مفاهیم و مقدمات جبرخطی کاربردی
در کنترل مدرن

فضاهای برداری

- مفهوم میدان (Field)

  - یک میدان مجموعه ای از اسکالرها است، به طوریکه همراه با دو عمل جمع و ضرب شرایط زیر را برآورده می سازد،

۱- برای هر اسکالر a و b متعلق به میدان F یک اسکالر متناظر $a+b$ در F وجود دارد که مجموع a و b نامیده می شود.

۲- برای هر اسکالر a و b متعلق به میدان F یک اسکالر متناظر ab در F وجود دارد که حاصلضرب a و b نامیده می شود.

۳- برای هر اسکالر a ، b و c متعلق به میدان F قوانین زیر برقرار است.

1. $a+b=b+a, \quad ab=ba$	جابجایی پذیری در عمل جمع و ضرب
2. $(a+b)+c=a+(b+c), \quad (ab)c=a(bc)$	شرکت پذیری در عمل جمع و ضرب
3. $a(b+c)=ab+ac$	توزیع پذیری در عمل جمع و ضرب
4. $\forall a\in F, \quad \exists 0\in F \rightarrow \quad a+0=a$	عضو خنثی در عمل جمع
5. $\forall a\in F, \quad \exists 1\in F \rightarrow \quad 1a=a$	عضو خنثی در عمل ضرب
6. $\forall a\in F, \quad \exists b\in F \rightarrow \quad a+b=0$	عضو معکوس در عمل جمع
7. $\forall a\in F, \quad \exists b\in F \rightarrow \quad ab=1$	عضو معکوس در عمل ضرب

- <u>مثال ۱</u>

- هر یک از مجموعه های زیر با دو عمل جمع و ضرب تشکیل یک میدان می دهند،
- مجموعه های اعداد حقیقی، $\Re$
- مجموعه اعداد مختلط، C
- مجموعه اعداد گویا، Q

- مجموعه اعداد صحیح Z یا مجموعه ماتریس های $n \times n$ با دو عمل جمع و ضرب تشکیل یک میدان نمی دهند، چون شرط ۷ را برآورده نمی سازند.

- مفهوم فضای برداری (Vector Space)

- در مطالعه سیستمهای خطی فضای برداری را به روی یک میدان تعریف می کنند.

- یک فضای برداری مانند V بر روی میدان F ، مجموعه ای از بردارها است که با دو عمل جمع و ضرب شرایط زیر را برآورده می سازد،

1. $\forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in V \rightarrow \quad \mathbf{u}+\mathbf{v}\in V$
2. $\forall \mathbf{u}\in V,\quad \forall c\in F \rightarrow \quad c\mathbf{u}\in V$
3. $\forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in V \rightarrow \quad \mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$
4. $\forall \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V \rightarrow \quad \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$
5. $\forall \mathbf{u}\in V,\quad \exists 0\in V \rightarrow \quad \mathbf{u}+0=0+\mathbf{u}$
6. $\forall \mathbf{u}\in V,\quad \exists -\mathbf{u}\in V \rightarrow \quad \mathbf{u}+(-\mathbf{u})=(-\mathbf{u})+\mathbf{u}=0$
7. $\forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in V,\quad \forall a,b\in F \rightarrow \quad (a+b)\mathbf{u}=a\mathbf{u}+b\mathbf{u},\quad a(\mathbf{u}+\mathbf{v})=a\mathbf{u}+a\mathbf{v}$
8. $\forall \mathbf{u}\in V,\quad \forall a,b\in F \rightarrow \quad a(b\mathbf{u})=(ab)\mathbf{u}$
9. $\forall \mathbf{u}\in V,\quad \exists 1\in F \rightarrow \quad 1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

- **مثال ۲**

- مجموعه $\Re^n$ که شامل تمام بردارهای n تایی به شکل $\mathbf{u} = [u_1, \cdots, u_n]$ می باشد، بر روی میدان $\Re$ تشکیل یک فضای برداری می دهند.

- مجموعه P_k که شامل تمام چند جمله ای هایی است که به فرم زیر می باشد،
$$p(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_k x^k$$
بر روی میدان $\Re$ تشکیل یک فضای برداری می دهد.

• مفهوم زیر فضای برداری (Vector Subspace)

• فرض کنیم V یک فضای برداری بر روی میدان F باشد و S یک زیر مجموعه غیر تهی از V باشد. S را یک زیر فضا از V می نامند، هرگاه،

$$\boxed{\begin{array}{l} 1.\quad \forall \mathbf{s},\mathbf{t} \in S \rightarrow \quad \mathbf{s}+\mathbf{t} \in S \\ 2.\quad \forall \mathbf{s} \in S, \quad \forall a \in F \rightarrow \quad a\mathbf{s} \in S \end{array}}$$

• فضای برداری $\Re^n$ یک زیرفضا از فضای برداری C^n به روی میدان C می باشد.

• اگر $S_1, S_2, \ldots, S_n$ زیرفضاهای فضای برداری V باشند، آنگاه اشتراک کلیه زیرفضاها $(S_1 \bigcap S_2 \bigcap \ldots \bigcap S_n)$ نیز یک زیرفضا از V خواهد بود.

