rightarrow b_1 = T_i \qquad b_2 = \frac{1}{l}(T_j - T_i) \qquad b_3 = \frac{1}{W}(T_n - T_m)$$

$$b_4 = \frac{1}{lW}(T_i - T_j + T_m - T_n)$$

$$T^{(e)} = S_i T_i + S_j T_j + S_m T_m + S_n T_n = \langle S_i \quad S_j \quad S_m \quad S_n \rangle \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_m \\ T_n \end{Bmatrix}$$

subject: Finite Element

$$\begin{cases} S_i = (1-\frac{x}{l})(1-\frac{y}{w}) \\ S_j = \frac{x}{l}(1-\frac{y}{w}) \\ S_m = \frac{xy}{lw} \\ S_n = (1-\frac{x}{l})\frac{y}{w} \end{cases}$$

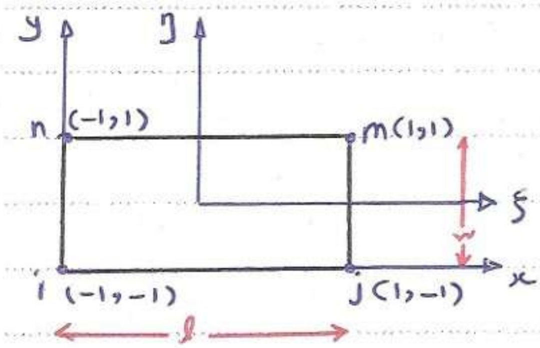


" تابع شکل S_i "

سایر تابع شکل ها هم مشابه فوق رسم می شوند. درحالت کلی:

$$\psi^{(e)} = \langle S_i \quad S_j \quad S_m \quad S_n \rangle \begin{bmatrix} \psi_i \\ \psi_j \\ \psi_m \\ \psi_n \end{bmatrix}$$

میتوان مسئله را در مختصات طبیعی هم بررسی نموده و کار با رابطه آنها تغییرهای عددی ساده شود. داریم:



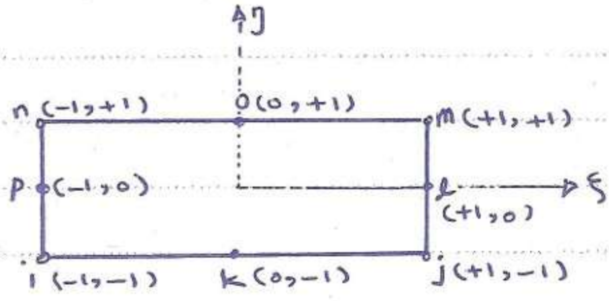
$$\xi = \frac{2x}{l} - 1$$
$$\eta = \frac{2y}{w} - 1$$

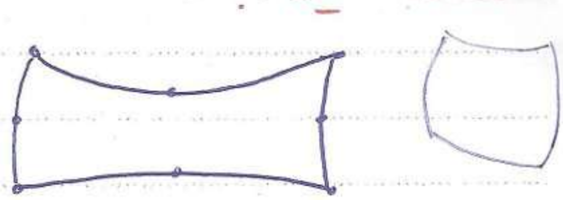
رابطه کلی توابع شکل برای المان های مستطیلی چهارگره ای بصورت زیر است:

$$S_i = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)$$

$$S_i = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \qquad S_j = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$
$$S_m = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \qquad S_n = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

المان های مستطیلی درجه 2:





ممکن است برای تا کیلوبر درجه 2 بودن المان، المان را بصورت فوق هم رسم کنند.

subject: Finite Element

در المان چهارگره‌ای $\psi^{(e)} = b_1 + b_2\xi + b_3\eta + b_4\xi\eta$

در اینجا $\psi^{(e)} = b_1 + b_2\xi + b_3\eta + b_4\xi\eta + b_5\xi^2 + b_6\eta^2 + b_7\xi^2\eta + b_8\xi\eta^2$

برای بدست آوردن b_1 تا b_8 باید مقادیر پارامتر ψ در هر هشت گره با استفاده از مختصات ξ و η صدق داده شود. این کار زمان‌بر و وقت‌گیر است. لذا از ترفندی استفاده کرده و با مد نظر قرار دادن خواص تابع شکل داریم:

$$S = F_1(\xi,\eta)\, F_2(\xi,\eta)$$

تابع F_1 تابعی است که مقدار تابع شکل را در اضلاع غیر مجاور گره، صفر می‌نماید. تابع F_2 هم تابعی است که مقدارش در خود گره باید یک شود و در گره‌های مجاور صفر شود. مثلاً برای i که داریم:

$$S_i = \underbrace{(1-\xi)(1-\eta)}_{\text{تابع } F_1 \text{ هستند}}\overbrace{(a_1 + a_2\xi + a_3\eta)}^{\text{تابع } F_2} = \frac{-1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)$$

$$\text{گره } K: \quad \begin{aligned} S_i(0,-1) &= 0 \rightarrow \\ S_i(-1,0) &= 0 \rightarrow \\ S_i(-1,-1) &= 1 \rightarrow \end{aligned} \begin{cases} 1(+2)(a_1 - a_3) = 0 \\ 2(1)(a_1 - a_2) = 0 \\ 2(2)(a_1 - a_2 - a_3) = 1 \end{cases} \rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = \frac{-1}{4}$$

به طور مشابه: $S_j = \frac{-1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta)$

$$S_m = \frac{-1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta)$$

$$S_n = \frac{-1}{4}(1-\xi)(1+\xi)(1+\xi-\eta)$$

در حالت کلی هم داریم: $S_i = \frac{-1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(1-\xi_i\xi-\eta_i\eta)$

روابط فوق برای گره‌های گوشه‌ای بودند. برای گره‌های میانی (مثلاً گره O) داریم:

$$S_o = F_1(\xi,\eta)\, F_2(\xi,\eta)$$

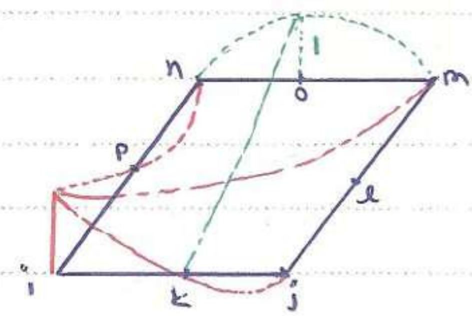
در گره‌های میانی، F_1 باید در اضلاع غیر مجاور، تابع شکل را صفر نماید:

$$S_o = (1-\xi)(1+\xi)(1+\eta)\,\alpha \rightarrow S_o(0,1) = 1 \rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

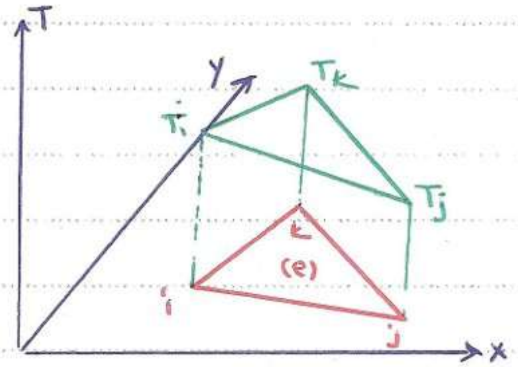
$$S_o = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$$

به طور مشابه: $S_k = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$

$S_l = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \qquad S_p = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$



المان مثلثی خطی - سه گره ای:



$$T^{(e)} = b_1 + b_2 X + b_3 Y$$

$$\begin{cases} X = x_i ,\ Y = Y_i \rightarrow T^{(e)} = T_i \\ X = x_j ,\ Y = Y_j \rightarrow T^{(e)} = T_j \\ X = x_k ,\ Y = Y_k \rightarrow T^{(e)} = T_k \end{cases}$$

$$b_1 = \frac{1}{2A}\left\{(x_j y_k - x_k y_j) T_i + (x_k y_i - x_i y_k) T_j + (x_i y_j - x_j y_i) T_k\right\}$$

$$\rightarrow b_2 = \frac{1}{2A}\left[(y_j - y_k) T_i + (y_k - y_i) T_j + (y_i - y_j) T_k\right]$$

$$b_3 = \frac{1}{2A}\left[(x_k - x_j) T_i + (x_i - x_k) T_j + (x_j - x_i) T_k\right]$$

$$;\ 2A = x_i (y_j - y_k) + x_j (y_k - y_i) + x_k (y_i - y_j)$$

در شماره گذاری المان های مثلثی معمولاً جهت مخالف عقربه های ساعت در نظر گرفته می شود. در این حالت مساحت هم مثبت در می آید. شماره گذاری در جهت عقربه های ساعت هم مشکل خاصی ایجاد نمی کند و علامت ها با هم خنثی می شوند.

$$T^{(e)} = S_i T_i + S_j T_j + S_k T_k$$

$S_i = \frac{1}{2A}(\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y)$ همچنین: $\alpha_i = x_j y_k - x_k y_j$

$S_j = \frac{1}{2A}(\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j x)$ $\beta_i = y_j - y_k$

$S_k = \frac{1}{2A}(\alpha_k + \beta_k x + \gamma_k y)$ $\gamma_i = x_k - x_j$

بطور مشابه:

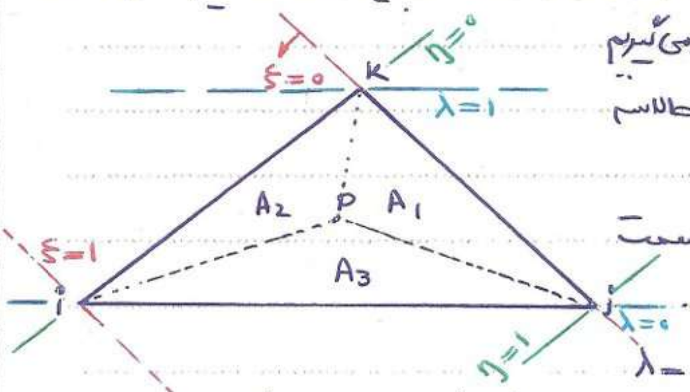
$\alpha_j = x_k y_i - x_i y_k$	$\alpha_k = x_i y_j - x_j y_i$	دقت این نوع المان پایین است.
$\beta_j = y_k - y_i$	$\beta_k = y_i - y_j$	علت سخت شدن المان مثلثی،
$\gamma_j = x_i - x_k$	$\gamma_k = x_j - x_i$	داشتن توابع شکل خطی است.

subject: Finite Element

~~المان مثلثی شش گرهای - درجه ۲ :~~

مختصات طبیعی (سطحی) در المان‌های مثلثی:

توابع شکل المان‌های مثلثی ثقیل است و برای راحت نوشتن کار از مختصات طبیعی استفاده کنیم. اگر داشته باشیم: مثلث ijk را داریم. نقطه ای درون مثلث در نظر می‌گیریم و این نقطه را به هر سه رأس مثلث اولیه وصل می‌کنیم. حالا سه مثلث با سطح های A_1 ، A_2 و A_3 داریم.



