۲- نمایش سیستم‌های خطی

توصیف مدل دینامیکی

- سیستم های کنترل
  - سیستم های کنترل مبتنی بر مدل
  - سیستم های کنترل مبتنی مبتنی بر داده های ورودی-خروجی
- مدل سیستم
  - مدل ریاضی
  - مدل مستخرج از اطلاعات ورودی-خروجی
    - » مدل مستخرج از شناسایی کلاسیک
    - » مدل مستخرج از روشهای هوشمند
- مدل ریاضی
  - تابع تبدیل
  - مدل فضای حالت

نمایش فضای حالت

- نمایش فضای حالت سیستم غیر خطی متغیر با زمان:

$$\begin{cases} \dot{x} = f\left(x(t), u(t), t\right) \\ y = g\left(x(t), u(t), t\right) \end{cases}$$

- نمایش فضای حالت سیستم غیر خطی:

$$\begin{cases} \dot{x} = f\left(x(t), u(t)\right) \\ y = g\left(x(t), u(t)\right) \end{cases}$$

- نمایش فضای حالت سیستم غیر خطی نسبت به ورودی خطی (**Affine**):

$$\begin{cases} \dot{x} = f\left(x(t)\right) + g\left(x(t)\right)u(t) \\ y = h\left(x(t)\right) \end{cases}$$

نمایش فضای حالت

- نمایش فضای حالت سیستم خطی متغیر با زمان (LTV):

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}$$

- نمایش فضای حالت سیستم خطی نامتغیر با زمان (LTI):

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \\ y = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

خطی سازی سیستم های غیرخطی

- لزوم خطی سازی:

  - سیستم های واقعی غیرخطی هستند.
  - خطی سازی حول نقطه کار (یا نقطه تعادل) می تواند تقریب مناسبی از رفتار سیستم غیرخطی را حول این نقطه ارائه نماید.
  - سیستم های کنترل خطی امکان کنترل سیستم های غیرخطی حول نقطه کار (یا نقطه تعادل) را دارا هستند.
  - سیستم های کنترل خطی دارای مقاومت بیشتری در مقابل نامعینی ها هستند و ایجاد امکان استفاده از این کنترل کننده ها با خطی سازی فراهم می گردد.

خطی سازی سیستم های غیرخطی

- نقطه تعادل:

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t), u = 0\right) = 0 \;\Rightarrow\; x_{eq.p.} = x(t)$$

- نقطه کار:
  - نقطه کار ناشی از حضور یک ورودی:

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t), u(t) = \hat{u}\right) = 0 \;\Rightarrow\; x_{op.p.} = x(t)$$

  - نقطه کار معرفی شده توسط طراح:

$$x_{op.p.} = x_0$$

خطی سازی سیستم های غیرخطی

خطی سازی با استفاده از بسط سری تیلور تابع تحلیلی:

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}\bigg|_{x_0} \left(x - x_0\right)^n$$

$$\longrightarrow f\left(\mathbf{x}(t)\right) = f(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\bigg|_{x_0} \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\right) + H.O.T.$$

$$[J_x]_{ij} = \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{x_j}$$

خطی سازی سیستم های غیرخطی

$$x(t) = x_0 + \Delta x \qquad u(t) = u_0 + \Delta u$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_0(t) + \Delta\dot{x}(t) = f\left(x_0(t), u_0(t), t\right) + J_x\left[x_0(t), u_0(t), t\right]\Delta x(t)$$
$$+ J_u\left[x_0(t), u_0(t), t\right]\Delta u(t)$$

$$\Delta\dot{x}(t) = J_x\left[x_0(t), u_0(t), t\right]\Delta x(t) + J_u\left[x_0(t), u_0(t), t\right]\Delta u(t)$$

$$\boxed{\Delta\dot{x}(t) = A(t)\Delta x(t) + B(t)\Delta u(t)}$$

خطی سازی سیستم های غیرخطی

بطور مشابه برای معادله خروجی:

$$\Delta y(t) = g_x\left[x_0(t), u_0(t), t\right]\Delta x(t) + g_u\left[x_0(t), u_0(t), t\right]\Delta u(t)$$

$$\boxed{\Delta y(t) = C(t)\Delta x(t) + D(t)\Delta u(t)}$$

و برای یک سیستم نامتغیر با زمان:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

خطی سازی سیستم های غیرخطی

مثال:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1^2(t) - \sin(3x_2(t)) + u_1^3(t) - u_2(t) & = f_1(\mathbf{x},\mathbf{u}) \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t) + x_1(t)e^{-x_2(t)} - u_1(t) & = f_2(\mathbf{x},\mathbf{u}) \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Assumtion: } \begin{cases} x_{op.p.} = 0 \\ \hat{u} = 0 \end{cases}}$$

$$J_x[\cdot] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad J_x[.] = \begin{bmatrix} 2x_1 & -3\cos(3x_2) \\ e^{-x_2} & 1 - x_1 e^{-x_2} \end{bmatrix}$$

$$J_u[\cdot] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{bmatrix} \qquad J_u[.] = \begin{bmatrix} 3u_1^2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \dot{\mathbf{X}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X}(t) + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

انتخاب متغیرهای حالت

متغیر های حالت منحصر به فرد نیست.

سه نمایش متداول برای بیان متغیرهای حالت (متغیرهای فیزیکی، فاز و کانونیکال)

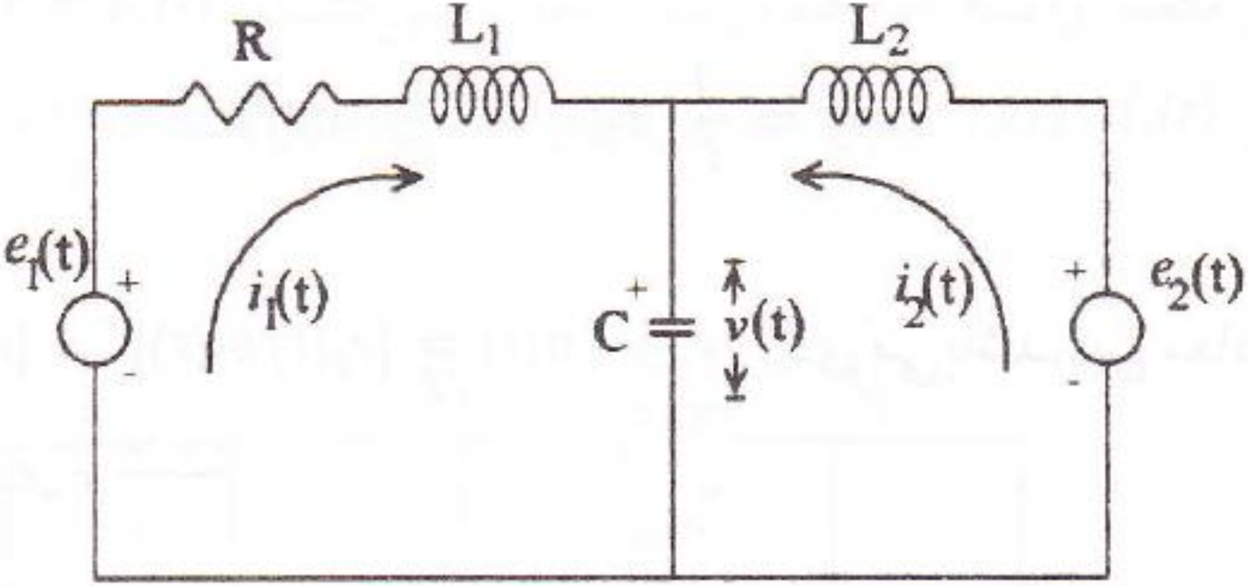
تعداد متغیر حالت برابر تعداد عناصر ناوابسته ذخیره کننده انرژی در سیستم است.

