سیستمهاس کنترل مدرن

فصل ۵

تحلیل پایداری

❖ مقدمه

- ✓ *پایداری* مهم ترین مشخصه سیستم های دینامیکی
- ✓ *پایداری* سیستم های دینامیکی: از NLTV تا LTV و LTI
- ✓ *پایداری* سیستم های دینامیکی LTI: *مفهوم مقدار ویژه*
- ✓ روشهای آزمون *پایداری* سیستم های دینامیکی LTI
- ✓ *لیاپانوف* یک نام کلیدی در تحلیل *پایداری* سیستم های دینامیکی: از NLTV تا LTV و LTI
- ✓ دو روش اصلی *لیاپانوف:*
  - روش اول *لیاپانوف*
  - روش دوم *لیاپانوف*

$$\dot{x}(t)=f\,[x(t),u(t),t]$$

❖ تعاریف پایداری

- مفهوم نقطه تعادل

مثال ۵-۱-۱- تنها نقطه تعادل سیستم زیر

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$

مبدأ فضای حالت است. زیرا بُعد فضای پوچی ماتریس A صفر است. حال آنکه برای سیستم

زیر

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$

علاوه بر مبدأ، زیر فضای اسپن شده توسط بردار $\mathbf{x}_e=[-۲\quad ۱]^T$ مجموعه نقاط تعادل سیستم

است. در سیستم‌های غیر خطی، نقاط تعادل به صورت نقاط مجزا نیز رخ می‌دهند. سیستم غیر

خطی زیر

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=-\sin\mathbf{x}$$

نقاط تعادلی در $\mathbf{x}_e=\pm n\pi$ برای $n=۰,۱,۲,\ldots$ دارد.

• تعریف نقطه تعادل پایدار به مفهوم لیاپانوف

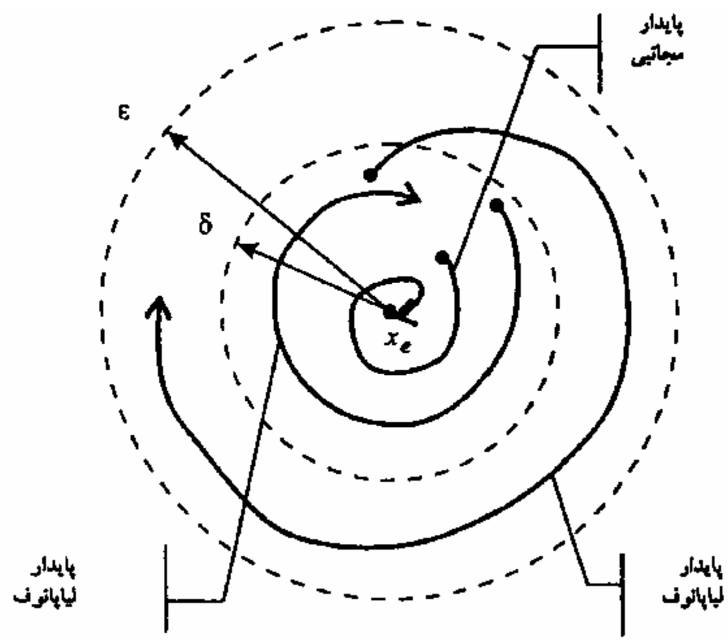
تعریف : نقطه تعادل $x_e = 0$ در زمان t_0 به تعبیر لیاپانوف (in the sense of Lyapunov) پایدار است اگر

به ازای $\epsilon > 0$ مقدار $\delta(t_0, \epsilon) > 0$ وجود داشته باشد بطوریکه

$$\|x(t_0)\| < \delta(t_0, \epsilon) \longrightarrow \|x(t)\| < \epsilon \qquad \forall t \geq t_0$$

تعریف بطور یکنواخت: δ به t_0 بستگی نداشته باشد یعنی

$$\|x(t_0)\| < \delta(\epsilon) \longrightarrow \|x(t)\| < \epsilon \qquad \forall t \geq t_0$$