- <u>مثال ۳</u>
- در فضای برداری دو بعدی $\Re^2$ هر خط راستی که از مبدأ عبور کند، یک زیر فضای برداری از $\Re^2$ می باشد.

$$\boxed{S=\{(x,y)\in\Re^2 : ax+by=0\}}$$

برای بررسی باید برقراری شرایط یک و دو را بررسی کنیم،

$$\left.\begin{matrix}(x,y)\in S\rightarrow ax+by=0\\(u,v)\in S\rightarrow au+bv=0\end{matrix}\right\}\rightarrow \quad a(x+u)+b(y+v)=0$$

بنابراین نتیجه می گیریم که $(x+u,y+v)\in S$ می باشد و شرط اول بر قرار است.

$$(x,y)\in S\rightarrow \quad ax+by=0\rightarrow \quad a(cx)+b(cy)=0$$

ترکیب خطی بردارها (Linear Combination)

- بردار $\mathbf{u}$ در فضای برداری V یک ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ می باشد، اگر اسکالرهای $c_1, c_2, \ldots, c_n$ وجود داشته باشد که بتوان $\mathbf{u}$ را بصورت زیر نمایش داد.

$$\boxed{\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n}$$

- اگر بردارهای $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ متعلق به فضای برداری V باشد، آنگاه کلیه ترکیبهای خطی این بردارها یک زیرفضای برداری از V می باشد.

- <u>مثال ۴</u>

- آیا می توان بردار $\mathbf{u}$ را بصورت ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ نوشت.

$$\boxed{1. \quad \mathbf{u} = (-12, 20), \quad \mathbf{v}_1 = (-1, 2), \quad \mathbf{v}_2 = (4, -6)}$$

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 \rightarrow \quad (-12, 20) = c_1(-1, 2) + c_2(4, -6)$$

$$\begin{cases} -c_1 + 4c_2 = -12 \\ 2c_1 - 6c_2 = 20 \end{cases} \rightarrow \quad c_1 = 4, \quad c_2 = -2$$

بنابراین بردار $\mathbf{u}$ یک ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ می باشد و می توان آن را بصورت $\mathbf{u} = 4\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2$ نوشت.

$$\boxed{2. \quad \mathbf{u}=(4,20), \quad \mathbf{v}_1=(2,10), \quad \mathbf{v}_2=(-3,-15)}$$

$$\mathbf{u}=c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2 \rightarrow \quad (4,20)=c_1(2,10)+c_2(-3,-15)$$

$$\begin{cases} 2c_1-3c_2=4 \\ 10c_1-15c_2=20 \end{cases} \rightarrow \quad c_1=2+\frac{3}{2}t, \quad c_2=t, \qquad t\in\Re$$

در این حالت نیز بردار $\mathbf{u}$ یک ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ می باشد، ولی برخلاف حالت قبل فقط یک جواب وجود ندارد و بینهایت ترکیب خطی مختلف می توان بدست آورد.

$$\boxed{3. \quad \mathbf{u}=(1,-4), \quad \mathbf{v}_1=(2,10), \quad \mathbf{v}_2=(-3,-15)}$$

$$\mathbf{u}=c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2 \rightarrow \quad (1,-4)=c_1(2,10)+c_2(-3,-15)$$

$$\begin{cases} 2c_1-3c_2=1 \\ 10c_1-15c_2=-4 \end{cases}$$

در این حالت جوابی برای c_1 و c_2 وجود ندارد. بنابراین بردار $\mathbf{u}$ را نمی توان بصورت یک ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ نوشت.

- مفهوم اسپن (Span)

- اگر $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ یک مجموعه از بردارها در فضای برداری V باشد و W مجموعه کلیه ترکیبهای خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ باشد، در اینصورت W یک اسپن از بردارهای $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ می باشد، که بصورت زیر نمایش داده می شود،

$$\boxed{\begin{aligned}&W=\mathrm{sp}(S)\\&W=\mathrm{sp}\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}\\&W=\{c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\ldots+c_n\mathbf{v}_n : c_1,c_2,\ldots c_n\in\Re\}\end{aligned}}$$

همچنین می توان گفت، که بردارهای $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ زیر فضای W را اسپن می کنند.

- <u>مثال ۵</u>
- بررسی کنید که آیا بردارهای زیر فضای برداری $\Re^3$ را اسپن می کنند.

$$\boxed{\textbf{1.}\quad \mathbf{u}=[1,2,1],\ \ \mathbf{v}=[1,1,1],\ \ \mathbf{w}=[0,2,-1]}$$

یک ترکیب خطی از این دو بردار به شکل زیر می باشد.

$$\begin{aligned}a\mathbf{u}+b\mathbf{v}+c\mathbf{w}&=a[1,2,1]+b[1,1,1]+c[0,2,-1]\\&=[a+b,2a+b+2c,a+b-c]\end{aligned}$$

اگر این ترکیب خطی را بصورت یک بردار مانند $\mathbf{r}=[r_1,r_2,r_3]$ نمایش دهیم داریم،

$$[r_1,r_2,r_3]=[a+b,2a+b+2c,a+b-c]\rightarrow\begin{cases}a+b=r_1\\2a+b+2c=r_2\\a+b-c=r_3\end{cases}$$

فرم ماتریسی این دستگاه معادلات بصورت زیر می باشد،

$$A\mathbf{x}=\mathbf{y}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&0\\2&1&2\\1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{bmatrix}$$

از آنجائیکه $|A|=1$ می باشد، بنابراین برای هر بردار دلخواه $\mathbf{r}=[r_1,r_2,r_3]$ می توان یک جواب پیدا کرد.