بهتر است خروجی انتگرال گیر به عنوان متغیر حالت انتخاب شود.

جدول ۲-۱ عناصر نگهدارنده-انرژی

عنصر	انرژی	متغیر فیزیکی
خازن C	$Cv^2/2$	ولتاژ v
سلف L	$Li^2/2$	جریان i
جرم M	$Mv^2/2$	سرعت انتقالی[۱] v
ممان اینرسی[۲] J	$J\omega^2/2$	سرعت چرخش[۳] ω
فنر K	$Kx^2/2$	جابجائی[۴] x
تراکم پذیری مایع[۵] $\frac{V}{K_B}$	$\frac{VP_L^2}{2K_B}$	فشار P_L
خازن حرارتی[۶] C	$\frac{C\theta^2}{2}$	حرارت θ

مثال ۲-۴



$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

$$e_1(t) = \mathrm{R}i_1(t) + \mathrm{L}_1 \frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} + v(t)$$

$$e_2(t) = \mathrm{L}_2 \frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} + v(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\mathrm{C}}\left(i_1(t) + i_2(t)\right)$$

با بازنویسی معادلات برحسب متغیرهای بدست می‌آوریم

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{R}{L_1} x_1(t) - \frac{1}{L_1} x_3(t) + \frac{1}{L_1} u_1(t)$$

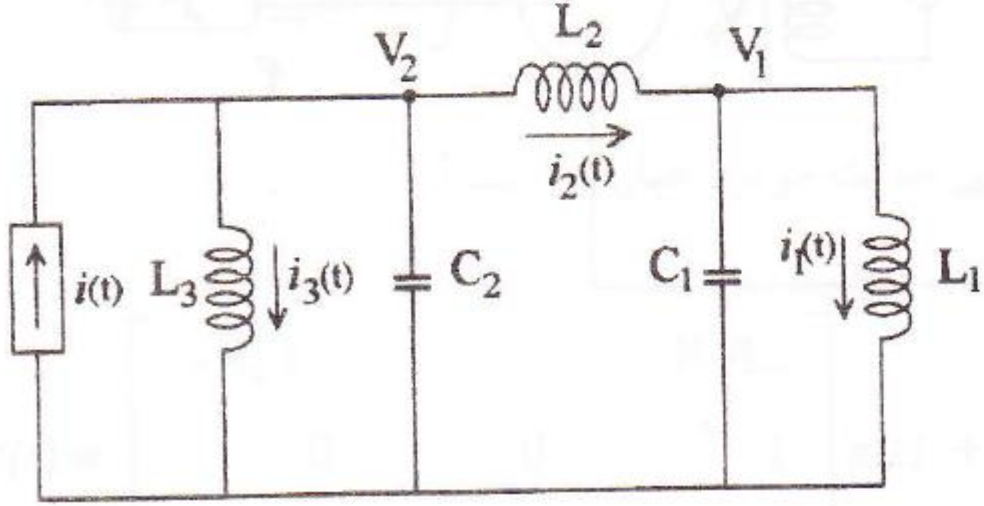
$$\dot{x}_2(t) = -\frac{1}{L_2} x_3(t) + \frac{1}{L_2} u_2(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = \frac{1}{C} x_1(t) + \frac{1}{C} x_2(t)$$

که در آن $\mathbf{u}(t) = [e_1(t)\, e_2(t)]^T = [u_1(t)\, u_2(t)]^T$ بردار ورودی می‌باشد

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -R/L_1 & 0 & -1/L_1 \\ 0 & 0 & -1/L_2 \\ 1/C & 1/C & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1/L_1 & 0 \\ 0 & 1/L_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

مثال ۲-۵



این مدار ۵ عنصر ذخیره کننده انرژی دارد.