اگر نقطه P فرضاً به سمت i حرکت کند، A_2 و A_3 به سمت صفر و سطح A_1 به سطح A کل مثلث اولیه میل می‌کند.

اگر تعریف کنیم $\xi=\frac{A_1}{A}$ ، $\eta=\frac{A_2}{A}$ و $\lambda=\frac{A_3}{A}$

ξ ، η و λ پارامترهای بی بعد هستند و بیرون شکل همان طور که مشخص نیز می‌باشد. این پارامترها از یکدیگر جدا نیستند و داریم:

$$\xi+\eta+\lambda=\frac{A_1+A_2+A_3}{A}=1$$

$$\Rightarrow \lambda=1-\xi-\eta$$

مختصات ξ طوری انتخاب می‌شود که ضلع jk متناظر محور $\xi=0$ انتخاب شده و خطی که به موازات ضلع jk از گره i می‌گذرد، متناظر محور $\xi=1$ است. برای مختصات‌های η و λ هم همین بحث را داریم. خاصیت انتخاب چنین مختصاتی این است که روابط زیر را داریم:

$\xi=S_i \qquad \eta=S_j \qquad \lambda=S_k$

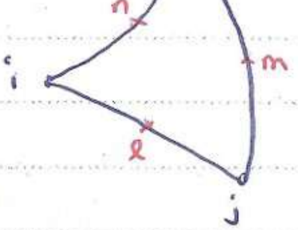
به بیان ریاضی هم داریم:

$$\xi=S_i=\frac{A_1}{A}=\frac{\frac{1}{2}\big[\overbrace{(x_jy_k-x_ky_j)}^{\alpha_i}+x\overbrace{(x_j-y_k)}^{\beta_i}+y\overbrace{(x_k-x_j)}^{\gamma_i}\big]}{\frac{1}{2}\underbrace{\big[x_i(y_j-y_k)+x_j(y_k-y_j)+x_k(y_i-y_j)\big]}_{2A}}$$

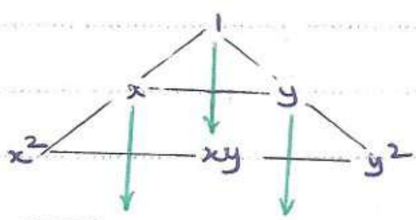
المان مثلثی شش گرهای - درجه ۲ :

از آنجا که دقت المان‌های خطی زیاد مطلوب نیست، یک راه افزایش دقت، افزایش order یا همان درجه المان است.

[کاهش اضلاع به صورت انحنادار فقط جهت تأکید بر درجه ۲ بودن المان است]



بیان شد که order المان‌ها از روی مثلث خیام پاسکال نوشته می‌شود.

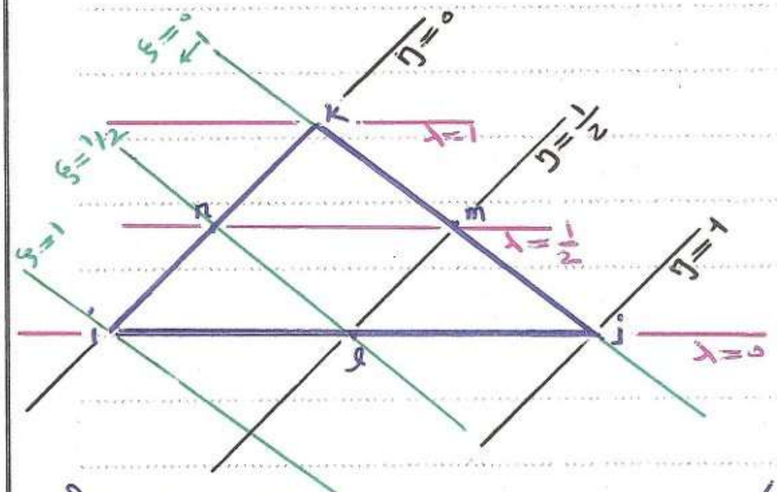


subject: Finite Element

با توجه به مثلث خیام پاسکال برای المان داریم:

$\psi^{(e)} = a_1 + a_2 x + a_3 y$: در المان سه گره‌ای

$\psi^{(e)} = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 y^2 + a_6 xy$: در المان شش گره‌ای



فرض کنیم که می خواهیم تابع شکل گره i را محاسبه کنیم. خاصیت تابع شکل این است که در گره مورد نظر مقدارش 1 و در سایر گره ها مقدارش صفر است. تابع شکل باید هم روی خط $\xi = 1/2$ و هم روی خط $\xi = 0$ برابر صفر بوده و در روی خط $\xi = 1$ هم باید یک باشد. داریم:

$S_i = \alpha \xi (\xi - \frac{1}{2}) \rightarrow S_i(\xi = 1) = 1 \Rightarrow \alpha \times 1 \times (1 - \frac{1}{2}) = 1 \Rightarrow \alpha = 2$

ضریب Scale

$\rightarrow S_i = 2\xi(\xi - \frac{1}{2}) = \xi(2\xi - 1)$

به طور مشابه $S_j = \eta(2\eta - 1)$

؛ $S_k = \lambda(2\lambda - 1) = 1 - 3(\xi + \eta) + 2(\xi + \eta)^2$

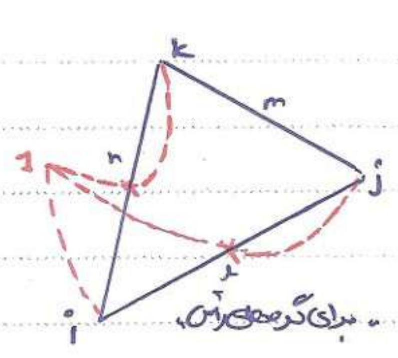
تابع شکل گره l باید به گونه ای انتخاب شود که روی خط $\xi = 0$ و $\eta = 0$ مقدارش صفر شود. ولذا داریم:

$S_l = \alpha_1 \xi \eta \rightarrow S_l(\xi = \frac{1}{2}, \eta = \frac{1}{2}) = 1 \rightarrow \alpha_1 = 4 \rightarrow S_l = 4\xi\eta$

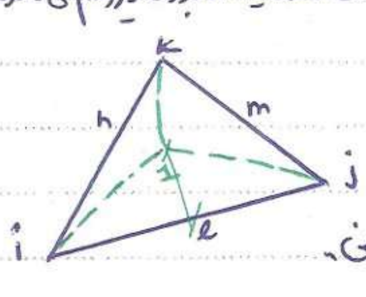
$S_m = 4\eta\lambda = 4\eta(1 - \xi - \eta)$

$S_n = 4\xi\lambda = 4\xi(1 - \xi - \eta)$

توابع شکل هم بصورت شماتیک بصورت زیر رسم می شوند:



• برای گره‌های رأس.



• برای گره‌های میانی.

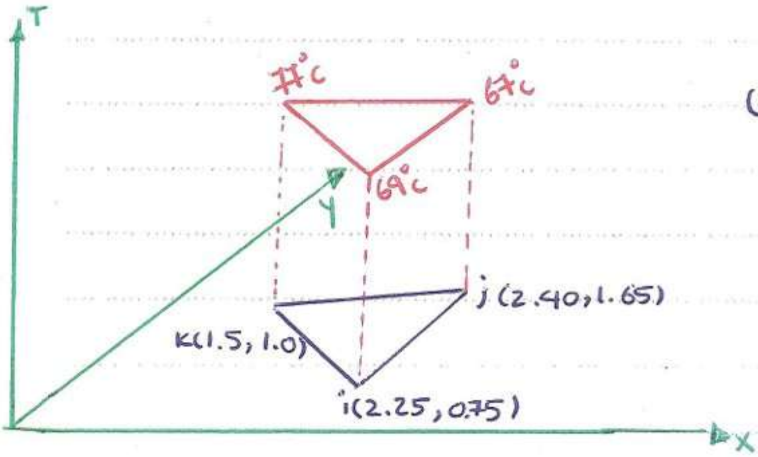
subject: Finite Element

مثال: برای مدل سازی توزیع دما در یک میله از المان های دو بعدی مثلثی سه گره ای استفاده شده است. دماهای گره ای و موقعیت آن ها در المان نشان داده شده است. مطلوب است تعیین:

الف) مقدار دما در $x=2.15cm$ و $y=1.1cm$

ب) مؤلفه های گرادیان دما برای این المان

ج) موقعیت ایزوترم $70°C$ (ایزوترم=همدما)



الف)

$$S_i=\frac{1}{2A}(\alpha_i+\beta_i x+\gamma_i y)$$

$$\alpha_i=x_j y_k-x_k y_j=2.40\times1-1.5\times1.65=-0.75$$

به طور مشابه: $\alpha_j=-1.125$; $\alpha_k=1.9125$

$\beta_i=y_j-y_k=1.65-1.0=0.65$ به طور مشابه: $\beta_j=0.25$; $\beta_k=-0.9$

$\gamma_i=x_k-x_j=1.5-2.4=-0.9$ به طور مشابه: $\gamma_j=0.75$; $\gamma_k=0.15$

مساحت مثلث $2A=x_i(y_j-y_k)+x_j(y_k-y_i)+x_k(y_i-y_j)=0.7125$

$$S_i=\frac{1}{0.7125}(-0.075+0.065x-0.9y)$$

$$S_j=\frac{1}{0.7125}(-1.125+0.25x+0.75y)$$

$$S_k=\frac{1}{0.7125}(1.9125-0.9x+0.15y)$$

خاصیت تابع شکل $T^{(e)}=S_i\underbrace{T_i}_{69°c}+S_j\underbrace{T_j}_{67°c}+S_k\underbrace{T_k}_{77°c}$

$$T^{(e)}(x=2.15,\,y=1.1)=69.93\ °c$$

ب) کلاً دما یا هر جریان دیگری که باشد، مشتق اول مکانی در همان راستا خواهد بود:

$$\text{بردار گرادیان حرارتی}=\begin{bmatrix}\frac{\partial T^{(e)}}{\partial x}\\ \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10.808\\ -0.421\end{bmatrix}\ °c/cm$$

subject: Finite Element

$$T^{(e)} = \begin{bmatrix} S_i & S_j & S_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial S_i}{\partial x} & \frac{\partial S_j}{\partial x} & \frac{\partial S_k}{\partial x} \\ \frac{\partial S_i}{\partial y} & \frac{\partial S_j}{\partial y} & \frac{\partial S_k}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{bmatrix} \rightarrow$$