لذا بردارهای $\mathbf{u}=[1,2,1],\ \ \mathbf{v}=[1,1,1],\ \ \mathbf{w}=[0,2,-1]$ فضای برداری $\Re^3$ را اسپن می کنند.

$$\boxed{\mathbf{2.}\quad \mathbf{u}=[1,2,-1],\ \ \mathbf{v}=[3,-1,1],\ \ \mathbf{w}=[-3,8,-5]}$$

یک ترکیب خطی از این دو بردار به شکل زیر می باشد.

$$a\mathbf{u}+b\mathbf{v}+c\mathbf{w}=a[1,2,-1]+b[3,-1,1]+c[-3,8,-5]$$
$$=[a+3b-3c,2a-b+8c,-a+b-5c]$$

فرم ماتریسی این دستگاه معادلات بصورت زیر می باشد.

$$A\mathbf{x}=\mathbf{y}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 3 & -3\\ 2 & -1 & 8\\ -1 & 1 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_1\\ r_2\\ r_3\end{bmatrix}$$

از آنجائیکه $|A|=0$ می باشد، دستگاه معادلات مذکور ناسازگار بوده و هیچ جوابی ندارد.

لذا، بردارهای $\mathbf{u}=[1,2,-1],\ \ \mathbf{v}=[3,-1,1],\ \ \mathbf{w}=[-3,8,-5]$ را نمی توان بصورت یک ترکیب نوشت.

پس این بردارها فضای برداری $\Re^3$ را اسپن نمی کنند.

- استقلال خطی و وابستگی خطی بردارها

- بردارهای $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ را مستقل خطی **(Linear Independent)** گویند، اگر معادله به شکل زیر،

$$\boxed{c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n = 0}$$

که در آن $c_1, c_2, \ldots, c_n$ اسکالرهای ثابتی هستند، فقط به ازای شرط زیر برقرار باشد،

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$$

- در غیر اینصورت بردارهای $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ را وابسته خطی گویند. **(Linear Dependent)**

- اگر بردارهای $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ مستقل خطی بوده ولی بردارهای $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n+1}$ وابسته خطی باشند، در اینصورت می توان $\mathbf{u}_{n+1}$ را بصورت یک ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ بیان کرد.

- شرط لازم و کافی برای مستقل خطی بودن بردارهای $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ که هر یک دارای n تا عنصر هستند، آن است که دترمینان ماتریس ضرایب $n \times n$ حاصل از رابطه $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n = 0$ مخالف صفر باشد.

- مثال ۶
  - استقلال خطی یا وابستگی خطی بردارهای زیر را بررسی کنید.

$$\boxed{\textbf{1.}\quad \mathbf{u}_1=[-2,1],\ \mathbf{u}_2=[-1,-3],\ \mathbf{u}_3=[4,-2]}$$

با توجه به رابطه $c_1\mathbf{u}_1+c_2\mathbf{u}_2+\ldots+c_n\mathbf{u}_n=0$ داریم،

$$c_1[-2,1]+c_2[-1,-3]+c_3[4,-2]=\mathbf{0}$$

$$[-2c_1-c_2+4c_3,c_1-3c_2-2c_3]=[0,0]$$

دستگاه معادلات مربوطه به شکل زیر می باشد،

$$-2c_1-c_2+4c_3=0$$

$$c_1-3c_2-2c_3=0$$

از آنجائیکه تعداد معادلات کمتر از تعداد مجهولات است، جوابها را بصورت زیر می توان بدست آورد،

$$c_1=2t,\quad c_2=0,\quad c_3=t\quad,\quad t\in\Re$$

بنابراین بردارهای $\mathbf{u}_1=[-2,1],\mathbf{u}_2=[-1,-3],\mathbf{u}_3=[4,-2]$ وابسته خطی می باشند.

$$\boxed{\mathbf{2.}\quad \mathbf{u}_1=[1,-2,3,-4],\ \mathbf{u}_2=[-1,3,4,2],\ \mathbf{u}_3=[1,1,-2,-2]}$$

با توجه به رابطه $c_1\mathbf{u}_1+c_2\mathbf{u}_2+\ldots+c_n\mathbf{u}_n=0$ داریم،

$$c_1[1,-2,3,-4]+c_2[-1,3,4,2]+c_3[1,1,-2,-2]=\mathbf{0}$$

$$[c_1-c_2+c_3,-2c_1+3c_2+c_3,3c_1+4c_2-2c_3,-4c_1+2c_2-2c_3]=[0,0,0,0]$$

دستگاه معادلات مربوطه به شکل زیر می باشد،

$$\begin{aligned}
&c_1-c_2+c_3=0\\
&-2c_1+3c_2+c_3=0\\
&3c_1+4c_2-2c_3=0\\
&-4c_1+2c_2-2c_3=0
\end{aligned}$$

برای حل این معادلات تنها جواب ممکن جواب بدیهی $c_1=c_2=c_3=0$ می باشد،

پس بردارهای $\mathbf{u}_1=[1,-2,3,-4],\mathbf{u}_2=[-1,3,4,2],\mathbf{u}_3=[1,1,-2,-2]$ مستقل خطی هستند.