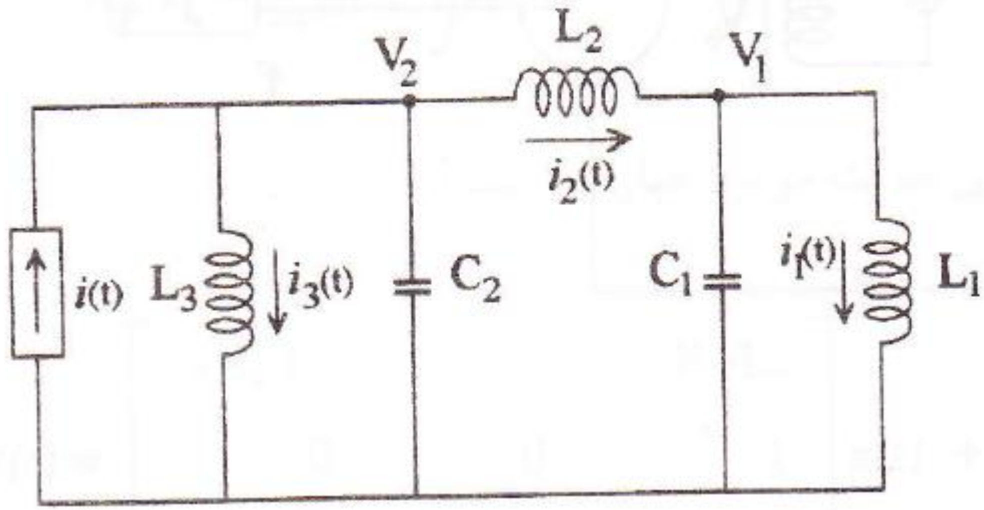
$$v_1(t) = L_1 \frac{d}{dt} i_1(t)$$

$$v_2(t) = L_2 \frac{d}{dt} i_2(t) + v_1(t)$$

$$v_2(t) = L_3 \frac{d}{dt} i_3(t)$$

$$i_2(t) = C_1 \frac{d}{dt} v_1(t) + i_1(t)$$

$$i(t) = i_3(t) + C_2 \frac{d}{dt} v_2(t) + i_2(t)$$



با نوشتن معادله حلقه در برگیرنده L_1 ، L_2 و L_3 و انتگرال‌گیری از آن داریم

$$L_3\, i_3(t) = L_2\, i_2(t) + L_1 i_1(i) + k$$

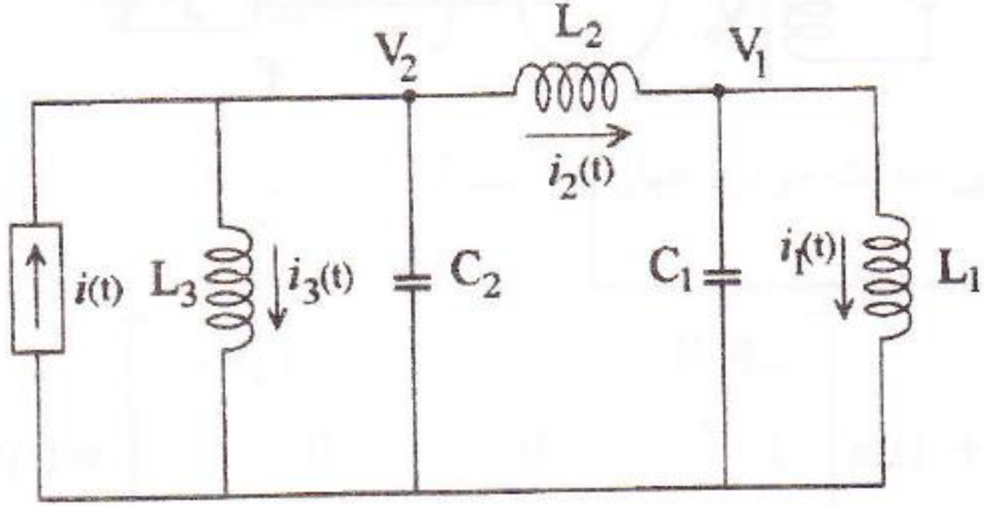
با توجه به وابستگی جریان سلفها پس ۴ متغیر حالت ناوابسته داریم.

$$x_1(t) = v_1(t)$$

$$x_2(t) = v_2(t)$$

$$x_3(t) = i_1(t)$$

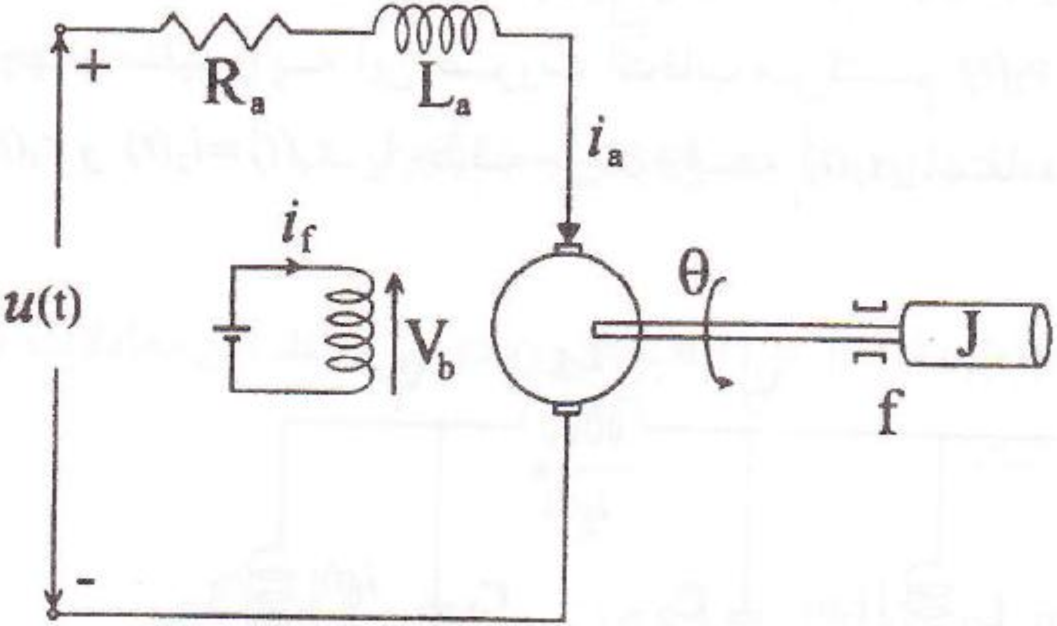
$$x_4(t) = i_2(t)$$



$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dfrac{1}{C_1} & \dfrac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & -\dfrac{L_1}{L_3C_2} & -\dfrac{L_2+L_3}{L_3C_2} \\ \dfrac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{L_2} & \dfrac{1}{L_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{C_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\,\mathbf{x}(t)$$

مثال ۲-۶



موتور dc کنترل آرمیجر

$$T_m = K_m\, i_a$$

$$K_m\, i_a = J\,\frac{d^2\theta}{dt^2} + f\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$u(t) = R_a\, i_a + L_a\,\frac{di_a}{dt} + v_b(t)$$

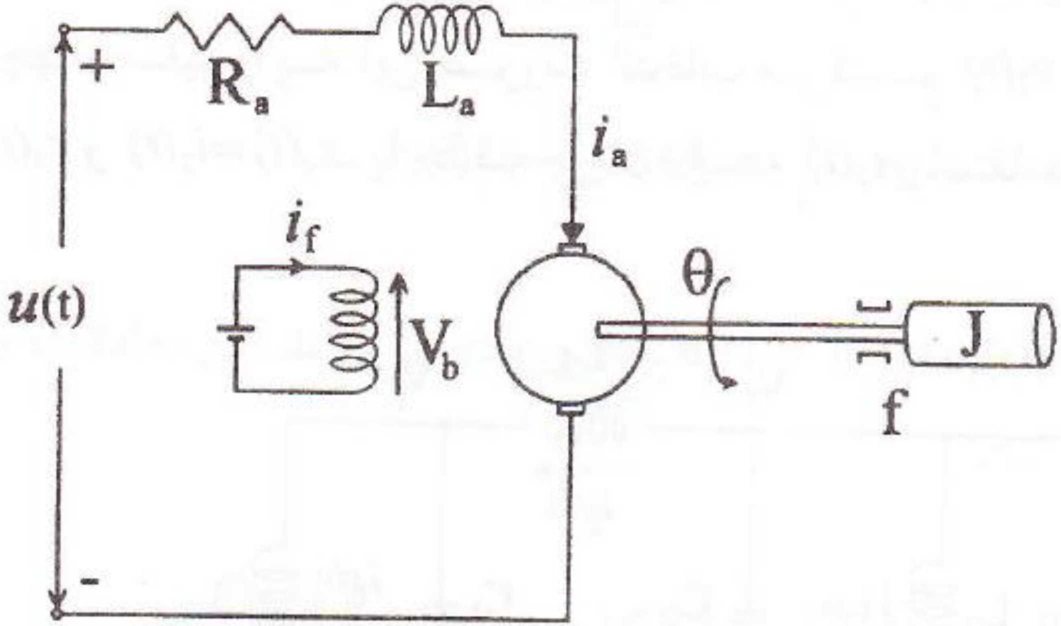
$$v_b(t) = K_b\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$x_1 = i_a \qquad x_2 = \theta \qquad x_3 = \dot{\theta}$$

$$u = R_a\, x_1 + L_a\, \dot{x}_1 + K_b\, x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$K_m\, x_1 = J\, \dot{x}_3 + f\, x_3$$