• **تعریف** نقطه تعادل *پایدار مجانبی*

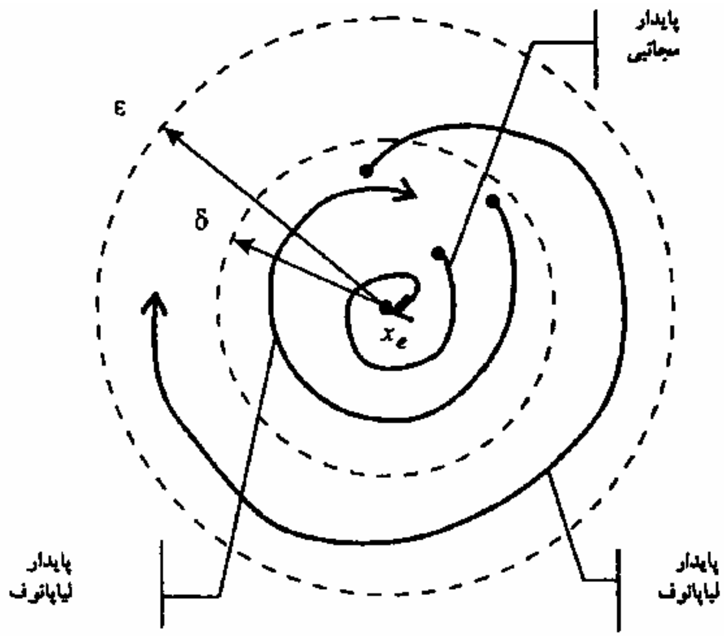
- نقطه تعادل ۰ به صورت مجانبی پایدار است اگر:

۱- پایدار به مفهومو باشد

۲- $r>0$ وجود داشته باشد. به گونه‌ای که $\|x(0)\| < r$

وهنگامی که $t \to \infty$ میل می‌کند $x(t) \to 0$ میل کند.

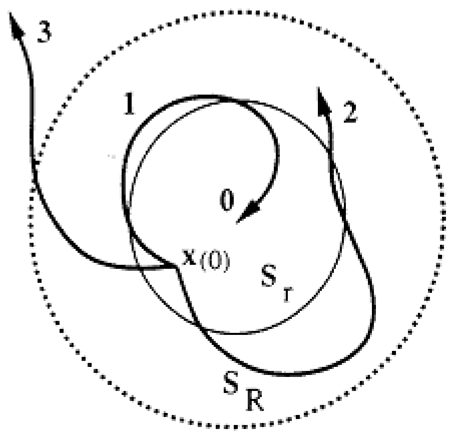
- در پایداری مجانبی نقطه تعادل پایدار است و به علاوه، زمانی که t به سمت بینهایت میل می‌کند حالتهایی که درنزدیکی ۰ شروع می‌شوند، واقعاً به ۰ همگرا شوند.



- **تعریف** حوزه جذب

قلمرو جذب یک نقطه تعادل به بزرگترین ناحیه آن اطلاق می‌شود، یعنی، مجموعه تمام نقاطی که اگر مسیرها از این نقاط آغاز شوند، نهایتاً به مبدا همگرا می‌شوند.

- **تعریف** نقطه تعادل *ناپایدار*
- **تعریف** *پایداری داخلی*
- **تعریف** *پایداری BIBO*
- **تعریف** *پایداری-T یا کاملا پایدار*



curve 1 - asymptotically stable

curve 2 - marginally stable

curve 3 - unstable

پایداری مجانبی کلی

- اگر پایداری مجانبی در هر حالت اولیه‌ای حفظ شود، نقطه تعادل را در مقیاس وسیع، به صورت مجانبی پایدار می‌نامند. همچنین سیستم را به صورت مجانبی (یا نمایی) پایدار کلی نیز می‌نامند.

پایداری کلی Global Stability : آن است که اگر از هر نقطه فضای حالت سیستم رها شود در نهایت به مبداء مختصات منتهی گردد.

نکته: سیستم پایدار کلی حتماً دارای یک نقطه تعادل است و نه بیشتر.

نکته: پایداری کلی را Stability in large هم می‌گویند.