ثابت

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_i & \beta_j & \beta_k \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{bmatrix}$$

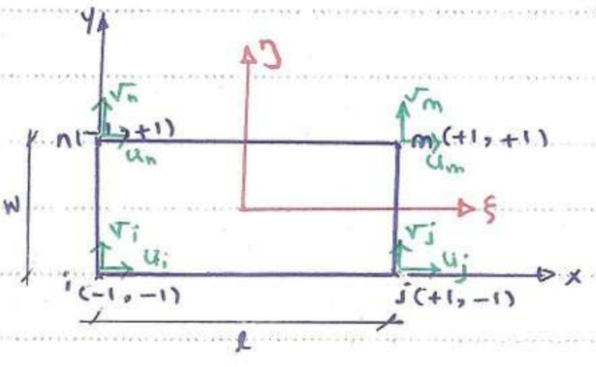
مشاهده می‌شود که گرادیان همواره مقدار ثابتی است و این نقطه ضعف المان‌های مثلثی است که مشتق را روی میدان جابه‌جایی ثابت در نظر می‌گیرد.
بعداً نشان می‌دهیم که مشتق روی میدان جابه‌جایی برابر کرنش است و المان‌های مثلثی مشکلشان، ثابت در نظر گرفتن این کرنش‌هاست.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{0.7125} \begin{bmatrix} 1.65 & 0.25 & -0.9 \\ -0.9 & 0.75 & 0.15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 69 \\ 67 \\ 77 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10.808 \\ -0.421 \end{bmatrix} {}^{\circ}C/cm$$

ج) در این قسمت مکان هندسی نقاطی را می‌خواهد که درجه حرارتشان $70^{\circ}C$ است. قبلاً بدست آورده‌ایم:

$$\left.\begin{aligned} T^{(e)} &= 93.632 - 10.808x - 0.421y \\ T^{(e)} &= 70^{\circ}C \end{aligned}\right\} \rightarrow 10.808x - 0.421y = 23.632$$

هرگاه از یک مجموعه پارامتر (مجموعه‌ای از توابع شکل) برای تعریف متغیر مجهول u استفاده کرده و از همان مجموعه پارامتر (توابع شکل) برای بیان هندسه‌ی مسئله نیز استفاده شود، از فرمول‌بندی ایزوپارامتری بهره گرفته‌ایم. المانی که به این شکل بیان می‌گردد المان ایزوپارامتری نامیده می‌شود.



[u و v میزان‌های جابه‌جایی در راستای x و y هستند.)

$$S_i = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)$$

از FE داریم:

$$\begin{cases} u = S_i u_i + S_j u_j + S_m u_m + S_n u_n \\ v = S_i v_i + S_j v_j + S_m v_m + S_n v_n \end{cases}$$

subject: Finite Element

یا به عبارتی
$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_i & 0 & S_j & 0 & S_m & 0 & S_n & 0 \\ 0 & S_i & 0 & S_j & 0 & S_m & 0 & S_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \\ u_n \\ v_n \end{bmatrix}$$

میدانیم
$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

برای x و y داریم:

$$\begin{cases} x = S_i x_i + S_j x_j + S_m x_m + S_n x_n \\ y = S_i y_i + S_j y_j + S_m y_m + S_n y_n \end{cases}$$

به فرمول بندی فوق، فرمول بندی ایزوپارامتریک می گویند.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial \xi} \\ \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{J}\ \text{ماتریس ژاکوبین}} \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \underset{\sim}{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

انتگرال گیری عددی دوبعدی به روش گوس - لژاندر:

$$I = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} F(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} F(\xi,\eta)\det(\underset{\sim}{J})\,d\xi\,d\eta$$

$$\approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j F(\xi_i,\eta_j)$$

به عنوان مثال
$$I = \int_0^2\int_0^2 (3y^2 + 2x)\,dx\,dy$$

$$x = \frac{b-a}{2} + \frac{b+a}{2}\xi \rightarrow x = \frac{2-0}{2} + \frac{2+0}{2}\xi = 1+\xi \qquad \begin{array}{l} x=0 \rightarrow \xi=-1 \\ x=2 \rightarrow \xi=+1 \end{array}$$

subject: Finite Element

$$y=\frac{2-0}{2}+\frac{2+0}{2}\eta=1+\eta$$

$$\underset{\sim}{J}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi}\\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\ ,\ |\underset{\sim}{J}|=1$$

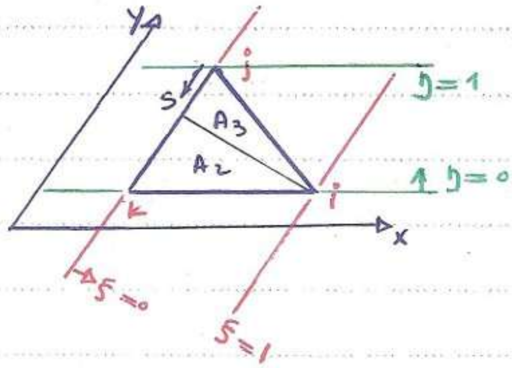
$$\Rightarrow I=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\left(3(1+\eta)^2+2(1+\xi)\right)(1)\,d\xi\, d\eta=\Big[(1)(1)f\left(\tfrac{-1}{\sqrt3},\tfrac{-1}{\sqrt3}\right)+(1)(1)f\left(\tfrac{-1}{\sqrt3},\tfrac{+1}{\sqrt3}\right)+$$

$$(1)(1)f\left(\tfrac{1}{\sqrt3},\tfrac{-1}{\sqrt3}\right)+(1)(1)f\left(\tfrac{1}{\sqrt3},\tfrac{1}{\sqrt3}\right)\Big]=24.00000$$

روابط مهم در انتگرال گیری از توابع شکل المان های مثلثی :

با فرض مختصات سطحی ξ ، η و λ :

$$\int_A \xi^a \eta^b \lambda^c\, dA=\frac{a!\,b!\,c!}{(a+b+c+2)!}2A$$



$$\eta=1-\frac{S}{l_{jk}}=\frac{A_2}{A}$$

$$\lambda=\frac{S}{l_{jk}}=\frac{A_3}{A}$$

مسیر انتگرال : $\int_0^{l_{jk}}\eta^a\lambda^b\, ds=l_{jk}\int_0^1\left(1-\frac{S}{l_{jk}}\right)^a\left(\frac{S}{l_{jk}}\right)^b d\left(\frac{S}{l_{jk}}\right)$

$$\Rightarrow \int_0^{l_{jk}}\eta^a\lambda^b\, ds=l_{jk}\frac{a!\,b!}{(a+b+1)!}$$

حل معادله‌ی پواسون (لاپلاس) به کمک روش اجزا محدود ← فصل جدید

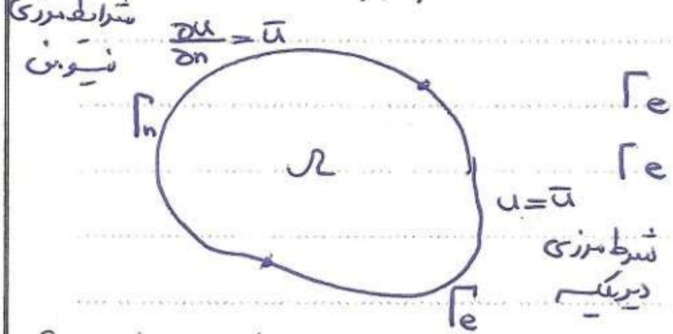
subject: Finite Element

فصل ششم - حل معادله‌ی پواسون (لاپلاس) به کمک روش اجزاء محدود:

$$\nabla^2 u = g(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=g(x,y) \quad \text{in } \Omega$$

معادله فوق در دامنه‌ی منظم به صورت close form solution حل شد. اما در حالت کلی معادله پواسون روی سطوح مستوی تعریف می‌شود در حالت کلی دامنه مسئله یا همان Ω سطح دلخواهی می‌تواند باشد و شرایط مرزی هم معمولاً خیلی ساده تعریف نمی‌شوند و مشکل را چند برابر می‌کنند.



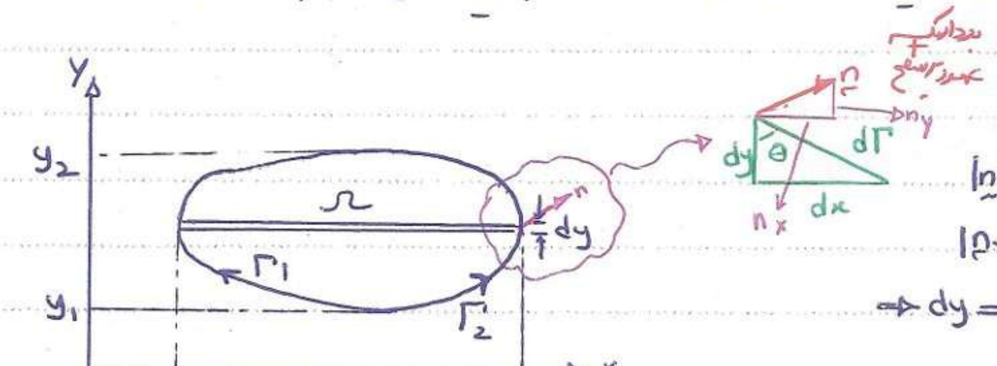
$$\Gamma_e \cup \Gamma_n = \Gamma$$

$$\Gamma_e \cap \Gamma_n = \phi$$

یعنی دامنه‌ی مسئله یک خط است و نیز شرایط مرزی هم کاملاً دلخواه هستند. در حالتی که این سطح به صورت مستطیل و نیم دایره و... باشد، می‌توان به صورت close form حل کرد ولی در حالت کلی قطعاً باید از روش عددی استفاده شود.

$$I=\int_\Omega w\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-g(x,y)\right]d\Omega-\int_{\Gamma_e} w\frac{\partial u}{\partial n}\,d\Gamma=0$$

در رابطه فوق u یک تابع آزمایشی است و در اصل $\bar{u}$ است که به دلیل شلوغ نشدن به همین صورت نشان داده است.