موتور dc کنترل آرمیجر

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -R_a/L_a & 0 & -K_b/L_a \\ 0 & 0 & 1 \\ k_m/J & 0 & -f/J \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1/L_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\theta(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

مدل سازی سیستم ها

مدل سازی سیستم های مکانیکی:

- مدل سازی بر اساس قوانین نیوتن
- مدل سازی بر اساس قوانین اولر-لاگرانژ

روش اولر-لاگرانژ:

۱- انتخاب متغیرهای مستقل $q_i = \begin{pmatrix} x_i \\ \theta_i \end{pmatrix}$

۲- محاسبه مجموعه انرژی های چنبشی (T) و پتانسیل (P) و تعریف لاگرانژین (L=T-V).

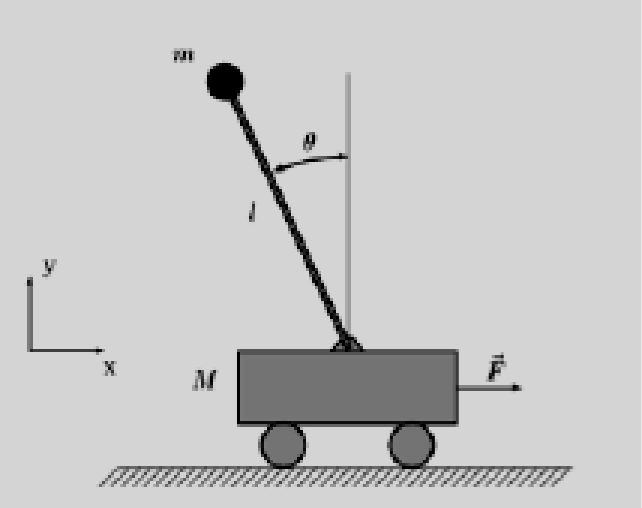
۳- مشخص نمودن نیروهای خارجی. $Q_i = \begin{pmatrix} F_i \\ \tau_i \end{pmatrix}$

۴- $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

مدل سازی سیستم ها

مثال:

$$q = \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix}$$



$$T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$\begin{cases} \bar{x} = x + l\sin(\theta) \\ \bar{y} = l\cos(\theta) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{\bar{x}} = \dot{x} + l\dot{\theta}\cos(\theta) \\ \dot{\bar{y}} = -l\dot{\theta}\sin(\theta) \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad v^2 = \dot{\bar{x}}^2 + \dot{\bar{y}}^2 = l^2\dot{\theta}^2 + \dot{x}^2 + 2l\dot{\theta}\dot{x}\cos(\theta)$$

$$\Longrightarrow \quad T = \frac{1}{2} m \left\{ l^2\dot{\theta}^2 + \dot{x}^2 + 2l\dot{\theta}\dot{x}\cos(\theta) \right\} + \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$

$$P = mgl\cos(\theta)$$

مدل سازی سیستم ها

$$L = T - P = \frac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + ml\dot{\theta}\dot{x}\cos(\theta) + \frac{1}{2} M\dot{x}^2 - mgl\cos(\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = F \quad \longrightarrow \quad \boxed{(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2\sin(\theta) = F}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos(\theta) + mgl\sin(\theta) = 0}$$

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \\ x_3 = \theta \\ x_4 = \dot{\theta} \end{cases} \longrightarrow \quad \dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X}, u)$$

حل معادلات حالت و محاسبه پاسخ زمانی حالت ها

حل در حوزه زمان:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \longrightarrow \dot{x}(t) - Ax(t) = Bu(t) \longrightarrow e^{-At}\dot{x}(t) - e^{-At}Ax(t) = e^{-At}Bu(t)$$

$$\longrightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-At}x(t)\right) = e^{-At}Bu(t) \longrightarrow e^{-At}x(t) = e^{-At_0}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}\left\{x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t_0-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right\}$$

مثال ۲-۸

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

که در آن $u(t)$ یک ورودی پله واحد است. بردار حالت اولیه سیستم عبارت است از $\mathbf{x}(0)=[1 \quad 1]^T$. پاسخ سیستم را پیدا کنید.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}\cdots$$

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}=\mathbf{I}+\mathbf{A}t+\frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2+\frac{1}{3!}\mathbf{A}^3t^3+\cdots$$

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix}1+t+\frac{1}{2}t^2+\cdots & 0\\ t+t^2+\cdots & 1+t+\frac{1}{2}t^2-\cdots\end{bmatrix}$$

$$e^{-At}\,\mathbf{Bu}(t) = \begin{bmatrix} 1 - t + \frac{1}{2}t^2 - \cdots \\ \\ 1 - 2t + \frac{3}{2}t^2 - \cdots \end{bmatrix}$$

$$\int_0^t e^{-A\tau}\,\mathbf{Bu}(\tau)\;d\tau = \begin{bmatrix} t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 - \cdots \\ \\ t - t^2 + \frac{1}{2}t^3 - \cdots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\left[\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{-A\tau}\,\mathbf{Bu}(\tau)\;d\tau\right]$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\begin{bmatrix} 1 + t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 - \cdots \\ \\ 1 + t - t^2 + \frac{1}{2}t^3 - \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2t + t^2 + \cdots \\ \\ 1 + 3t + \frac{5}{2}t^2 + \cdots \end{bmatrix}$$

حل معادلات حالت و محاسبه پاسخ زمانی حالت ها

حل در حوزه فرکانس:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad L\left[\dot{x}(t) - Ax(t) = Bu(t)\right]$$

$$\rightarrow \quad sX(s) - x(0) = AX(s) + Bu(s)$$

$$\rightarrow \quad X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}Bu(s)$$

$$\rightarrow \quad x(t) = L^{-1}\left[(sI - A)^{-1}x(0)\right] + L^{-1}\left[(sI - A)^{-1}Bu(s)\right]$$

ماتریس انتقال حالت:

$$\boxed{e^{At} = L^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]}$$

حل معادلات حالت و محاسبه پاسخ زمانی حالت ها

مثال:

$$\begin{cases} A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \\ x(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases} \rightarrow \quad x(t)=?$$

$$\rightarrow \quad sI-A=\begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s+4 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \ (sI-A)^{-1}=\frac{1}{(s+1)(s+3)}\begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix}$$

$$e^{At}=L^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]=L^{-1}\begin{bmatrix} \frac{1.5}{s+1}-\frac{0.5}{s+3} & \frac{0.5}{s+1}-\frac{0.5}{s+3} \\ \frac{-1.5}{s+1}+\frac{1.5}{s+3} & \frac{-0.5}{s+1}+\frac{1.5}{s+3} \end{bmatrix}$$