• جایگشت بردارها

- اگر بردارهای $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ یک جایگشت (Permutation) از بردارهای $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ باشند، آنگاه شرط لازم و کافی برای اینکه بردارهای $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ استقلال خطی داشته باشند آن است که، بردارهای $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ مستقل خطی باشند.

- از طرفی فضای اسپن این دو دسته بردارها نیز یکسان خواهد بود،

$$\boxed{\mathrm{sp}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\} = \mathrm{sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}}$$

- در انجام عمل جایگشت طول، اندازه و تعداد بردارها تغییر نمی کنند.

- اگر اسکالرهای $c_1, c_2, \ldots, c_n$ غیر صفر باشند، شرط لازم و کافی برای آنکه بردارهای $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ استقلال خطی داشته باشند، آن است که بردارهای $c_1\mathbf{u}_1, c_2\mathbf{u}_2, \ldots, c_n\mathbf{u}_n$ مستقل خطی باشند.

- از طرفی فضای اسپن این دو دسته بردار نیز برابر خواهد بود،

$$\boxed{\mathrm{sp}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\} = \mathrm{sp}\{c_1\mathbf{u}_1, c_2\mathbf{u}_2, \ldots, c_n\mathbf{u}_n\}}$$

- یعنی اگر در اسکالرهای غر صفر ضرب کنیم خاصیت اسپن تغییر نمی کند.

- مثال ۷ • بردارهای زیر را در نظر بگیرید،

$$\boxed{\mathbf{u}_1=[2,1,2],\ \ \mathbf{u}_2=[3,4,1],\ \ \mathbf{u}_3=[5,2,5]}$$

با توجه به رابطه $c_1\mathbf{u}_1+c_2\mathbf{u}_2+\ldots+c_n\mathbf{u}_n=0$ داریم،

$$c_1[2,1,2]+c_2[3,4,1]+c_3[5,2,5]=\mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

از آنجائیکه $|A|\neq 0$ است، بنابراین بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ مستقل خطی می باشند.

بردارهای $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ را بصورت یک جایگشت از بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ می نویسیم،

$$\mathbf{v}_1=[2,2,1],\ \ \mathbf{v}_2=[4,3,1],\ \ \mathbf{v}_3=[5,2,5]$$

با توجه به رابطه $c_1\mathbf{u}_1+c_2\mathbf{u}_2+\ldots+c_n\mathbf{u}_n=0$ داریم،

$$c_1[2,2,1]+c_2[4,3,1]+c_3[5,2,5]=\mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

از آنجائیکه $|A|\neq 0$ است، بنابراین بردارهای $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ نیز مستقل خطی می باشند.

- مفهوم پایه در فضای برداری (Basis)

- در یک فضای برداری مانند V ، مجموعه بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n$ تشکیل یک پایه می دهند، اگر دو شرط زیر را داشته باشند،

۱- آن فضای برداری را اسپن کنند،

$$\boxed{V=\mathrm{sp}\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n\}}$$

۲- بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n$ مستقل خطی باشند.

- برای یک فضای برداری مانند V بردارهای پایه منحصر بفرد نیستند، ولی نمایش هر بردار توسط این بردارهای پایه منحصر بفرد می باشد.

• مثال ۸ • آیا بردارهای زیر برای فضای برداری $\Re^3$ تشکیل یک پایه می دهند.

$$\boxed{\mathbf{u}_1=[1,-1,1],\ \ \mathbf{u}_2=[0,1,2],\ \ \mathbf{u}_3=[3,0,-1]}$$

برای این منظور دو شرط ذکر شده در تعریف پایه را بررسی می کنیم،

۱- بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ فضای برداری $\Re^3$ را اسپن کنند.

$$c_1\mathbf{u}_1+c_2\mathbf{u}_2+c_3\mathbf{u}_3=c_1[1,-1,1]+c_2[0,1,2]+c_3[3,0,-1]=[r_1,r_2,r_3]$$

فرم ماتریسی دستگاه معادلات حاصل بصورت زیر می باشد

$$\begin{bmatrix}1&0&3\\-1&1&0\\1&2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{bmatrix}$$

از آنجائیکه دترمینان ماتریس ضرایب مخالف صفر است، بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ فضای برداری $\Re^3$ را اسپن می کنند.

۲- بردارهای $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ مستقل خطی باشند.

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3 = c_1[1,-1,1] + c_2[0,1,2] + c_3[3,0,-1] = [0,0,0]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

از آنجائیکه دترمینان ماتریس ضرایب مخالف صفر است، بردارهای $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ مستقل خطی هستند.

دو شرط برقرار بود پس تشکیل یک پایه میدهند.

• مفهوم بُعد در فضای برداری (Dimension)

- تعداد بردارهای پایه در یک فضای برداری مانند V را بُعد آن فضا می نامند و با نماد زیر نشان می دهند.

$$\boxed{\dim(V)}$$

- اگر فضای برداری V شامل تعداد محدودی بردار باشد آن را فضا با بُعد متناهی می نامیم، در غیر اینصورت به آن فضا با بُعد نامتناهی می گوییم.

- بُعد یک فضا برابر با حداکثر تعداد بردارهای مستقل خطی در آن فضا است. بنابراین در یک فضای n بُعدی حداکثر بردارهای مستقل خطی n عدد می باشد.

- در یک فضای برداری n بُعدی مانند V هر مجموعه از n بردار مستقل خطی می تواند تشکیل یک پایه بدهد.