$$dy = d\Gamma\cos\theta$$

$$|n_x| = |n\cos\theta|$$

$$|n_x| = n_x = \cos\theta$$

$$\Rightarrow dy = n_x\, d\Gamma$$

$$\int_\Omega w\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}d\Omega=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} w\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx\,dy=\left(\int_{y_1}^{y_2}\left[w\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{y_1}^{y_2}dy\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}dx\,dy$$

$$\int_{y_1}^{y_2}\left[w\frac{\partial u}{\partial x}\right]n_x\,d\Gamma\Bigg|_{x_1}^{x_2}=\int_{\Gamma_2}\left(w\frac{\partial u}{\partial x}\right)n_x\,d\Gamma-\int_{\Gamma_1}\left[w\frac{\partial u}{\partial x}\right]n_x\,d\Gamma=\int_\Gamma\left[w\frac{\partial u}{\partial x}\right]n_x\,d\Gamma$$

جهت Γ_1 که عوض شود و هم جهت Γ_2 شود علامت منفی اینجا (می) شود که در منفی پشت انتگرال ضرب شده و مجموع دو انتگرال فوق هم انتگرال روی Γ را می‌دهد.

subject: Finite Element

بدست آوردیم : $\int_{\Omega} w \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} d\Omega = -\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} dx dy + \oint_{\Gamma} \left[w \frac{\partial u}{\partial x}\right] n_x d\Gamma$

بطور مشابه: $\int_{\Omega} \omega \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} d\Omega = -\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} dx dy + \oint_{\Gamma} \left[w \frac{\partial u}{\partial y}\right] n_y d\Gamma$

$$\int_{\Omega} w\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) d\Omega = -\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \left[\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right] dx dy + \oint_{\Gamma} \left[\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y\right] d\Gamma$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y$$

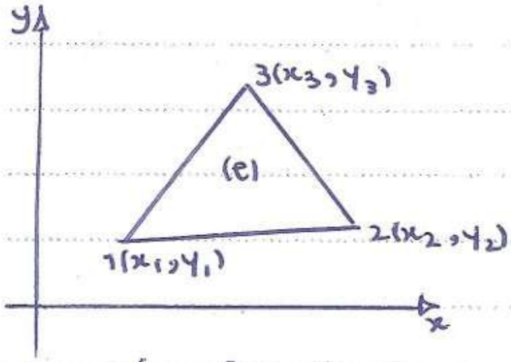
تعریف

$$= -\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \left[\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right] dx dy + \oint_{\Gamma} w \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma$$

$$\Rightarrow I = -\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \left[\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right] dx dy - \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} w g(x,y) dx dy + \oint_{\Gamma_n} w \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = 0$$

نشان داده شد که : if $\nabla^2 u = g(x,y) \Rightarrow \int_{\Omega} \left[\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right] d\Omega$

$$-\int_{\Omega} w g(x,y) d\Omega + \int_{\Gamma_n} w \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = 0$$



فرمولبندی با استفاده از المان مثلثی سه گرهی:

$$u = S_1 u_1 + S_2 u_2 + S_3 u_3$$
$$= \langle S_1 \quad S_2 \quad S_3 \rangle \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{S}\,\bar{\underset{\sim}{u}}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} S_1 = \frac{1}{2A}\left[(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y\right] \\ S_2 = \frac{1}{2A}\left[(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y\right] \\ S_3 = \frac{1}{2A}\left[(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y\right] \end{cases}$$

براساس روش گالرکین داریم :

$W_i = S_i$ or $\underset{\sim}{W} = \underset{\sim}{S}^T$

subject: Finite Element

$$\int_{\Omega^{(e)}} \left[\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right] d\Omega^{(e)} =$$

$$\underbrace{\left\{ \int_{\Omega^{(e)}} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial x} \\ \frac{\partial S_2}{\partial x} \\ \frac{\partial S_3}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial x} & \frac{\partial S_2}{\partial x} & \frac{\partial S_3}{\partial x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial y} \\ \frac{\partial S_2}{\partial y} \\ \frac{\partial S_3}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial y} & \frac{\partial S_2}{\partial y} & \frac{\partial S_3}{\partial y} \end{bmatrix} \right) d\Omega^{(e)} \right\}}_{\underset{\sim}{k}^{(e)}_{3\times 3}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

و $\int_{\Omega^{(e)}} d\Omega^{(e)} = A$

$$\underset{\sim}{k}^{(e)} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ & k_{22} & k_{23} \\ Sym & & k_{33} \end{bmatrix}$$

$$k_{11} = \frac{1}{4A}\left[(x_3 - x_2)^2 + (y_2 - y_3)^2\right]$$

$$k_{12} = \frac{1}{4A}\left[(x_3 - x_2)(x_1 - x_3) + (y_2 - y_3)(y_3 - y_1)\right]$$

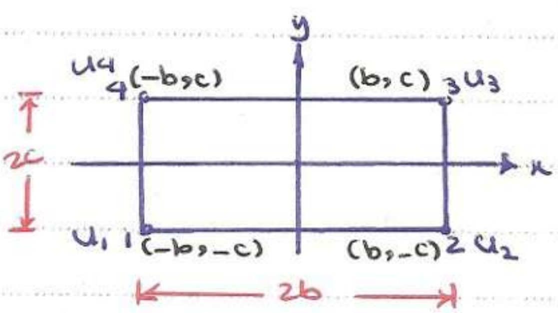
$$k_{13} = \frac{1}{4A}\left[(x_3 - x_2)(x_2 - x_1) + (y_2 - y_3)(y_1 - y_2)\right]$$

$$k_{22} = \frac{1}{4A}\left[(x_1 - x_3)^2 + (y_3 - y_1)^2\right]$$

$$k_{23} = \frac{1}{4A}\left[(x_1 - x_3)(x_2 - x_1) + (y_3 - y_1)(y_1 - y_2)\right]$$

بیان نیروی خارجی : $-\int_{\Omega^{(e)}} W g(x,y)\, d\Omega^{(e)} = -\int_{\Omega^{(e)}} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} g(x,y)\, d\Omega^{(e)}$

فرمول‌بندی با استفاده از المان مستطیلی چهار گرهی دوخطی :



$$u = \langle S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4 \rangle \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

$$S_1 = \frac{1}{4bc}(b - x)(c - y) \qquad S_2 = \frac{1}{4bc}(b + x)(c - y)$$

$$S_3 = \frac{1}{4bc}(b + x)(c + y) \qquad S_4 = \frac{1}{4bc}(b - x)(c + y)$$

subject: Finite Element

بطور خلاصه داریم:

$$\underset{4\times4}{\underline{K}}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial x} \\ \frac{\partial S_2}{\partial x} \\ \frac{\partial S_3}{\partial x} \\ \frac{\partial S_4}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial x} & \frac{\partial S_2}{\partial x} & \frac{\partial S_3}{\partial x} & \frac{\partial S_4}{\partial x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial y} \\ \frac{\partial S_2}{\partial y} \\ \frac{\partial S_3}{\partial y} \\ \frac{\partial S_4}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial y} & \frac{\partial S_2}{\partial y} & \frac{\partial S_3}{\partial y} & \frac{\partial S_4}{\partial y} \end{bmatrix} \right) d\Omega$$

به عنوان نمونه:

$$K_{11} = \int_{\Omega^{(e)}} \left(\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial y}\right)^2 \right) d\Omega^{(e)} = \frac{1}{(4bc)^2} \int_{-b}^{b} \int_{-c}^{c} \left[(c-y)^2 + (b-x)^2 \right] dx\,dy = \frac{b^2+c^2}{3bc}$$

$$\underset{4\times4}{\underline{K}}^{(e)} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ \text{sym} & & K_{33} & K_{34} \\ & & & K_{44} \end{bmatrix}$$

$$K_{12} = \frac{b^2 - 2c^2}{6bc} \qquad K_{13} = -\frac{b^2+c^2}{6bc}$$

$$K_{14} = \frac{c^2 - 2b^2}{6bc} \qquad K_{11} = K_{22} = K_{33} = K_{44}$$

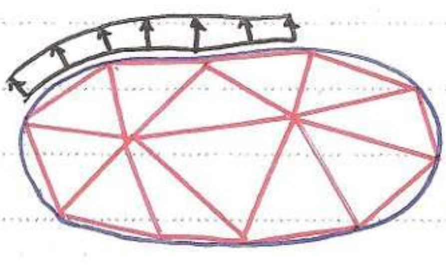
$$K_{34} = K_{12} \;;\; K_{23} = K_{14} \;;\; K_{24} = K_{13}$$

بردار نیروی خارجی:

$$-\int_{\Omega^{(e)}} W g(x,y)\, d\Omega^{(e)} = -\int_{-b}^{b} \int_{-c}^{c} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} g(x,y)\, dx\,dy = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

شرط مرزی طبیعی $\frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q}$

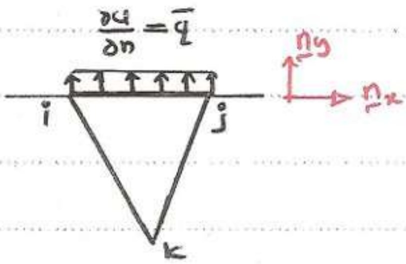
محاسبه ی انتگرال مرزی:



$$\int_{\Gamma_n} W \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = \sum_e \int_{\Gamma_n^{(e)}} W \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma$$

المان های مرزی که دارای شرط طبیعی باشند مد نظر است.

در یک حالت خاص و ساده:



$$\int W \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = \int_y W \cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}^{0} dy + \int_x W \frac{\partial u}{\partial y} dx = \int_{x_i}^{x_j} W \frac{\partial u}{\partial y} dx = \bar{q} \int_{x_i}^{x_j} \begin{bmatrix} S_i \\ S_j \end{bmatrix} dx$$

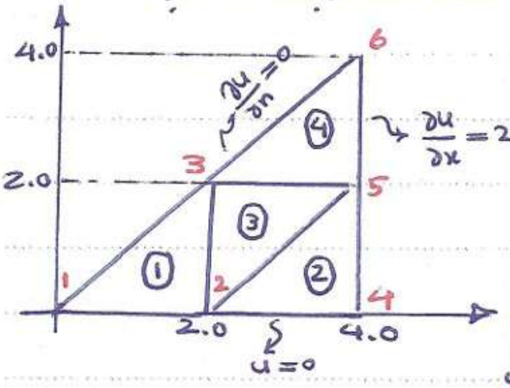
$$\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y$$

dy dx

$$= \bar{q} \int_0^{h_{ij}} \begin{bmatrix} S_i \\ S_j \end{bmatrix} dx = \bar{q}\, h_{ij} \begin{bmatrix} \frac{1!\,0!}{(1+0+1)!} \\ \frac{1!\,0!}{(1+0+1)!} \end{bmatrix} = \frac{\bar{q} h_{ij}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

subject: Finite Element

مثال: مطلوب است حل عددی معادله‌ی لاپلاس برای دامنه‌ی مثلثی نشان داده شده در شکل، (با استفاده از ۴ المان مثلثی خطی 3 گرهی).