❖ پایداری سیستم های LTI

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

برای سیستم بدون ورودی با مقادیر ویژه متمایز داریم:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e^{\lambda_i t} \mathrm{e}_i$$

- **قضیه** سیستم *پایدار به مفهوم لیاپانوف* است اگر و فقط اگر:

– کلیه مقادیر ویژه قسمت های حقیقی غیر مثبت دارند

– مقادیر ویژه موهومی ساده اند

- **قضیه** سیستم LTI *پایدار مجانبی* است اگر و فقط اگر *پایدار مجانبی فراگیر* باشد.

- **قضیه** سیستم LTI *پایدار مجانبی* است اگر و فقط اگر کلیه مقادیر ویژه آن قسمت های حقیقی اکیدا منفی داشته باشند.

- **قضیه** سیستم LTI *پایدار ورودی-خروجی BIBO* است اگر و فقط اگر کلیه قطب های تابع تبدیل قسمت های حقیقی اکیدا منفی داشته باشند.

مثال ۵-۲- سیستم داده شده با معادلات زیر را درنظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & -۳ \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=[۱ \quad ۱]\mathbf{x}(t)$$

تابع تبدیل آن عبارت است از

$$g(s)=\frac{۱}{s+۳}$$

بنابراین، پاسخ حالت-صفر سیستم پایدار BIBO است. لیکن، پاسخ حالت صفر پایدار **مجانبی** نیست، زیرا سیستم یک مقدار ویژه مثبت دارد.

- **قضیه** اگر سیستم LTI کنترل پذیر و رویت پذیر باشد انگاه عبارات زیر معادل اند:
  - سیستم *کاملا پایدار* است.
  - پاسخ حالت صفر سیستم *پایدار BIBO* است.
  - کلیه قطب های تابع تبدیل قسمت های حقیقی منفی دارند.
  - کلیه مقادیر ویژه ماتریس حالت قسمت های حقیقی منفی دارند.

❖ روش اول لیاپانوف

✓ بررسی پایداری سیستم های غیرخطی در نقاط کار پس از خطی سازی

- **قضیه** سیستم

$$\dot{x}(t) = f[x(t), 0] \quad \text{and} \quad x_e$$

$$\Rightarrow \dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t)$$

Where,

$$A = \text{Jacobian of } A \text{ at } x_e$$

پایداری مجانبی ماتریس حالت پایداری مجانبی سیستم غیرخطی در نقطه کار را میدهد.

❖ روش دوم لیاپانوف

- ✓ کلی ترین روش تحلیل *پایداری* سیستم های دینامیکی با دیدگاه داخلی از سیستم
- ✓ *نظریه لیاپانوف* پر کاربردترین روش در تحلیل و طراحی سیستم های دینامیکی
- ✓ تابع کاندید *لیاپانوف*
- ✓ وجود تابع *لیاپانوف؟*
- ✓ یکتایی تابع *لیاپانوف؟*

❖ مقدمات ریاضی

- صورت های درجه دوم:

$$V(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i x_j$$

$$x=(x_1,\cdots,x_n) \qquad a_{ij}\in R$$

$$\rightarrow \quad V(x)=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

$$=x^T A x=\langle x, Ax\rangle$$

ماتریس متقارن

- **تعریف** تابع اسکالر معین مثبت $V(x)$ در محدوده S .
- **تعریف** تابع اسکالر نیمه معین مثبت $V(x)$ در محدوده S .
- **تعریف** تابع اسکالر معین منفی $V(x)$ در محدوده S.
- **تعریف** تابع اسکالر نیمه معین منفی $V(x)$ در محدوده S .
- **تعریف** تابع اسکالر نامعین $V(x)$ در محدوده S .

دو روش تعیین علامت تابع:

1) علامت مقادیر ویژه ماتریس A

2) علامت کهادهای اصلی مقدم

مثال ۵-۴–کهادهای اصلی ماتریس زیر

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

عبارتند از:

$$a_{11},\ a_{22},\ a_{33},\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ |A|$$

به عبارت دیگر، کهادهایی که عناصر قطری آنها عناصر قطری ماتریس باشند، کهادهای اصلی هستند. همچنین، کهادهای اصلی مقدم ماتریس A عبارتند از:

$$a_{11},\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ |A|$$

یعنی کهادهائی که با حذف آخرین k ستون و k ردیف برای $k=۲,۱,۰$ بدست می‌آیند.