- در فضای برداری n بُعدی مانند V هر مجموعه بردارهای مستقل خطی در V را می توان به یک پایه تبدیل کرد.

- اگر بردارهای $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ وابسته خطی و $\mathbf{u}_1 \neq 0$ باشند، بطور حتم یک دسته بردار بصورت $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ وجود دارد که مستقل خطی باشد $(k < n)$.

- در هر فضای برداری مانند V اگر $V = \mathrm{sp}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ باشد، حتماً یک دسته بردار بصورت $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ وجود دارند که یک پایه برای V تشکیل دهند. $(k \leq n)$

- <u>مثال ۹</u>

- بردارهای مستقل خطی زیر را در فضای سه بُعدی $\Re^3$ در نظر بگیرید،

$$\boxed{\mathbf{u}_1 = [1,2,0],\ \ \mathbf{u}_2 = [1,0,3]}$$

یک پایه بدیهی برای این فضا پایه های استاندارد $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ می باشند،

$$\mathbf{e}_1 = [1,0,0],\ \ \mathbf{e}_2 = [0,1,0],\ \ \mathbf{e}_3 = [0,0,1]$$

می دانیم که مجموعه بردارهای $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ وابسته خطی می باشند.
بنابراین بردار $\mathbf{e}_3$ را می توان بصورت یک ترکیب خطی از بقیه بردارها نوشت،

$$\mathbf{e}_3 = [0,0,1] = (\tfrac{-4}{3})[1,0,0] + (-2)[0,1,0] + [1,2,0] + (\tfrac{1}{3})[1,0,3]$$

حال بردارهای $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ را در نظر می گیریم. در این مجموعه نیز بردار $\mathbf{e}_2$ را بصورت یک ترکیب خطی از بقیه بردارها می نویسیم،

$$\mathbf{e}_2 = [0,1,0] = (\tfrac{-1}{2})[1,0,0] + (\tfrac{1}{2})[1,2,0] + (0)[1,0,3]$$

لذا بردارهای باقی مانده $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{e}_1$ مستقل خطی بوده و تشکیل پایه برای فضای $\Re^3$ می دهند.

- تغییر پایه در یک فضای برداری

- فرض کنید بردارهای $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ و بردارهای $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ دو دسته بردارهای پایه برای فضای برداری n بُعدی مانند V باشند. در اینصورت یک بردار متعلق به این فضا مانند $\mathbf{u}$ را به دو صورت زیر می توان نمایش داد،

$$\mathbf{u} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + \cdots + b_n\mathbf{e}_n = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

که در آن $c_1, c_2, \ldots, c_n$ و $b_1, b_2, \ldots, b_n$ اسکالرهای متناسب با پایه های مربوطه می باشند. این اسکالرها را می توان بصورت بردارهای زیر نمایش داد،

$$\mathbf{b} = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n]^T \qquad \mathbf{c} = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n]^T$$

به این ترتیب داریم،

$$\boxed{\mathbf{u} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{e}_n]\mathbf{b} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{v}_n]\mathbf{c}}$$

حال می خواهیم ارتباطی بین این دو نمایش مختلف با پایه های مختلف یا به عبارتی ارتباطی بین بردارهای اسکالرهای متناسب با این پایه ها پیدا کنیم.

برای این منظور بردارهای پایه $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ را بصورت یک ترکیب خطی از بردارهای پایه $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ می نویسیم،

$$\boxed{\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= k_{11}\mathbf{v}_1 + k_{21}\mathbf{v}_2 + \cdots + k_{n1}\mathbf{v}_n \\
\mathbf{e}_2 &= k_{12}\mathbf{v}_1 + k_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + k_{n2}\mathbf{v}_n \\
&\vdots \\
\mathbf{e}_n &= k_{1n}\mathbf{v}_1 + k_{2n}\mathbf{v}_2 + \cdots + k_{nn}\mathbf{v}_n
\end{aligned}}$$

نمایش ماتریسی آن بصورت زیر خواهد بود،

$$\boxed{[\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{e}_n] = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{v}_n]\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix}}$$

ماتریس حاصل را K در نظر می گیریم،

$$\boxed{[\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{e}_n] = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{v}_n]K}$$

$$\boxed{\mathbf{u} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{e}_n]\mathbf{b} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{v}_n]\mathbf{c}}$$

$$\boxed{[\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{e}_n] = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{v}_n]K}$$

$$\boxed{[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{v}_n]K\,\mathbf{b} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{v}_n]\mathbf{c}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} K\mathbf{b} = \mathbf{c} \\ \mathbf{b} = \mathbf{c}K^{-1} \end{array}}$$

به این ترتیب ارتباط بین ضرایب $c_1, c_2, \ldots, c_n$ و $b_1, b_2, \ldots, b_n$ در قالب یک ماتریس بدست می آید، که به آن *ماتریس تبدیل* گویند.

- <u>مثال ۱۰</u>

- مجموعه بردارهای $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ و $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ در فضای برداری $\Re^3$ تشکیل دو دسته پایه را می دهند.

$$\boxed{E:\left\{\mathbf{e}_1=[1,0,0],\quad \mathbf{e}_2=[0,1,0],\quad \mathbf{e}_3=[0,0,1]\right\}}$$

$$\boxed{V:\left\{\mathbf{v}_1=[1,-1,1],\quad \mathbf{v}_2=[0,1,2],\quad \mathbf{v}_3=[3,0,-1]\right\}}$$

- ماتریس تبدیل متناظر برای تغییر از پایه $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ به پایه $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ را بیابید.