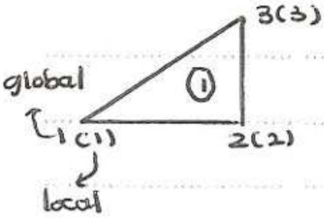


$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad ; \quad u(x,0)=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(4,y) = 2.0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0 \quad \text{روی وتر مثلث}$$

المان 1:
$1(0,0)$; $2(2,0)$; $3(2,2)$

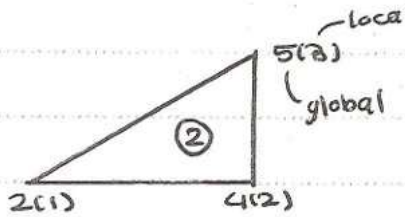


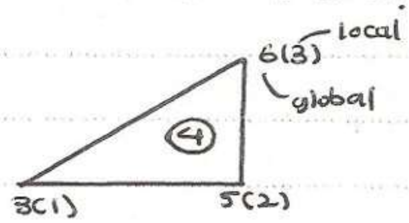
$$k_{11} = \frac{1}{4A}\left[(x_3-x_2)^2+(y_2-y_3)^2\right] \Rightarrow$$

$$k_{11} = \frac{1}{4\times 1/2\times 2\times 2}\left[(2-2)^2+(0-2)^2\right] = 0.5$$

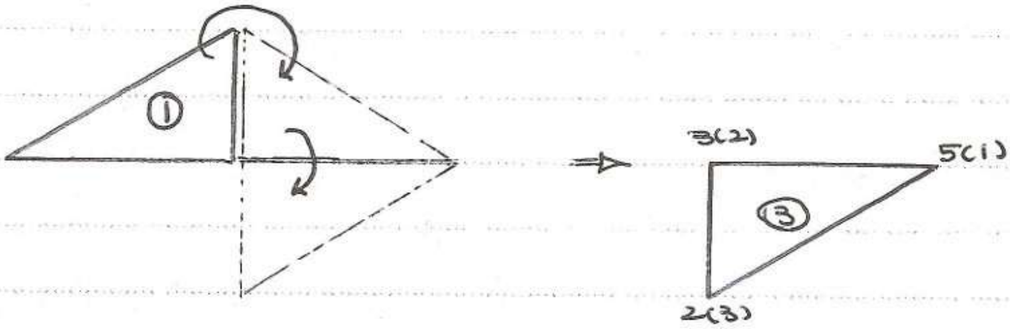
$$k^{(e)}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ & 1.0 & -0.5 \\ \text{Sym} & & 0.5 \end{bmatrix}$$

المان‌های 2 و 4 کاملاً مشابه المان 1 هستند.





از المان 1 به المان 3 می‌رسیم. به این شکل که ابتدا حول ضلع قائم المان 1 به اندازه‌ی 180° دوران داده و سپس حول ضلع افقی به همین میزان دوران می‌دهیم. باید در تشخیص صحیح شماره‌ی local گره‌ها بعد از تغییرات دقت شود:



assembling: طبق آنچه گفته شد واضح است که ماتریس سختی المان در مختصات global و یک ماتریس 6×6 است:

المان (e)	گره local (1)	(2)	(3)
1	1	2	3
2	2	4	5
3	5	3	2
4	3	5	6

برای assembling ابتدا لازم است $K_G^{(i)}$ که متعلق به المان iام است را برای هر المان بدست آورده و سپس از جمع کردن آن ها ماتریس سختی کلی K_G می رسیم. به عنوان نمونه در زیر $K_G^{(1)}$ را نوشته و سپس K_G را نوشته ایم.

و به همین ترتیب $K_G^{(2)}$ ، $K_G^{(3)}$ و $K_G^{(4)}$ را هم حساب می کنیم.

$$K_G^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 & - & - & - \\ -0.5 & 1.0 & -0.5 & - & - & - \\ 0 & -0.5 & 0.5 & - & - & - \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \end{bmatrix}$$

سایر درایه ها صفرند

$$K_G = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 2.0 & -1.0 & -0.5 & 0 & 0 \\ & & 2.0 & 0 & -1.0 & 0 \\ & sym & & 1.0 & -0.5 & 0 \\ & & & & 2.0 & -0.5 \\ & & & & & 0.5 \end{bmatrix}_{6\times6}$$

$$-\int_{\Omega}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)d\Omega-\int_{\Omega} w\,\cancel{g(x,y)}^{0}\,d\Omega+\int_{\Gamma_n} w\frac{\partial u}{\partial n}\,d\Gamma=0 \Rightarrow -K_G\,u+f=0$$

در این مسئله $g(x,y)$ صفر است. به عبارت دیگر معادله ای که مورد تحلیل قرار گرفته لاپلاس است نه پواسون و لذا اثر نیروی حجمی نداریم. بنابراین شرایط مرزی طبیعی باعث تولید نیرو می شوند. با توجه به شرایط مرزی داده شده در ابتدای مسئله، مشاهده می شود تنها مرز قائم (4-5-6) باعث تولید نیرو می شود لذا داریم:

المان 2: $\begin{bmatrix} F_4 \\ F_5 \end{bmatrix} = \frac{2\times2}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ المان 4: $\begin{bmatrix} F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \frac{2\times2}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\underset{\sim}{F}^T = \langle F_1 \quad F_2 \quad 0 \quad F_4 \quad 4 \quad 2 \rangle$$

$$\underset{\sim}{\bar{u}}^T = \langle 0 \quad 0 \quad u_3 \quad 0 \quad u_5 \quad u_6 \rangle$$

با توجه به صفر بودن u_1، u_2 و u_4 و با استفاده از ترفند قبل برای ماتریس سختی سطر و ستون‌های ۱، ۲ و ۴ را صفر کرده و اعضای قطری را ۱ عنوان و خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} 2.0 & -1.0 & 0.0 \\ -1.0 & 2.0 & -0.5 \\ 0.0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_3 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.0 \\ 6.0 \\ 10.0 \end{bmatrix}$$

تحلیل مسائل مکانیک جامدات دو بعدی:

۱) پیچش اعضا با مقاطع دلخواه (غیر مدور)

۲) مسائل الاستیسیته دو بعدی (تنش مستوی - کرنش مستوی)

۳) مسائل الاستیسیته متقارن محوری

۱- پیچش اعضا با مقاطع دلخواه:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + 2G\theta = 0$$: فرمول بندی پرانتل

Φ : تابع تنش

G : مدول الاستیسیته برشی

θ : زاویه پیچش در واحد طول میله

به طوریکه $\rightarrow \begin{cases} \tau_{zx} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \tau_{zy} = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} \end{cases}$

$\Rightarrow$ ممان پیچش اعمال شده : $T = 2\int_A \Phi \, dA$

سطح مقطع میله (A)

در صورت داشتن مقدار زاویه θ (زاویه دوران)، مسئله به حل معادله پواسون تبدیل می‌شود که در آن:

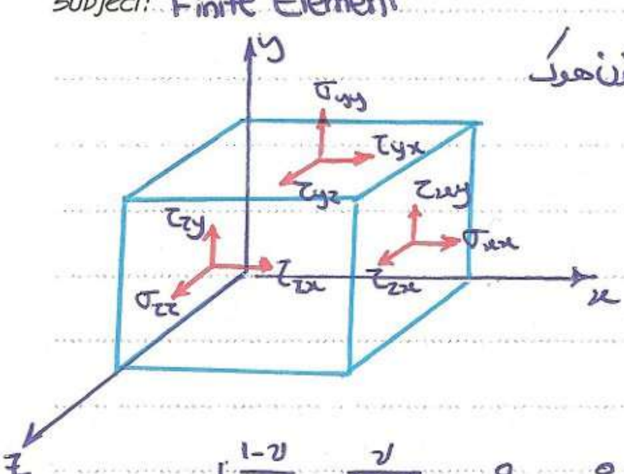
$$g(x,y) = -2G\theta$$

۲- مسائل الاستیسیته دو بعدی (تنش مسطح - کرنش مسطح):

$$\underset{\sim}{\sigma}^T = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz}]$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon}^T = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz}]$$ (شکل در صفحه بعد رسم شده است)

subject: Finite Element



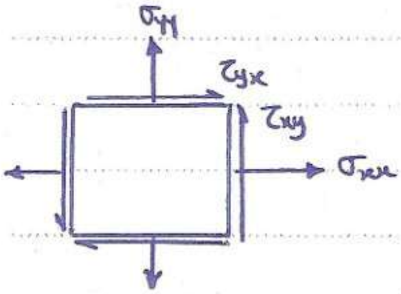
$\underset{\sim}{\sigma}_{6\times1} = \underset{\sim}{D}_{6\times6}\ \underset{\sim}{\varepsilon}_{6\times1}$ بر اساس قانون هوک

(قانون عمومی هوک برای مواد همگن و همسانگرد)

$$\underset{\sim}{D} = \frac{E}{1+\nu}\begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{Sym} & & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

با فرض کوچک بودن ضخامت و صرف نظر از پارامترهای تنش در راستای Z داریم:

a) تنش مستوی $\quad \sigma_{zz} = \tau_{zy} = \tau_{zx} = 0$



$$\underset{\sim}{\sigma}^T = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \tau_{xy}]$$

$$\sigma_{zz} = 0 \Rightarrow \varepsilon_{zz} = \frac{-\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \neq 0$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{\sigma}_{3\times1} = \underset{\sim}{D}_{3\times3}\ \underset{\sim}{\varepsilon}_{3\times1} \quad ;$$

$$\underset{\sim}{D} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

b) کرنش مستوی $\quad \varepsilon_{zz} = \gamma_{zy} = \gamma_{zx} = 0 \quad ; \quad \underset{\sim}{\varepsilon}^T = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy}]$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] = 0 \quad ; \quad \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \neq 0$$

subject: Finite Element

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} - \nu^2(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})\right] \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx} - \nu^2(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})\right] \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \end{cases}$$

$$\underset{\sim}{\sigma}_{3\times1} = \underset{\sim}{D}_{3\times3}\, \underset{\sim}{\varepsilon}_{3\times1} \; ; \quad \underset{\sim}{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu \end{bmatrix}$$