حل معادلات حالت و محاسبه پاسخ زمانی حالت ها

$$e^{At}=L^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{1.5}{s+1}-\dfrac{0.5}{s+3} & \dfrac{0.5}{s+1}-\dfrac{0.5}{s+3}\\ \dfrac{-1.5}{s+1}+\dfrac{1.5}{s+3} & \dfrac{-0.5}{s+1}+\dfrac{1.5}{s+3}\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix}1.5e^{-t}-0.5e^{-3t} & 0.5e^{-t}-0.5e^{-3t}\\ -1.5e^{-t}+1.5e^{-3t} & -0.5e^{-t}+1.5e^{-3t}\end{bmatrix}$$

$$x(t)=e^{At}x(0)=\begin{bmatrix}1.5e^{-t}-0.5e^{-3t}\\ -1.5e^{-t}+1.5e^{-3t}\end{bmatrix}$$

$$y(t)=Cx(t)=e^{-3t}$$

ارتباط تابع تبدیل و مدل فضای حالت

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad L\left[\dot{x}(t) - Ax(t) = Bu(t)\right] \quad \rightarrow \quad sX(s) - x(0) = AX(s) + Bu(s)$$

$$\xrightarrow{x(0)=0} \quad X(s) = (sI - A)^{-1} Bu(s)$$

$$\rightarrow \quad Y(s) = CX(s) + Du(s) = \underbrace{\left[C(sI - A)^{-1} B + D\right]}_{G(s)} u(s)$$

$$\boxed{G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D} \quad \rightarrow \quad \boxed{G(s) = C \frac{adj(sI - A)}{\det(sI - A)} B + D}$$

ماتریس انتقال حالت

ماتریس مربعی با ابعاد A :

$$\Phi(t) = e^{At} = \exp[At]$$

این ماتریس در واقع بیان‌کننده پاسخ طبیعی یا بدون ورودی سیستم می‌باشد

ویژگیهای ماتریس انتقال حالت :

۱-برای هر $t_\circ$, t_1 , t_2 $\quad \Phi(t_2 - t_1)\,\Phi(t_1 - t_\circ) = \Phi(t_2 - t_\circ)$

۲- q= عدد صحیح مثبت $\quad \Phi(t)\,\Phi(t)\,\cdots\,\Phi(t) = \Phi^q(t) = \Phi(qt)$

۳- $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$

۴- ماتریس واحد I $\quad \Phi(0) = \mathrm{I}$

۵- $\Phi(t)$ برای کلیه مقادیر محدود t ناویژه[1] است.

محاسبه ماتریس انتقال حالت

۱- روش سری‌ها

۲- روش کیلی-هامیلتون

۳- روش سیلوستر

۴- روش تبدیل لاپلاس

۵- روش قطری‌سازی

روش سری‌ها

$$\Phi(t)=e^{At}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!}$$

مثال

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 4\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-t & 0 & 0\\ 0 & -4t & 4t\\ 0 & -t & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}t^2/2 & 0 & 0\\ 0 & 6t^2 & -8t^2\\ 0 & 2t^2 & -2t^2\end{bmatrix}+\cdots$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix}1-t+t^2/2+\cdots & 0 & 0\\ 0 & 1-4t+6t^2+\cdots & 4t-8t^2+\cdots\\ 0 & -t+2t^2+\cdots & 1-2t^2+\cdots\end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1-t+t^2/2+\cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-4t+6t^2+\cdots & 4t-8t^2+\cdots \\ 0 & -t+2t^2+\cdots & 1-2t^2+\cdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-t+t^2/2+\cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-2t+4t^2/2-2t(1-2t)+\cdots & 4t(1-2t+4t^2/2+\cdots) \\ 0 & -t(1-2t+4t^2/2+\cdots) & 1-2t+4t^2/2+2t(1-2t)+\cdots \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & (1-2t)\,e^{-2t} & 4t\,e^{-2t} \\ 0 & -t\,e^{-2t} & (1+2t)\,e^{-2t} \end{bmatrix}$$

روش کیلی-هامیلتون

$$Q(\lambda) \equiv |\lambda I - A|$$

$$= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

یک چندجمله‌ای عمومی را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$N(\lambda) = \lambda^m + c_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$$

با تقسیم چند جمله‌ای $N(\lambda)$ برمعادله مشخصه $Q(\lambda)$ داریم

$$\frac{N(\lambda)}{Q(\lambda)} = F(\lambda) + \frac{R(\lambda)}{Q(\lambda)}$$

لذا داریم:

$$N(\lambda) = F(\lambda)\,Q(\lambda) + R(\lambda)$$

برای $\lambda = \lambda_i$ که در آن λ_i مقدار مشخصه ماتریس $\mathbf{A}$ باشد داریم $Q(\lambda_i)=0$ و بنابراین

$$N(\lambda_i) = R(\lambda_i)$$

$$N(\lambda) = \lambda^m + c_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + c_1\lambda + c_\circ$$

در نتیجه :

$$N(A) = A^m + c_{m-1}A^{m-1} + \cdots + c_1 A + c_\circ I$$

و با استفاده از قضیه کیلی همیلتون :

$$Q(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_\circ I = 0$$

لذا :

$$N(A) = F(A)Q(A) + R(A) = R(A)$$

$$N(\lambda) = e^{\lambda t}$$

برای هر مقدار ویژه داریم

$$e^{\lambda_i t} = R(\lambda_i) = \alpha_\circ(t) + \alpha_1(t)\lambda_i + \cdots + \alpha_k(t)\lambda_i^k + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_i^{n-1}$$

با داخل کردن n ریشه‌های متمایز در معادله (۲-۴-۱۰) n معادله خواهیم داشت که با حل آنها می‌توان ضرایب $\alpha_k(t)$ را بدست آورد. این ضرایب را می‌توان در معادله ماتریسی متناظر وارد نمود، لذا

$$e^{At} = N(A) = R(A) = \alpha_\circ(t)\, I + \alpha_1(t)\, A + \cdots + \alpha_k(t)\, A^k + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\, A^{n-1}$$

مثال $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$

$$Q(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -6 \\ 1 & \lambda+5 \end{vmatrix}$$

$$=\lambda + 5\lambda + 6=0$$

ریشه‌های این معادله عبارتند از $\lambda_1=-2$ و $\lambda_2=-3$.