برای این منظور هر یک از بردارهای $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ را بصورت یک ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ می نویسیم،

$$\mathbf{v}_1=[1,-1,1]=(1)\mathbf{e}_1+(-1)\mathbf{e}_2+(1)\mathbf{e}_3$$
$$\mathbf{v}_2=[0,1,2]=(0)\mathbf{e}_1+(1)\mathbf{e}_2+(2)\mathbf{e}_3$$
$$\mathbf{v}_3=[3,0,-1]=(3)\mathbf{e}_1+(0)\mathbf{e}_2+(-1)\mathbf{e}_3$$

ماتریس تبدیل متناظر بصورت زیر بدست می آید،

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

از آنجائیکه بردارهای $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ بردارهای پایه استاندارد برای فضای برداری $\Re^3$ می باشند، بنابراین ستون های ماتریس تبدیل در این حالت همان بردارهای $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ می باشند.

- ماتریس تبدیل متناظر برای تغییر از پایه $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ به پایه $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ را بیابید.

این بار بردارهای $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ را بصورت یک ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ می نویسیم،

$$\mathbf{e}_1 = [1,0,0] = (\tfrac{1}{10})\mathbf{v}_1 + (\tfrac{1}{10})\mathbf{v}_2 + (\tfrac{3}{10})\mathbf{v}_3$$

$$\mathbf{e}_2 = [0,1,0] = (\tfrac{-3}{5})\mathbf{v}_1 + (\tfrac{2}{5})\mathbf{v}_2 + (\tfrac{1}{5})\mathbf{v}_3$$

$$\mathbf{e}_3 = [0,0,1] = (\tfrac{3}{10})\mathbf{v}_1 + (\tfrac{3}{10})\mathbf{v}_2 + (\tfrac{-1}{10})\mathbf{v}_3$$

ماتریس تبدیل متناظر بصورت زیر بدست می آید.

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{-3}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{-1}{10} \end{bmatrix}$$

- اگر نمایش بردار $\mathbf{u}$ در پایه V بصورت $[\mathbf{u}]_V = [-2,3,4]$ باشد، نمایش آن را در پایه E بیابید.

با توجه به ماتریس تبدیل از پایه V به پایه E داریم،

$$[\mathbf{u}]_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- تبدیلهای خطی و ماتریس ها (Linear Transformation)

- فرض کنیم V_1 و V_2 دو فضای برداری بر روی میدان F باشند. تابع $T: V_1 \to V_2$ را یک تبدیل خطی از V_1 به V_2 می نامیم، اگر برای تمام بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ متعلق به V_1 و تمام اسکالرهای c متعلق به F دو شرط زیر برآورده گردد.

$$\boxed{T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})}$$

$$\boxed{T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})}$$

- بنابراین می توان گفت که تابع $T: V_1 \to V_2$ یک تبدیل خطی است، اگر و فقط اگر تساوی زیر برای تمام بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ متعلق به V_1 و تمام اسکالرهای c_1 و c_2 متعلق به F برقرار باشد.

$$\boxed{T(c_1\mathbf{u}+c_2\mathbf{v}) = c_1T(\mathbf{u}) + c_2T(\mathbf{v})}$$

• مثال ۱۱ • آیا تابع $T:\Re^3 \to \Re^2$ با تعریف زیر یک تبدیل خطی می باشد؟

$$\boxed{T(u_1,u_2,u_3) = (4u_2 + u_3, u_1 - 10u_2)}$$

برای این منظور باید دو شرط مذکور را بررسی نماییم. شرط اول بصورت زیر است،

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

$$\begin{aligned} T(u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3) &= (4(u_2+v_2)+(u_3+v_3), (u_1+v_1)-10(u_2+v_2)) \\ &= (4u_2+u_3+4v_2+v_3, u_1+v_1-10u_2-10v_2) \\ &= (4u_2+u_3, u_1-10u_2)+(4v_2+v_3, v_1-10v_2) \\ &= T(u_1,u_2,u_3)+T(v_1,v_2,v_3) \end{aligned}$$

لذا شرط اول برقرار است.

حال شرط دوم را بررسی می نماییم،

$$T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$$

$$\begin{aligned} T(cu_1, cu_2, cu_3) &= (4cu_2 + cu_3, cu_1 - 10cu_2) \\ &= c(4u_2 + u_3, u_1 - 10u_2) \\ &= cT(u_1, u_2, u_3) \end{aligned}$$

با برقراری شرط دوم می توان گفت که تابع مذکور یک تبدیل خطی است.

- نمایش ماتریسی یک تبدیل خطی

- هر تبدیل خطی $T: V_1 \to V_2$ را می توان بوسیله یک ماتریس مشخص کرد.