میدان‌های جابجایی : u , v , w

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{cases}$$

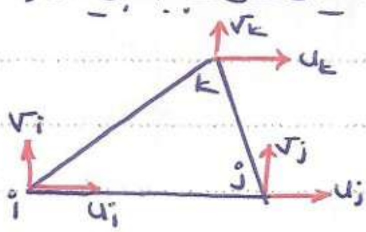
$$\underbrace{U^{(e)}}_{\text{انرژی کرنشی ذخیره شده در المان}} = \frac{1}{2}\int_V \underset{\sim}{\sigma}^T \underset{\sim}{\varepsilon}\, dV \; ; \quad \underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{\varepsilon} \Rightarrow \underset{\sim}{\sigma}^T = \underset{\sim}{\varepsilon}^T \underset{\sim}{D}^T \; ; \quad \underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{D}^T \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{\sigma}^T = \underset{\sim}{\varepsilon}^T \underset{\sim}{D}^T = \underset{\sim}{\varepsilon}^T \underset{\sim}{D}$$

$$\Rightarrow U^{(e)} = \frac{1}{2}\int_V \underset{\sim}{\varepsilon}^T \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{\varepsilon}\, dV$$

در حالت دو بعدی میدان‌های جابجایی u و v هستند. حال اگر از المان مثلثی سه گرهی استفاده کنیم، داریم:

$$\begin{cases} u = S_i u_i + S_j u_j + S_k u_k \\ v = S_i v_i + S_j v_j + S_k v_k \end{cases}$$



$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_i & 0 & S_j & 0 & S_k & 0 \\ 0 & S_i & 0 & S_j & 0 & S_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{S}^T \underset{\sim}{\bar{u}}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial S_i}{\partial x} u_i + \frac{\partial S_i}{\partial x} u_j + \frac{\partial S_k}{\partial x} u_k = \frac{1}{2A}(\beta_i u_i + \beta_j u_j + \beta_k u_k)$$

به طور مشابه: $\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2A}(\gamma_i v_i + \gamma_j v_j + \gamma_k v_k)$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2A}(\gamma_i u_i + \beta_i v_i + \gamma_j u_j + \beta_j v_j + \gamma_k u_k + \beta_k v_k)$$

subject: Finite Element

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \underbrace{\overbrace{\frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_k & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_k \\ \gamma_i & \beta_i & \gamma_j & \beta_j & \gamma_k & \beta_k \end{bmatrix}}^{cte}}_{\underset{\sim}{B}} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix} \quad ; \quad \underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{B}\,\bar{\underset{\sim}{u}}$$

برای المان مثلثی ماتریس B ثابت است.

$$u^{(e)} = \frac{1}{2}\int_V \underset{\sim}{\varepsilon}^T \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{\varepsilon}\, dv = \frac{1}{2}\int_V \bar{\underset{\sim}{u}}^T \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{B}\, \bar{\underset{\sim}{u}}\, dv$$

و از طرفی می‌دانیم

$$\frac{\partial u^{(e)}}{\partial \bar{\underset{\sim}{u}}^T} = \underset{\sim}{k}^{(e)} \bar{\underset{\sim}{u}} \quad \Rightarrow \quad \underset{\sim}{k}^{(e)} = \int_V \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{B}\, dv$$

این رابطه برای تمام المان‌های سازه‌ای عمومیت دارد.

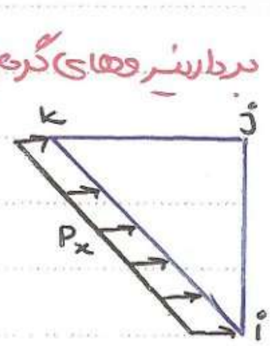
برای المان مثلثی D و B ثابت بوده و از انتگرال بیرون می‌آیند. لذا داریم:

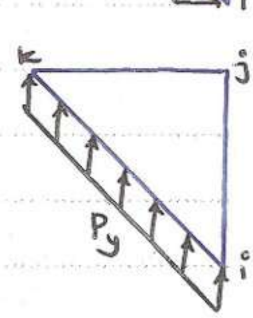
$$\underset{\sim}{k}^{(e)} = \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{B}\, V$$

حجم المان: $V = tA =$ ضخامت $\times$ سطح مقطع

بردار نیروهای گرهی:

$$\underset{\sim}{F}^{(e)} = \begin{bmatrix} f_{ix} \\ f_{iy} \\ f_{jx} \\ f_{jy} \\ f_{kx} \\ f_{ky} \end{bmatrix} \quad ; \quad F^{(e)} = \int_A \underset{\sim}{S}\, \underset{\sim}{P}(x,y)\, dA$$





ادامه روابط در صفحه بعدی

subject: Finite Element

$$F^{(e)} = \int_A \begin{bmatrix} S_i & 0 \\ 0 & S_i \\ S_j & 0 \\ 0 & S_j \\ S_k & 0 \\ 0 & S_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} \underbrace{dA}_{t\,dS} = t \int_0^{l_{ik}} \begin{bmatrix} S_i & 0 \\ 0 & S_i \\ S_j & 0 \\ 0 & S_j \\ S_k & 0 \\ 0 & S_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} dS$$

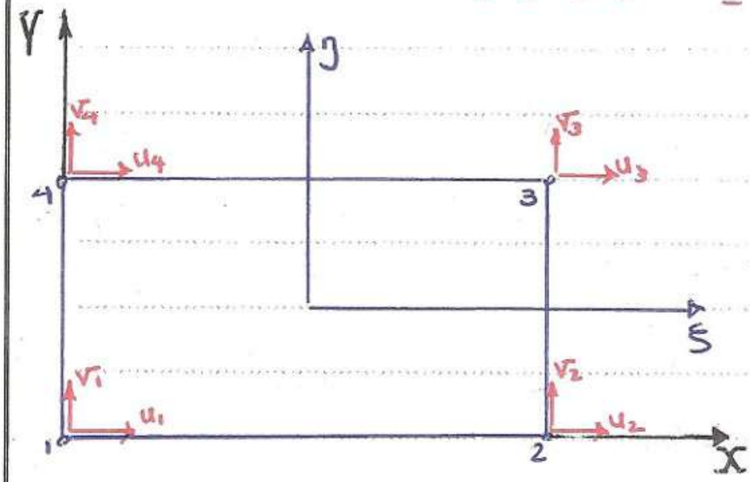
ضخامت

$$F^{(e)} = \frac{t\, l_{ik}}{2} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ 0 \\ 0 \\ P_x \\ P_y \end{bmatrix}$$

اگر روی اضلاع دیگر هم به همین شکل بار داشتیم، مثل همین حالت فوق جداگانه محاسبه کرده و در نهایت همه را با هم جمع (assemble) می‌کنیم.

subject: Finite Element

فرمولبندی ایزوپارامتریک با استفاده از المان مستطیلی ۴ گره‌ای دوبعدی:



$$S_i = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)$$

$$\begin{cases} x = S_1x_1 + S_2x_2 + S_3x_3 + S_4x_4 \\ y = S_1y_1 + S_2y_2 + S_3y_3 + S_4y_4 \end{cases}$$

با استفاده از دو رابطه فوق، دستگاه مختصات یا بعبارتی هندسه شکل را هم بصورت ترکیبی از توابع شکل بیان می‌کنیم تا به فرمولبندی ایزوپارامتریک برسیم. از طرفی داریم:

$$\begin{cases} u = S_1u_1 + S_2u_2 + S_3u_3 + S_4u_4 \\ v = S_1v_1 + S_2v_2 + S_3v_3 + S_4v_4 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & S_2 & 0 & S_3 & 0 & S_4 & 0 \\ 0 & S_1 & 0 & S_2 & 0 & S_3 & 0 & S_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

قبلاً نشان داده شده است که:

if $f = f(x,y)$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \underset{\sim}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \underset{\sim}{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi}(S_1x_1+S_2x_2+S_3x_3+S_4x_4) & \frac{\partial}{\partial \xi}(S_1y_1+S_2y_2+S_3y_3+S_4y_4) \\ \frac{\partial}{\partial \eta}(S_1x_1+S_2x_2+S_3x_3+S_4x_4) & \frac{\partial}{\partial \eta}(S_1y_1+S_2y_2+S_3y_3+S_4y_4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -(1-\eta)x_1+(1-\eta)x_2+(1+\eta)x_3-(1+\eta)x_4 & -(1-\eta)y_1+(1-\eta)y_2+(1+\eta)y_3-(1+\eta)y_4 \\ -(1-\xi)x_1-(1+\xi)x_2+(1+\xi)x_3+(1-\xi)x_4 & -(1-\xi)y_1-(1+\xi)y_2+(1+\xi)y_3+(1-\xi)y_4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \underset{\sim}{J}^{-1} = \frac{1}{\det \underset{\sim}{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\det \underset{\sim}{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{J}^{-1}} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$\det \underset{\sim}{J} = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}$$

تعميم :
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \underset{\sim}{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \overbrace{\frac{1}{\det \underset{\sim}{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{11} \\ -J_{21} & J_{11} & J_{22} & -J_{12} \end{bmatrix}}^{(\underset{\sim}{A}_1)_{3\times 4}} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{\bar{u}}$$

$$u = S_1 u_1 + S_2 u_2 + S_3 u_3 + S_4 u_4$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = S_{1,\xi}\, u_1 + S_{2,\xi}\, u_2 + S_{3,\xi}\, u_3 + S_{4,\xi}\, u_4$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) & 0 \\ -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) & 0 \\ 0 & -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) \\ 0 & -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) \end{bmatrix}}_{(\underset{\sim}{A}_2)_{4\times 8}} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{\bar{u}} \quad , \quad (\underset{\sim}{B})_{3\times 8} = (\underset{\sim}{A}_1)_{3\times 4} \times (\underset{\sim}{A}_2)_{4\times 8}$$

subject: Finite Element

قبلاً نشان داده شده است : $U^{(e)} = \frac{1}{2}\int_v \underset{\sim}{\sigma}^T \underset{\sim}{\varepsilon}\, dv = \frac{1}{2}\int_v \underset{\sim}{\varepsilon}^T \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{\varepsilon}\, \overbrace{dv}^{t_e dA} = \frac{t_e}{2}\int_A \underset{\sim}{\varepsilon}^T \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{\varepsilon}\, dA$