ماتریس A از مرتبه ۲ است پس معادله باقیمانده را از مرتبه ۲ میگیریم:

$$N(\lambda_i) = R(\lambda_i) = \alpha_{\circ} + \alpha_1 \lambda_1$$

$$e^{-2t} = \alpha_{\circ} - 2\alpha_1 \qquad \alpha_{\circ} = 3e^{-2t} - 2e^{-3t}$$

$$e^{-3t} = \alpha_{\circ} - 3\alpha_1 \qquad \alpha_1 = e^{-2t} - e^{-3t}$$

$$\Phi(t) = \exp[At] = \alpha_{\circ} I + \alpha_1 A = \begin{bmatrix} \alpha_{\circ} & 0 \\ 0 & \alpha_{\circ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 6\alpha_1 \\ -\alpha_1 & -5\alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & 6e^{-2t}-6e^{-3t} \\ -e^{-2t} + e^{-3t} & 3e^{-3t} -2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

روش سیلوستر

(فقط برای حالتی که مقادیر ویژه غیر تکراری نداریم.)

$$e^{At} = \mathbf{N(A)} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{N}(\lambda_i)\, \mathbf{Z}_i(\lambda)$$

که در آن

$$\mathbf{Z}_i(\lambda) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (\mathbf{A} - \lambda_j\, \mathbf{I})}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)}$$

برای مثال قبل:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\begin{bmatrix} 0+3 & 6 \\ -1 & -5+3 \end{bmatrix}}{-2-(-3)} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\begin{bmatrix} 0+2 & 6 \\ -1 & -5+2 \end{bmatrix}}{-3-(-2)} = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = \exp[\mathbf{A}t] = e^{\lambda_1 t}\,\mathbf{Z}_1 + e^{\lambda_2 t}\,\mathbf{Z}_2 = \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & 6e^{-2t} - 6e^{-3t} \\ -e^{-2t} + e^{-3t} & -2e^{-2t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix}$$

روش تبدیل لاپلاس

$$\Phi(s) = (s\,\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \qquad \Phi(t,0) = L^{-1}\,(s\,\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(s) = (s\,\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s(s+4)+3} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1.5e^{-t} - 0.5e^{-3t} & 0.5e^{-t} - 0.5e^{-3t} \\ -1.5e^{-t} + 1.5e^{-3t} & 1.5e^{-3t} - 0.5e^{-t} \end{bmatrix}$$

روش قطری‌سازی

این روش را پس از بیان تبدیل‌های همانندی ارائه خواهیم داد.

تبدیلهای همانندی

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\,\mathbf{x}(t) + B\,\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = C\,\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{z}(t) = T\mathbf{x}(t) \longrightarrow \mathbf{x}(t) = T^{-1}\,\mathbf{z}(t)$$

$$T^{-1}\dot{\mathbf{z}}(t) = AT^{-1}\,\mathbf{z}(t) + B\,\mathbf{u}(t) \qquad \dot{\mathbf{z}}(t) = TAT^{-1}\,\mathbf{z}(t) + TB\,\mathbf{u}(t)$$

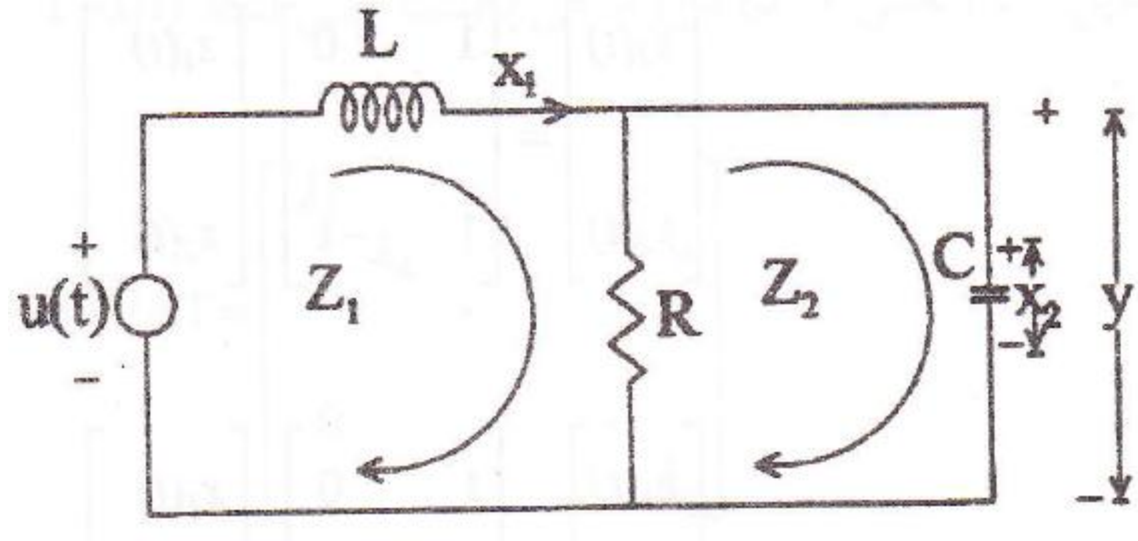
$$\mathbf{y}(t) = CT^{-1}\,\mathbf{z}(t) \qquad \mathbf{y}(t) = CT^{-1}\,\mathbf{z}(t)$$

معادله مشخصه سیستم تحت تبدیلهای همانندی تغییر نخواهد کرد

$$|\lambda I - TAT^{-1}| = 0 \Rightarrow |T(\lambda I - A)T^{-1}| = 0$$

$$\Rightarrow |T|\,|\lambda I - A|\,|T^{-1}| = 0 \Rightarrow |\lambda I - A| = 0$$

مثال



$L = 1H$, $R = 1\,\Omega$, $C = 1F$

اگر متغیرهای حالت را جریان سلف و ولتاژ خازن بگیریم معادلات حالت به شکل زیر میشود:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_1(t) \end{bmatrix}$$

و اگر بجای آنها جریان حلقه ها را به عنوان متغیر حالت بگیریم:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \quad -1] \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}$$

با توجه به این روابط تبدیل همانندی بین ایندو به شکل زیر است:

$$x_1(t) = z_1(t)$$

$$x_2(t) = (z_1(t) - z_2(t))$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}$$

یا

$$\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

قطری‌سازی معادلات حالت و خروجی

یکی از پر کاربرد ترین نمایشهای معادلات حالت نمایش قطری یا نرمال است.

در این نمایش ماتریس A توسط یک تبدیل همانندی به صورت قطری در می آید.

اگر تمامی مقادیر ویژه ماتریس A متمایز باشند می توان آنرا به ماتریس زیر تبدیل کرد:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

که در آن $\lambda_i (i=1,\cdots,n)$ مقادیر ویژه A هستند.