مثال ۵-۵- در اینجا قطعیت علامت دو صورت درجه دوّم زیر را بررسی می‌کنیم

$$V(\mathbf{x}) = 10\,x_1^2 + 4\,x_2^2 + x_3^2 + 2\,x_1x_2 - 2\,x_2x_3 - 4\,x_1x_3$$

و

$$V(\mathbf{x}) = -x_1^2 - 3\,x_2^2 - 11\,x_3^2 + 2\,x_1x_2 - 4\,x_2x_3 - 2\,x_1x_3$$

نخست برای اولین تابع درجه دوّم داریم

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = [x_1 \;\; x_2 \;\; x_3] \begin{bmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

کهادهای اصلی مقدم ماتریس A عبارتنداز

$$10 > 0, \quad \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

از آنجائی که کهادهای اصلی مقدم متوالی A مثبت هستند، V(x) معین مثبت است. حال برای دوّمین تابع درجه دوم V(x) داریم

$$V(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T A\mathbf{x}=[x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

کهادهای اصلی مقدم ماتریس A در این صورت عبارتند از

$$-1<0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}>0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -11 \end{vmatrix}<0$$

و لذا V(x) معین منفی است. همچنین، می‌توان قطعیت علامت A- را نیز بررسی کرد:

$$1>0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}>0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 11 \end{vmatrix}>0$$

و لذا V(x) معین منفی است.

روش دوم لیاپانوف

- یک اصل از نظریه کلاسیک مکانیک: *سیستم های نوسانی* بدون ورودی خارجی در صورتی پایدار هستند که *مجموع انرژی آنها* به طور پیوسته *کاهشی* باشد.

- *نظریه لیاپانوف* براساس *تابع انرژی*

- *تابع انرژی تعمیم یافته* یا *تابع لیاپانوف*

- تابع کاندید *لیاپانوف*

- ویژگی های تابع کاندید *لیاپانوف*

$$x = (x_1, \cdots, x_n)$$

$$V(x)$$

$$\frac{dV(x)}{dt}$$

- **قضیه**

سیستم در نزدیکی نقطه تعادل در مبدا پایدار مجانبی است اگر تابع اسکالری وجود داشته باشد که:

$$V(x) > 0 \quad \text{for} \quad x \neq 0$$

$$V(0) = 0$$

$$\frac{dV(x)}{dt} < 0 \quad \text{for} \quad x \neq 0$$

مثال ۵-۶- سیستم غیر خطی زیر با نقطه تعادل (۰,۰) را در نظر بگیرید

$$\dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2^2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 x_2 - x_2^3$$

تابع معین مثبت زیر را به عنوان تابع لیاپانوف کاندید، انتخاب می‌کنیم

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2$$

مشتق زمانی آن عبارتست از

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) = x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2$$

با جایگزینی از معادلات سیستم در $\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x})$، بدست می‌آوریم

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) = x_1(-x_1 - 2x_2^2) + 2x_2(x_1 x_2 - x_2^3)$$

$$= -x_1^2 - 2x_2^4$$

تابع $\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x})$ منفی معین است و لذا نقطه تعادل آن از قضیه ۵-۷ پایدار مجانبی است.

✓ اگر مشتق تابع لیاپانوف منفی نیمه معین باشد؟

- آیا مسیرهای سیستم مشتق تابع لیاپانوف را صفر می کنند؟

شرط اصلاح شده پایداری مجانبی:

$$\dot{V}(x) \le 0, \qquad \dot{V}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} \ne \mathrm{f}(x(t))$$

- **قضیه**

سیستم در نزدیکی نقطه تعادل در مبدا پایدار مجانبی فراگیر است اگر تنها یک نقطه تعادل داشته باشد و تابع اسکالری وجود داشته باشد که:

$\boxed{\text{تابع در تمام فضای حالت پیوسته و مشتقات جزیی آن پیوسته باشند}}$

$$V(x) > 0 \quad \text{for} \quad x \neq 0$$

$$V(0) = 0$$

$$V(x) \to \infty \quad \text{for} \quad \|x\| \to \infty$$

$$\dot{V}(x) \le 0, \qquad \dot{V}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} \neq \mathrm{f}(x(t))$$