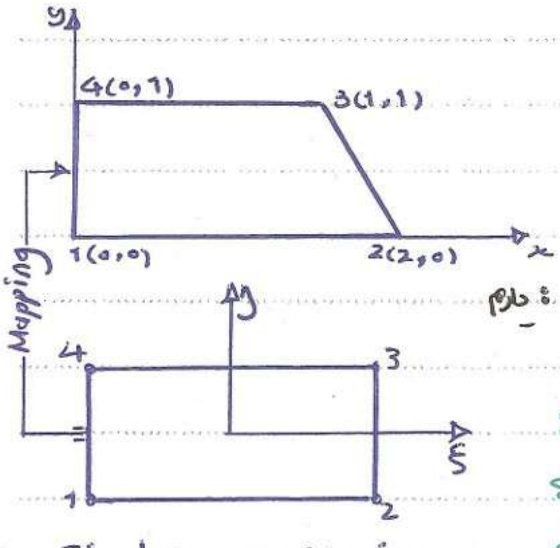
$$\rightarrow U^{(e)} = \frac{t_e}{2}\int_A \bar{\underset{\sim}{u}}^T \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{B}\, \bar{\underset{\sim}{u}}\, \overbrace{dA}^{dx\,dy} \quad , \quad \frac{\partial U^{(e)}}{\partial \bar{\underset{\sim}{u}}^T} = \underset{\sim}{K}^{(e)} \bar{\underset{\sim}{u}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underset{\sim}{K}^{(e)}_{8\times 8} = t_e \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{B}\, \det \underset{\sim}{J}\, d\xi\, d\eta}$$

$$\underset{\sim}{f}^{(e)} = \int_A \underset{\sim}{S}\, \underset{\sim}{P}(x,y)\, dA$$

المان‌های ایزوپارامتریک ـ نگاشت : Mapping

در این مبحث به دنبال پیدا کردن ماتریس سختی المان‌هایی هستیم که لزوماً مستطیل و مربع و ... نیستند و بعضاً دارای لبه‌های گرد و یا غیرموازی اند. برای این کار باید از المان‌های پایه استفاده کرده و با روش‌های نگاشت ماتریس سختی المان مورد نظر را بدست آورد. به عنوان مثال می‌خواهیم ماتریس سختی المان ذوزنقه‌ای شکل زیر را با مختصات گره‌ای داده شده بدست آوریم. برای این کار یک المان مستطیلی را روی المان ذوزنقه‌ای مورد نظر map می‌کنیم.



$$\begin{cases} x = S_1x_1 + S_2x_2 + S_3x_3 + S_4x_4 \\ y = S_1y_1 + S_2y_2 + S_3y_3 + S_4y_4 \end{cases}$$

داریم : $x = S_1 \times 0 + S_2 \times 2 + S_3 \times 1 + S_4 \times 0 = 2S_2 + S_3$

$y = S_1 \times 0 + S_2 \times 0 + S_3 \times 1 + S_4 \times 1 = S_3 + S_4$

$S_i = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)$

$S_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$

$S_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$

$S_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$

درنتیجه داریم $\begin{cases} x = \frac{1}{4}(1+\xi)(3-\eta) \\ y = \frac{1}{2}(1+\eta) \end{cases}$

کنترل جواب در گره 2

$\xi = +1 \quad \eta = -1 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \ ✓ \\ y = 0 \ ✓ \end{cases}$

درست

subject: Finite Element

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & S_2 & 0 & S_3 & 0 & S_4 & 0 \\ 0 & S_1 & 0 & S_2 & 0 & S_3 & 0 & S_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(3-\eta) & 0 \\ -\frac{1}{4}(1+\xi) & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{J}^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{8}(3-\eta) - 0} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4}(1+\xi) & \frac{1}{4}(3-\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3-\eta} & 0 \\ \frac{2(1+\xi)}{3(1-\eta)} & 2 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{4}{3-\eta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\xi)}{3-\eta} & 2 \\ \frac{2(1+\xi)}{3-\eta} & 2 & \frac{4}{3-\eta} & 0 \end{bmatrix}}_{A_1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) & 0 \\ -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) & 0 \\ 0 & -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) \\ 0 & -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) \end{bmatrix}}_{A_2} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{k}^{(e)} = t_e \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{B} \left(\frac{1}{8}(3-\eta)\right) d\xi\, d\eta$$

درامتحان ممکن است ترم $k^{(e)}_{22}$ را بخواهند مثلاً. از رابطه $k'_{ij} = B_{im} B_{jn} D_{mn}$ استفاده کرده و می‌نویسیم:

$k'_{22} = B_{2m} B_{2n} D_{mn}$

با فرض تنش مستوی $\underset{\sim}{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$

$$k'_{22} = B_{2m}B_{2n}D_{mn} = B_{21}^2 D_{11} + 2B_{21}B_{22}D_{12} + B_{22}^2 D_{22} + B_{33}^2 D_{33}$$

$$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{A_1} \times \underset{\sim}{A_2} \quad , \quad A_{ij} = (A_1)_{im}(A_2)_{mj}$$

$$B_{21} = (A_1)_{2m}(A_2)_{m1} = \cancelto{0}{(A_1)_{21}}(A_2)_{11} + \cancelto{0}{(A_1)_{22}}(A_2)_{21} + \cancelto{0}{(A_1)_{23}}(A_2)_{31} = 0$$

بطور مشابه $B_{22} = -(1+\xi)\dfrac{(1-\eta)}{2(3-\eta)}$

$$B_{33} = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{2(3-\eta)} - \frac{1+\xi}{2}$$

$$k'_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{(1-\eta)^2(1+\xi)^2}{4(3-\eta)^2} + \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{(1+\xi)(1-\eta)}{2(3-\eta)} - \frac{1+\xi}{2}\right)^2\right)$$

$$f(\xi,\eta) = t_e\, k'_{22}\,\frac{(3-\eta)}{8}$$

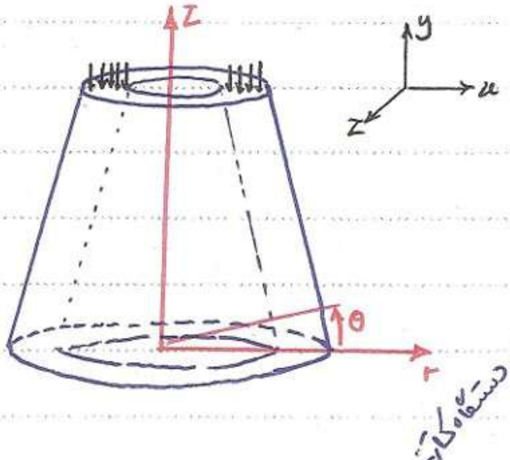
که رابطه فوق هم با استفاده از انتگرال چند نقطه ای گاوس به جواب می رسد، یعنی:

$$K_{22} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \underbrace{t_e\, k'_{22}\,\frac{(3-\eta)}{8}}_{f(\xi,\eta)}\, d\xi\, d\eta$$

مسائل الاستیسیته متقارن محوری:

فرض می شود که جسمی متقارن مانند شکل زیر داریم.

بردار کرنش در دستگاه مختصات کارتزین بصورت زیر است.



دستگاه کارتزین $\quad \underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}$

در دستگاه مختصات استوانه ای $\quad \underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{z\theta} \\ \gamma_{r\theta} \end{bmatrix}$

با فرض میدان جابجایی u، v، w در راستای x، y و z داریم:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial v}{\partial z} \qquad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \qquad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \qquad \gamma_{z\theta} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}$$

subject: Finite Element

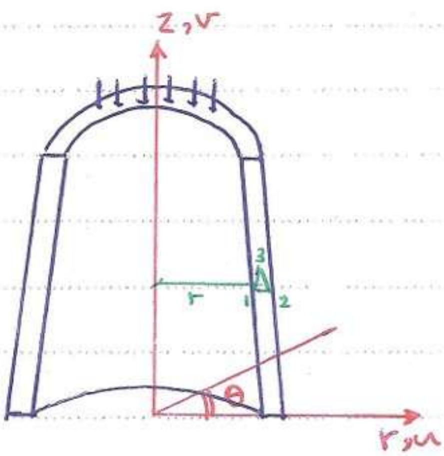
بیان شده است که مسئله متقارن محوری است. لذا به دلیل صفر شدن دو مؤلفه کرنشی $\gamma_{r\theta}$ و $\gamma_{z\theta}$ و همچنین ثابت بودن مقدار $\varepsilon_{\theta\theta}$ ، مسئله می‌تواند به یک مسئله دو بعدی تبدیل شده و به راحتی حل شود. یک بعد از تغییر شکل بصورت تئوری می‌آید.

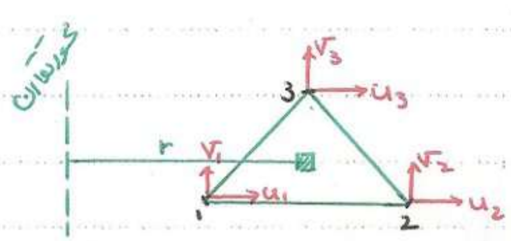
$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{2\pi(r+u) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r}$$

ولذا بردار کرنش از 6×1 به 4×1 تبدیل می‌شود و تنها چهار مؤلفه خواهد داشت.

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} S_{1,r} & 0 & S_{2,r} & 0 & S_{3,r} & 0 \\ S_1/r & 0 & S_2/r & 0 & S_3/r & 0 \\ 0 & S_{1,z} & 0 & S_{2,z} & 0 & S_{3,z} \\ S_{1,z} & S_{1,r} & S_{2,z} & S_{2,r} & S_{3,z} & S_{3,r} \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{\bar{U}}} \Rightarrow \underset{\sim}{\varepsilon}_{4\times1} = \underset{\sim}{B}_{4\times6}\, \underset{\sim}{\bar{U}}_{6\times1}$$

با مقطع زدن داریم:





$$\begin{cases} u = S_1 u_1 + S_2 u_2 + S_3 u_3 \\ v = S_1 v_1 + S_2 v_2 + S_3 v_3 \end{cases}$$

توابع شکلی همان توابع حالت دو بعدی هستند با این تفاوت x و y به ترتیب به r و z تغییر یافته‌اند. داریم:

$$S_i = \frac{1}{2A}(\alpha_i + \beta_i r + \gamma_i z)$$

$$\alpha_i = r_j z_k - r_k z_j \quad ; \quad \beta_i = z_j - z_k \quad ; \quad \gamma_i = r_k - r_j$$

با توجه به درجات آزادی، ماتریس سختی یک ماتریس 6×6 خواهد بود.

$$\underset{\sim}{k}^{(e)}_{6\times6} = \int_v \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{B}\, dv \quad ; \quad dv = 2\pi r\, dr\, dz$$

یک جزء دیفرانسیلی به ابعاد dr dz داریم
که حول محور تقارن دوران می‌نماید

subject: Finite Element

صفحه ۳۷۱ کتاب مهندس حاجی اخوی

$$\underset{\sim}{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{1-\nu} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon}_{4\times1} = \underset{\sim}{B}_{4\times6}\, \underset{\sim}{\bar{U}}_{6\times1}$$

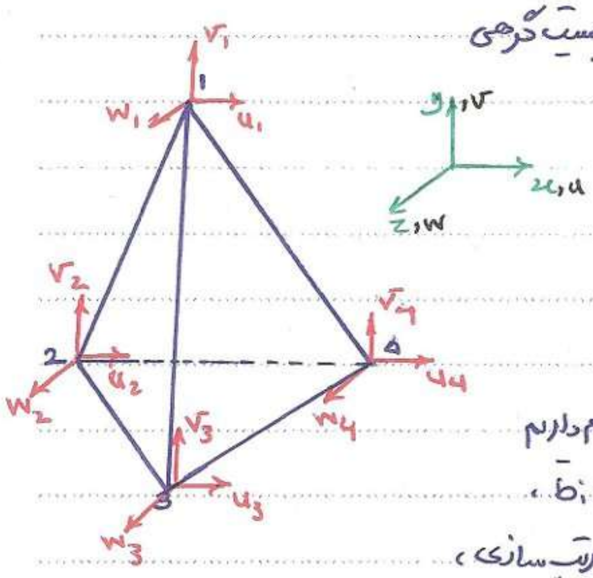
المان‌های سه‌بعدی:

المان‌های سه‌بعدی هم به نوعی همان سه‌بعدی شده‌ی المان‌های دوبعدی اند. المان‌های سه بعدی شامل دو دسته‌ی کلی هستند: ۱- المان‌های هرمی ۲- المان‌های آجری (=مکعبی)

در اینجا هم المان‌های سه‌بعدی حرارتی داریم و المان‌های سه‌بعدی سازه‌ای.