متغیرهای حالت سیستم قطری سازی شده را با $z_i(i=1,\cdots,n)$ نشان داده و بعضاً آنان را متغیرهای کانونیکال[1] می‌نامند. متغیرهای حالت سبستم قطری‌سازی شده با متغیرهای حالت اولیه توسط تبدیل T^{-1} (بخش ۲-۵) مربوط می باشند، یعنی آنکه $z(t) = T^{-1} x(t)$. داریم

$$\Lambda=T^{-1}AT=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & \cdot & \\ & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

دراین حالت ماتریس تبدیل T را ماتریس مُدال[2] می‌نامند. معادلات حالت و خروجی سیستم قطری‌سازی شده عبارتند از

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \Lambda\, \mathbf{z}(t) + \mathrm{B}_n\, \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathrm{C}_n\, \mathbf{z}(t)$$

که درآن $\mathrm{B}_n = T^{-1}\mathrm{B}$ و $\mathrm{C}_n = \mathrm{CT}$

۲-۶-۱ محاسبه ماتریس انتقال حالت

$\Lambda = T^{-1}AT$ یا $A = T\Lambda T^{-1}$

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots$$

$$e^{At} = I + T\Lambda T^{-1}t + (T\Lambda T^{-1})(T\Lambda T^{-1})\frac{t^2}{2!} + \cdots$$

$$= T\left(I + \Lambda t + \Lambda^2\frac{t^2}{2!} + \cdots\right)T^{-1}$$

$$= T\,e^{\Lambda t}\,T^{-1}$$

$$\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$$

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & \cdot & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

مثال ۲-۱۵ ماتریس حالت سیستمی عبارت است از

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس مدال

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = T\, e^{\Lambda t}\, T^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{t} & 0 & e^{t}-e^{2t} \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

۲-۶-۲ روشهای مختلف قطری‌سازی ماتریس حالت با مقادیر ویژه متفاوت

حالت ۱ : ماتریس حالت A، n مقدار ویژه متفاوت حقیقی دارد.

در این حالت A ، n بردار ویژه متمایز دارد که ستون های ماتریس مودال را تشکیل میدهند.

مثال ۲-۱۷ معادلات حالت و خروجی سیستم زیر را قطری کنید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -9 & 1 & 0 \\ -26 & 0 & 1 \\ -24 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [\,1 \quad 2 \quad -1\,]\,\mathbf{x}(t)$$

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{z}(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix} u(t) = \Lambda \mathbf{z}(t) + b_n u(t)$$

$$y(t) = [\,3 \quad 5 \quad 5\,]\,\mathbf{z}(t) = \mathbf{c}_n \mathbf{z}(t)$$

$$\mathrm{T} = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 6 & 5 \\ 12 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

حالت۲ : ماتریس حالت A، n مقدار ویژه متفاوت مزدوج مختلط دارد.

اگر فرض کنیم A ، m+1 مقدار ویژه مزدوج مختلط داشته باشد و بقیه مقادیر ویژه آن حقیقی باشد یعنی :

$\lambda_{1,2} = \sigma_1 \pm j\omega_1$ ، $\lambda_{3,4} = \sigma_3 \pm j\omega_3$ ، … ، $\lambda_{m,m+1} = \sigma_m \pm j\omega_m$ و λ_{m+2} ، … ، λ_n متفاوت حقیقی بوده و بردارهای ویژه متناظر $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_3$ ، … ، $\mathbf{v}_{m+1}$ ، $\mathbf{v}_{m+2}$ ، … ، $\mathbf{v}_n$ باشند. آنگاه ماتریس تبدیل $n \times n$ حقیقی زیر

$$T = [\mathrm{Re}\{\mathbf{v}_1\}, \mathrm{Im}\{\mathbf{v}_1\}, \mathrm{Re}\{\mathbf{v}_3\}, \mathrm{Im}\{\mathbf{v}_3\}, \cdots, \mathrm{Re}\{\mathbf{v}_m\}, \mathrm{Im}\{\mathbf{v}_m\}, \mathbf{v}_{m+2}, \cdots, \mathbf{v}_n] \qquad (۲-۶-۲۰)$$

ماتریس A را به فرم قطری ــ بلوکی[1] زیر تبدیل خواهد کرد

$$\Lambda=T^{-1}AT=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \omega_1 \\ -\omega_1 & \sigma_1 \end{bmatrix} & & & & & & & \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} \sigma_3 & \omega_3 \\ -\omega_3 & \sigma_3 \end{bmatrix} & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \begin{bmatrix} \sigma_m & \omega_m \\ -\omega_m & \sigma_m \end{bmatrix} & & & & \\ & & & & \lambda_{m+2} & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ \mathbf{0} & & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

مثال ۲-۱۸ معادله حالت سیستمی عبارتست از

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -2\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t) \qquad |\lambda \mathrm{I}-\mathrm{A}| = \lambda^2+2\lambda+2=0$$

و لذا $\lambda_1=-1+j$ و $\lambda_2=-1-j$

$$(\lambda_i \mathrm{I}-\mathrm{A})\,\mathbf{v}_i=0 \qquad (i=1,2)$$

بنابراین

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\ -1+j\end{bmatrix}،\ \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\ -1-j\end{bmatrix} \qquad \mathrm{T}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Lambda=\mathrm{T}^{-1}\mathrm{A}\,\mathrm{T} \qquad \dot{\mathbf{z}}(t)=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\mathbf{z}(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{b}_n=\mathrm{T}^{-1}\,\mathrm{b}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

۲-۷ تبدیل ماتریس حالت سیستم به فرم کانونیکال جردن

هنگامی‌که ماتریس حالت سیستم A دارای مقادیر ویژه تکراری باشد ممکن است که کمتر از n بردارهای ویژه ناوابسته خطی وجود داشته باشند و در این صورت قطری‌سازی ماتریس A غیرممکن خواهد بود. لیکن در این‌چنین حالتی ماتریس مربع A را می‌توان با یک تبدیل همانندی به فرم کانونیکال جردن[1] باخواص زیر تبدیل نمود:

۱) تمامی عناصر قطری مقادیر ویژه ماتریس A هستند.
۲) تمامی عناصر زیر قطر اصلی صفر هستند.
۳) هنگامیکه عناصر مجاور در قطر اصلی مساوی هستند تعداد معینی یک روی قطر اصلی وجود دارد.

فرم کلی کانونیکال جردن:

$$
\mathbf{J}=\begin{bmatrix}
\mathbf{J}_{p1} & & & & & & & \\
& \mathbf{J}_{p2} & & & \mathbf{0} & & & \\
& & \cdot & & & & & \\
& & & \cdot & & & & \\
& & & & \mathbf{J}_{p\alpha} & & & \\
& \mathbf{0} & & & & \lambda_{k+1} & & \\
& & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & \lambda_n
\end{bmatrix}
$$

که در آن $\mathbf{J}_i$ ها بلوک‌های جردن بوده و به صورت زیر می‌باشند

$$
\mathrm{J}_{Pi}=\begin{bmatrix}
\lambda & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\
0 & \lambda & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & & & & \lambda & 1 \\
0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \lambda
\end{bmatrix} \qquad (۲-۷-۲)
$$

این بلوک‌ها $P_i \times P_i$ بوده و مقدار ویژه در بلوک‌های J_{Pi} و J_{Pj} ممکن است که یکسان باشد.
همچنین داریم که

$$P_1 + P_2 + \cdots + P_\alpha = k$$

به عنوان مثال ماتریس زیر در فرم کانونیکال جردن است:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & \lambda_1 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & & \mathbf{0} \\ & & & \lambda_2 & 1 & & \\ \mathbf{0} & & & & \lambda_2 & & \\ & & & & & \lambda_6 & \\ & & & & & & \lambda_7 \end{bmatrix}$$

تعداد بلوک‌های جردن متناظر با یک مقدار ویژه داده شده λ_i در فرم جردن برابر است با تعداد بردارهای ویژه ناوابسته خطی متناظر با آن مقدار ویژه و درجه بلوک‌های جردن متناظر با هر مقدار ویژه مکرر برابر با تعداد آن است.