مثال ۵-۷- سیستم غیر خطی زیر را با نقطه تعادل $(0,0)$ در نظر بگیرید

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 - 2x_1^3$$

با انتخاب تابع مثبت معین زیر

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(x_1^4 + 2x_1^2 + x_2^2)$$

داریم

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 2x_1^3\dot{x}_1 + 2x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2$$

$$= 2x_1^3(x_2) + 2x_1(x_2) + x_2(-2x_1 - 3x_2 - 2x_1^3)$$

$$= -3x_2^2$$

لذا $\dot{V}(\mathbf{x})$ نیمه معین منفی است. توجه کنید که به ازاء $x_2 = 0$ و $x_1 \neq 0$ $\dot{V}(\mathbf{x})$ صفر خواهد شد. لیکن پاسخ $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ مسیری از سیستم نیست. زیرا معادله دوم $-2x_1 - 2x_1^3 = 0$ تنها در صورتی برقرار است که x_1 صفر باشد.

مثال ۵-۹- سیستم غیر خطی داده شده با معادلات زیر و نقطه تعادل (۰,۰) را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1=-x_1+x_2+x_1(x_1^2+x_2^2)$$

$$\dot{x}_2=-x_1-x_2+x_2(x_1^2+x_2^2)$$

از تابع لیاپانوف کاندید زیر برای بررسی پایداری استفاده می‌کنیم

$$V(\mathbf{x})=x_1^2+x_2^2$$

مشتق تابع کاندید عبارتست از

$$\dot{V}(\mathbf{x})=2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2$$

$$=2x_1(-x_1+x_2+x_1(x_1^2+x_2^2))+2x_2(-x_1-x_2+x_2(x_1^2+x_2^2))$$

$$=-2x_1^2-2x_2^2+2(x_1^2+x_2^2)^2$$

برای اینکه داشته باشیم $\dot{V}(\mathbf{x})<0$،

$$2(x_1^2+x_2^2)^2<2(x_1^2+x_2^2)$$

لیکن برای $x_1^2+x_2^2\neq 0$ داریم

$$x_1^2+x_2^2<1$$

بنابراین، محدوده‌ای که در آن $\dot{V}(\mathbf{x})$ معین منفی است داخل دایره واحد می‌باشد.

• **قضیه** (ناپایداری سیستم)

سیستم در نزدیکی نقطه تعادل در مبدا *ناپایدار* است اگر تابع اسکالری وجود داشته باشد که:

$$V(x) \geq 0, \quad V(0) = 0,$$

$V(x)$ Continuous in S with continuous partial derivatives

$$\dot{V}(x) > 0, \qquad \dot{V}(0) = 0$$

مثال ۵-۱۱- سیستم غیر خطی زیر را با نقطه تعادل (۰,۰) در نظر بگیرید

$$\dot{x}_1 = 2x_2 + x_1(x_1^2 + 2x_2^2)$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

اگر معادلات خطی سازی شده سیستم را حول نقطه تعادل (۰,۰) بدست آوریم، داریم

$$\dot{x}_1 = 2x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1$$

و لذا مقادیر ویژه سیستم خطی شده $\pm 2j$ هستند. از این نتیجه نمی‌توان استنباط درستی در رابطه با پایداری سیستم غیرخطی داشت. اکنون، از تابع زیر به عنوان تابع لیاپانوف سیستم استفاده می‌کنیم

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

مشتق تابع لیاپانوف می‌دهد

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) &= x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 \\ &= x_1\,[2x_2 + x_1(x_1^2 + 2x_2^2)] + x_2\,[-2x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2)] \\ &= x_1^2(x_1^2 + 2x_2^2) + x_2^2(x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}$$

که تابعی مثبت است. لذا، از قضیه ۵-۱۰ داریم که نقطه تعادل (۰,۰) ناپایدار است.

❖ تحلیل پایداری لیاپانوف سیستم های خطی تغییرناپذیر با زمان

سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان:

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

- ✓ شرایط لازم و کافی پایداری سیستم های خطی تغییرناپذیر با زمان بر اساس مقادیر ویژه و معادله مشخصه

- ✓ روش جبری لیاپانوف برای بررسی پایداری سیستم های خطی تغییرناپذیر با زمان