در المان‌های حرارتی، برای هر گره یک درجه آزادی، و در المان‌های سازه‌ای سه درجه آزادی u، v و w در هر گره داریم.

* المان‌های هرمی: ۱- ۴ گره‌ای ۲- ۱۰ گرهی
* المان‌های آجری: ۱- هشت گرهی ۲- بیست گرهی



$$u = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z$$

$$v = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 z$$

$$w = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z$$

در اینجا هم 12 تا ضریب داریم که مجهول‌اند و 12 مقدار معلوم هم داریم (u، v و w برای هر گره معلوم‌اند). با جایگذاری، a_i، b_i، c_i بدست می‌آیند و بعد از بدست آوردن این ضرایب و مرتب‌سازی، توابع شکل بدست می‌آیند:

توابع شکل المان‌های هرمی ۴ گرهی $\quad N_i = \frac{1}{6V}(\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y + \delta_i z)$

$$6V = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}, \quad \alpha_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix}, \quad \beta_i = \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{vmatrix}$$

subject: Finite Element

$$\gamma_i = \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_k & 1 & z_k \\ x_l & 1 & z_l \end{vmatrix} \qquad \delta_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{vmatrix}$$

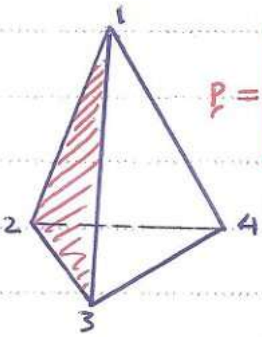
$$\begin{cases} u = S_1u_1 + S_2u_2 + S_3u_3 + S_4u_4 \\ v = S_1v_1 + S_2v_2 + S_3v_3 + S_4v_4 \Rightarrow \\ w = S_1w_1 + S_2w_2 + S_3w_3 + S_4w_4 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc:ccc} S_1 & 0 & 0 & S_2 & 0 & 0 & S_3 & 0 & 0 & S_4 & 0 & 0 \\ 0 & S_1 & 0 & 0 & S_2 & 0 & 0 & S_3 & 0 & 0 & S_4 & 0 \\ 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 & S_2 & 0 & 0 & S_3 & 0 & 0 & S_4 \end{array}\right] \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \begin{bmatrix} S_i & 0 & 0 \\ 0 & S_i & 0 \\ 0 & 0 & S_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{4} \underbrace{\begin{bmatrix} S_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & S_{i,y} & 0 \\ 0 & 0 & S_{i,z} \\ S_{i,y} & S_{i,x} & 0 \\ 0 & S_{i,z} & S_{i,y} \\ S_{i,z} & 0 & S_{i,x} \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{B}_i} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{B}_i = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 \\ 0 & 0 & \delta_i \\ \gamma_i & \beta_i & 0 \\ 0 & \delta_i & \gamma_i \\ \delta_i & 0 & \beta_i \end{bmatrix} = cte$$

$$\underset{\sim}{k}^{(e)}_{12\times12} = \int_V \underset{\sim}{B}^T_{12\times6} \, \underset{\sim}{D}_{6\times6} \, \underset{\sim}{B}_{6\times12} \, dV = \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{B} V$$



$$\underset{\sim}{P} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}$$

روی سطح هاشور زده نیرو وارد می‌شود. داریم:

$$\underset{\sim}{F}^{(e)} = \int_A \underset{\sim}{S} P \, dA \quad ;$$

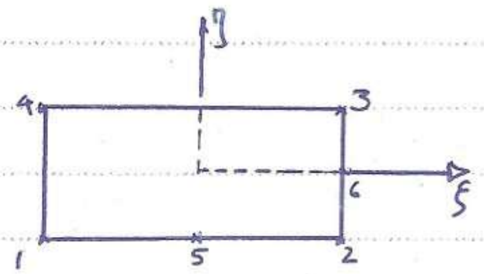
subject: Finite Element

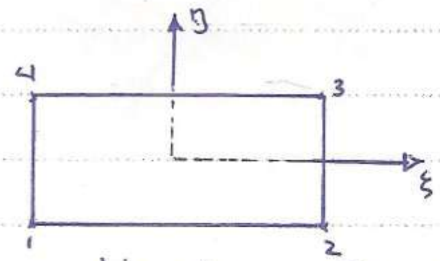
$$\underset{\sim}{S} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} \rightarrow F_1 = \frac{A_{1-2-3}}{3} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{\sim}{F} = \frac{A_{1-2-3}}{3} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ P_x \\ P_y \\ P_z \\ \vdots \\ P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}_{12\times1}$$

در المان سه‌بعدی هرمی چهاروجهی ، مختصات Global دیگر مناسب نبوده و از مختصات بی‌بعد حجمی (مشابه بی‌بعد سطحی) استفاده می‌شود.

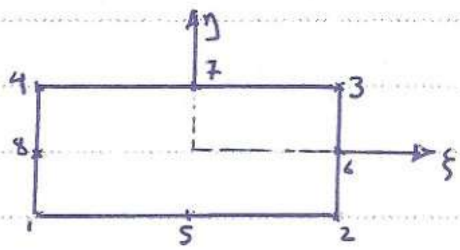
Transitional Degrading Finite Element

المان‌های محدود انتقالی ـ تنزلی:





این المان‌ها حالتی بین المان‌های خطی و درجه 2 می‌باشند. هدف محاسبه‌ی توابع شکل برای چنین المان‌هایی است.



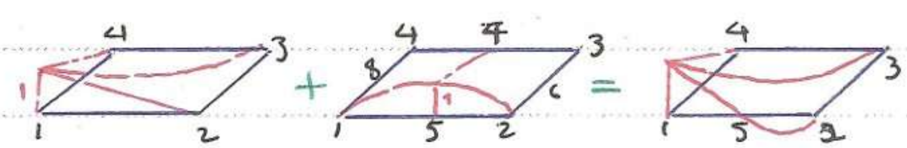
المان 4 گره‌ای : $S_4 = \hat{S}_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$

المان هشت گره‌ای : $S_2 = \hat{S}_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(-1+\xi-\eta)$

$$S_5 = \hat{S}_5 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi)$$

$$S_6 = \hat{S}_6 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi)$$

حال برای گره‌های 1 و 2 هم از سوپرپوزیشن استفاده کرده و تغییر شکل واحدی در گره 1 می‌دهیم و از سوپرپوزیشن به نحوی استفاده می‌کنیم که در سایر گره‌ها مقدار تابع شکل صفر شود:



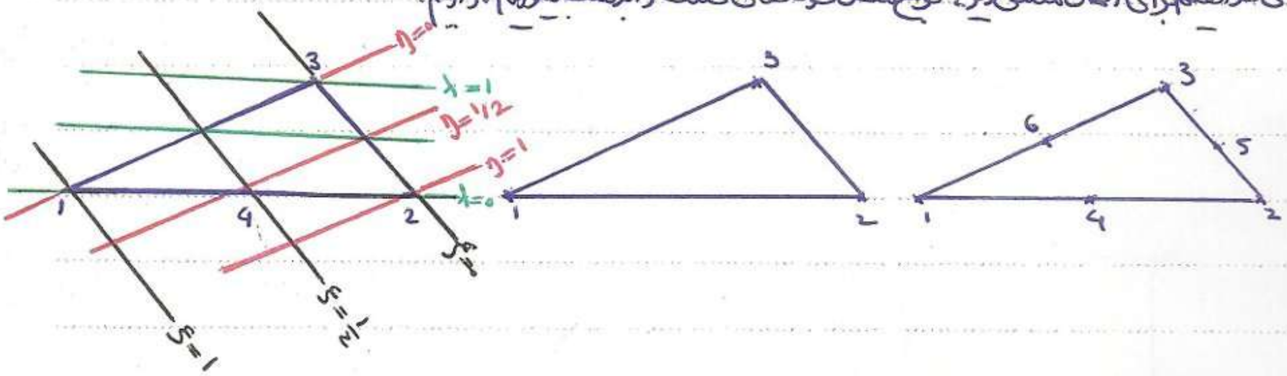
subject: Finite Element

$$S_1 = \hat{S}_1 - \frac{1}{2}\hat{S}_5 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) - \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$
$$= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1-1-\xi) = -\xi/4(1-\xi)(1-\eta)$$

حالا برای محاسبه S_3 داریم:

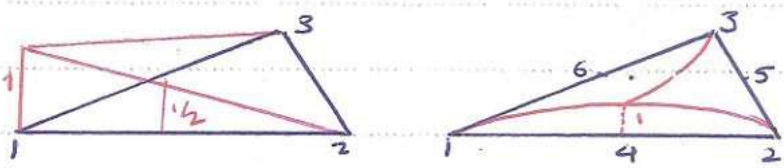
$$S_3 = \hat{S}_3 - \frac{1}{2}\hat{S}_6 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) - \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta^2)$$
$$= \frac{\eta}{4}(1+\eta)(1+\xi)$$

حالا می‌خواهیم برای المان مثلثی زیر، توابع شکل گره‌های مختلف را بدست بیاوریم. داریم:



$$S_3 = \hat{S}_3 = \lambda = 1-\xi-\eta$$
$$S_4 = \hat{S}_4 = 4\xi\eta$$

برای گره ۱، داریم:



$$S_2 = \hat{S}_2 - \frac{1}{2}\hat{S}_4 = \eta - 2\xi\eta = \eta(1-2\xi)$$