یعنی در مثال قبل متناظر با λ_1 فقط یک بردار ویژه مستقل داریم و دو بردار دیگر را بایستی به روش تعمیم یافته محاسبه کنیم در حالیکه در مثال زیر برای λ_1 دو بردار ویژه مستقل داریم و یک بردار تعمیم یافته بایستی محاسبه کنیم.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & & \\ 0 & \lambda_1 & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \mathbf{0} \\ & & & \lambda_2 & & & \\ & \mathbf{0} & & & \lambda_2 & & \\ & & & & & \lambda_6 & \\ & & & & & & \lambda_7 \end{bmatrix}$$

با کنار هم قرار دادن بردارهای ویژه متناظر با یک مقدار ویژه و تعمیم یافته های آن و همچنین قرار دادن بقیه بردار های ویژه ماتریس A ماتریس تبدیل T تشکیل می شود که می تواند A به فرم بلوکی جردن تبدیل کند.

$$T(\lambda_1) = [\mathbf{v}_1 , \xi_{11} , \cdots , \xi_{1_{p1-1}} , \mathbf{v}_2 , \cdots \mathbf{v}_\alpha , \xi_{\alpha_1} , \cdots , \xi_{\alpha_{P_\alpha - 1}}]$$

$$= [\mathbf{T}_1 , \mathbf{T}_2 , \cdots , \mathbf{T}_k]$$

$$\mathbf{T} = [\mathbf{T}_1 \ \mathbf{T}_2 \cdots \mathbf{T}_n]$$

$$J = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} J_{P_1}(\lambda_1) & & & & & & 0 \\ & J_{P_2}(\lambda_1) & & 0 & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & 0 & & J_{P_\alpha}(\lambda_1) & & & \\ & & & & \lambda_{k+1} & & \\ & & & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 & & \\ 0 & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad J_{P_i}(\lambda_1) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & 0 \\ & \lambda_1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

در حالت کلی اگر چند گانگی جبری λ مثلا k باشد و چند گانگی هندسی آن α لذا به تعداد α بردار ویژه مستقل متناظر با λ بروش معمول بدست می آید و ما در جردن به همین تعداد بلوک جردن داریم و به تعداد $k\text{-}\alpha$ بردار دیگر را بایستی بروش تعمیم یافته بدست آورد.

چند گانگی جبری : تعداد تکرار یک مقدار ویژه

چندگانگی هندسی : تعداد بردار ویژه مستقل متناظر با یک مقدار ویژه که از فضای پوچی ماتریس $\lambda I-A$ بدست می آید یعنی رابطه : $\alpha = n\text{-rank}(\lambda I-A)$ که در آن n بعد ماتریس A است.

بردارهای ویژه تعمیم یافته از رابطه زیر بدست می آید :

$$(A-\lambda_1 I)\, v_1 = 0$$

$$(A-\lambda_1 I)\, \xi_{11} = v_1$$

$$\vdots$$

$$(A-\lambda_1 I)\xi_{1_{P_1-1}} = \xi_{1_{P_1-2}}$$

ماتریس حالت سیستمی عبارت است از

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه A عبارتنداز $\lambda_1=1$، $\lambda_2=1$ و $\lambda_3=2$.

رتبه ماتریس $(A-\lambda_1 I)$ ۲ است

با توجه به $n-2=1$ پس فقط یک بردار مستقل ویژه متناظر با ۱ داریم و بردار دیگر بایستی از روش تعمیم یافته محاسبه شود.

$$(A-\lambda_1 I)v=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}v=0$$

$$v_1=[1 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$(A-\lambda_1 I)\,\xi_{11}=v_1$$

لذا $\xi_{11}=[0 \quad 1 \quad 0]^T$

$$v_2=[5 \quad 3 \quad 1]^T$$

$$T = [\mathbf{v}_1 \quad \xi_{11} \quad \mathbf{v}_2]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = T^{-1} A\, T$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ماتریس حالت سیستمی در زیر داده شده است

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1=-1 \qquad \lambda_2=-1 \qquad \lambda_3=-1 \qquad \lambda_4=0$

$$T(\lambda_4) = T_4 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$v_{11} = T_1 \qquad \xi_{11} = T_2 \qquad v_{21} = T_3$$

$$T(\lambda_1)=[T_1\ T_2\ T_3]=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = [T(\lambda_1) : T(\lambda_4)]$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

سپس

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس انتقال حالت :

$$e^{At}=Te^{Jt}\ T^{-1}$$

$$e^{\mathbf{J}t}=\begin{bmatrix} e^{\mathbf{J}_{P_1}t} & & & & & & & \\ & e^{\mathbf{J}_{P_2}t} & & & & & \mathbf{0} & \\ & & \cdot & & & & & \\ & & & \cdot & & & & \\ & & & & \cdot\ e^{\mathbf{J}_{P_\alpha}t} & & & \\ & \mathbf{0} & & & & e^{\lambda_{k+1}t} & & \\ & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{J}_{Pi}t} = e^{\lambda_i t}\begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2! & \cdot & \cdot & \cdot & \dfrac{t^{P_i-1}}{(P_i-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdot & \cdot & \cdot & \dfrac{t^{P_i-2}}{(P_i-2)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

در مثال قبل :

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = T^{-1} A\, T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = T\, e^{Jt}\, T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{t} & te^{t} & 0 \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{t} & te^{t} & -(5+3\,t)\, e^{t} + 5e^{2t} \\ 0 & e^{t} & -3\, e^{t} + 3e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

محاسبه بردار های ویژه :

۱) استفاده ازتعریف بردارها و مقادیر ویژه و حل معادله $(A-\lambda I)v=0$
۲) یکی از ستونهای ماتریس $adj(A-\lambda I)$
۳) ماتریس های خاص همبسته(companoin) که ماتریس تبدیل آن به فرم وندرموند خواهد بود.(vandermonde)

ماتریس همبسته :

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$[1 \lambda \lambda^2 \cdots \lambda^{n-1}]^T$$

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_0 & -a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & -a_{n-2} & -a_{n-1} \\ 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\lambda^{n-1} \lambda^{n-2} \cdots \lambda \ 1]^T$$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$