- فرض کنید $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ و $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ به ترتیب بردارهای پایه فضاهای V_1 و V_2 باشند. می دانیم که هر بردار مانند $\mathbf{u}$ متعلق به V_1 را می توان بصورت ترکیب خطی زیر نمایش داد،

$$\boxed{\mathbf{u} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + \cdots + b_n\mathbf{e}_n}$$

که در آن b_i ها مقادیر اسکالر متناسب می باشند. بنابراین می توان نوشت،

$$\boxed{\begin{aligned} T(\mathbf{u}) &= b_1T(\mathbf{e}_1) + b_2T(\mathbf{e}_2) + \cdots + b_nT(\mathbf{e}_n) \\ &= [T(\mathbf{e}_1) \quad T(\mathbf{e}_2) \quad \cdots \quad T(\mathbf{e}_n)][b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n]^T \end{aligned}}$$

هر یک از $T(\mathbf{e}_i)$ ها را می توان برحسب $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ بصورت زیر نوشت،

$$\boxed{\begin{aligned} T(\mathbf{e}_1) &= a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{m1}\mathbf{v}_m \\ T(\mathbf{e}_2) &= a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{m2}\mathbf{v}_m \\ &\vdots \\ T(\mathbf{e}_n) &= a_{1n}\mathbf{v}_1 + a_{2n}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{mn}\mathbf{v}_m \end{aligned}}$$

نمایش ماتریس این معادلات به شکل زیر خواهد بود،

$$\boxed{\begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & \cdots & T(\mathbf{e}_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}$$

که با جایگذاری داریم،

$$\boxed{T(\mathbf{u})=[T(\mathbf{e}_1)\quad T(\mathbf{e}_2)\quad \cdots \quad T(\mathbf{e}_n)][b_1\quad b_2\quad \cdots \quad b_n]^T}$$

$$\boxed{T(\mathbf{u})=[\mathbf{v}_1\quad \mathbf{v}_2\quad \cdots \quad \mathbf{v}_m]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}[b_1\quad b_2\quad \cdots \quad b_n]^T}$$

$$\boxed{T(\mathbf{u})=\mathbf{v}A\mathbf{b}}$$

اگر حاصل $A\mathbf{b}$ را بصورت یک بردار ضرایب $\mathbf{c}_{m\times 1}$ در نظر بگیریم، در اینصورت توانسته ایم تبدیل خطی $T(\mathbf{u})$ را برحسب بردارهای $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_m$ نمایش دهیم،

$$\boxed{T(\mathbf{u})=\mathbf{v}A\mathbf{b}=\mathbf{v}\mathbf{c}=c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\cdots+c_m\mathbf{v}_m}$$

- ماتریس A در اینجا بیانگر ارتباط بین ضرایب تبدیل c_i ها و b_i ها است، نه بردارهای $\mathbf{e}$ و $\mathbf{v}$، همچنین وابسته به بردارهای پایه انتخاب شده می باشد.

- مثال ۱۲
- فرض کنیم تبدیل خطی $T:\Re^2 \to \Re^2$ بصورت زیر تعریف شده باشد،

$$\boxed{\begin{array}{l} T(1,2)=(0,-1) \\ T(2,1)=(-1,1) \end{array}}$$

می خواهیم ماتریس تبدیل مربوط به این تبدیل خطی را نسبت به بردارهای پایه استاندارد فضای $\Re^2$ پیدا کنیم.

با توجه به اینکه هر بردار در یک فضای برداری را می توان بصورت ترکیب خطی از بردارهای پایه آن فضا نوشت داریم،

$$\mathbf{u}=b_1\mathbf{e}_1+b_2\mathbf{e}_2 \quad \to \quad (u_1,u_2)=b_1(1,0)+b_2(0,1)=(b_1,b_2)$$

پس با توجه به صورت مسئله می توان نوشت،

$$\mathbf{u}=(1,2) \quad \to \quad (b_1,b_2)=(1,2)$$
$$\mathbf{u}=(2,1) \quad \to \quad (b_1,b_2)=(2,1)$$

بنابراین،

$$T(\mathbf{u}) = b_1 T(\mathbf{e}_1) + b_2 T(\mathbf{e}_2) \rightarrow \begin{cases} T(1,2) = T(\mathbf{e}_1) + 2T(\mathbf{e}_2) = (0,-1) \\ T(2,1) = 2T(\mathbf{e}_1) + T(\mathbf{e}_2) = (-1,1) \end{cases}$$

پاسخ این دستگاه معادلات بصورت زیر می باشد،

$$T(\mathbf{e}_1) = (-2/3,1), \qquad T(\mathbf{e}_2) = (1/3,-1)$$

از این رو ماتریس تبدیل خطی مذکور بصورت زیر بدست می آید،

$$[T(e_1) \quad T(e_2)] = \begin{bmatrix} -2/3 & 1/3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

برای بررسی صحت پاسخ می توان تبدیل های داده شده در صورت مسئله را امتحان کرد،

$$T(1,2) = (0,-1) \rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = [0 \quad -1]$$

$$T(2,1) = (-1,1) \rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = [-1 \quad 1]$$

- تبدیل های همانندی و ماتریس های همانند

- دسته مهمی از تبدیل ها (نگاشت ها) آنهایی هستند که یک فضای برداری خطی را به خود آن فضا می نگارند، که به آنها تبدیل های همانندی گفته می شود.

$$\boxed{T : V \to V}$$

- در این حالت بردارهای پایه برای هر دو فضا یکسان انتخاب می شود.

- ماتریس های $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ را همانندگویند اگر یک ماتریس غیرمنفرد مانند T وجود داشته باشد، چنانکه عبارت زیر برقرار گردد،

$$\boxed{T^{-1}AT = B}$$

- در اینصورت می گوییم ماتریس B با یک تبدیل همانندی از ماتریس A بدست آمده است و ماتریس T را ماتریس تبدیل گویند.

- ماتریس A را می توان از طریق ماتریس تبدیل T^{-1} بدست آورد،

$$\boxed{A = TBT^{-1}}$$

- دترمینان دو ماتریس همانند $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ یکسان می باشد، به عبارتی،

$$\boxed{|B| = |T^{-1}AT| = |T^{-1}||A||T| = \frac{1}{|T|}|A||T| = |A|}$$

- اگر معادله مشخصه یک ماتریس مانند $A_{n\times n}$ بصورت $|\lambda I - A| = 0$ باشد، این معادله مشخصه تحت تبدیل همانندی تغییر نمی یابد.

- مفهوم فضای گستره در یک ماتریس

- صورت کلی دستگاه معادلات جبری زیر را در نظر بگیرید،

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b} \qquad (A_{m\times n},\mathbf{x}_{n\times 1},\mathbf{b}_{m\times 1})$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ماتریس A را می توان بصورت یک نگاشتی در نظر گرفت که فضای n بعدی V_1 بر روی میدان F را به فضای m بعدی V_2 بر روی میدان F می نگارد.

- فضای گستره (Range Space) یک نگاشت خطی مانند A مجموعه ای است، شامل عناصر $\mathbf{b}$ در فضای m بعدی V_2 که برای آنها حداقل یک بردار مانند $\mathbf{x}$ در فضای n بعدی V_1 وجود دارد، که رابطه $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ را برآورده سازد و آن را با نماد $R(A)$ نشان می دهند.

$$\boxed{R(A)=\left\{\mathbf{b}\in V_2 \;\middle|\; \exists \mathbf{x}\in V_1 \rightarrow A\mathbf{x}=\mathbf{b}\right\}}$$

- می توان نشان داد که این فضای گستره یک زیر فضا از فضای m بعدی V_2 است.

- مفهوم رتبه در یک ماتریس

- رتبه (Rank) یک ماتریس مانند A برابر با ماکزیمم تعداد ستون های (یا سطرهای) مستقل خطی در آن ماتریس است، که با نماد زیر نشان داده می شود.

$$\boxed{\operatorname{rank}(A)}$$

- از آنجائیکه $R(A)$ یک فضای خطی است، بُعد آن برابر با ماکزیمم تعداد بردارهای مستقل خطی در $R(A)$ می باشد.

- با توجه به این نکته رتبه یک ماتریس معادل با بُعد فضای گستره آن ماتریس است.

پس

فضای گستره ماتریس A کلیه ترکیبهای خطی ممکن کلیه ستون های A است.

- <u>مثال ۱۳</u>
  - فضای گستره و رتبه ماتریس زیر را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & -7 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & -9 & 5 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

از آنجائیکه ستون های سوم و پنجم با ستون های اول، دوم و چهارم وابسته خطی می باشند، لذا $R(A)$ بصورت زیر تعریف می شود،

$$R(A) = sp\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$$

لذا $R(A)$ برابر است با تمامی ترکیبهای خطی ستون های اول، دوم و چهارم .

از طرفی چون ماتریس سه ستون مستقل خطی دارد، لذا $\operatorname{rank}(A) = 3$ است.

- مفهوم فضای پوچی در یک ماتریس

- فضای پوچی (Null Space) یک نگاشت خطی مانند A مجموعه ای است شامل کلیه بردارهای $\mathbf{x}_{n\times 1}$ که رابطه $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ را برآورده سازد. فضای پوچی با نماد $N(A)$ نشان داده می شود.

$$\boxed{N(A)=\{\forall \mathbf{x}\in V_1 \rightarrow A\mathbf{x}=\mathbf{0}\}}$$

- بُعد فضای پوچی را پوچی (Nullity) آن ماتریس می نامند.

$$\boxed{\text{nullity}(A)}$$

- فضای پوچی $N(A)$ مجموعه تمامی پاسخهای معادله $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ است.

- اگر تنها پاسخ معادله $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ همان پاسخ بدیهی (بردار صفر) باشد، بنابراین رتبه ماتریس A کامل است.

- فضای پوچی، یک زیر فضا از فضای V_1 است، در حالیکه فضای گستره، یک زیر فضا از فضای V_2 می باشد.

- <u>مثال ۱۴</u>
  - فضای پوچی و پوچی ماتریس زیر را بدست آورید.

$$\boxed{A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -5 & 1 & 5\\ 1 & 4 & -7 & 3 & -2\\ 1 & 5 & -9 & 5 & -9\\ 0 & 3 & -6 & 2 & -1\end{bmatrix}}$$

همانطور که گفته شد رتبه این ماتریس برابر ۳ می باشد.

از معادله $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ می توان نوشت.

$$A\mathbf{x}=x_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}3\\4\\5\\3\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-5\\-7\\-9\\-6\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}1\\3\\5\\2\end{bmatrix}+x_5\begin{bmatrix}5\\-2\\-9\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x}=x_1\mathbf{u}_1+x_2\mathbf{u}_2+x_3\mathbf{u}_3+x_4\mathbf{u}_4+x_5\mathbf{u}_5=\mathbf{0}$$

بردارهای مربوط به ستون های سوم و پنجم وابسته خطی هستند، و می توان آنها را بصورت یک ترکیب خطی از سه بردار ستونی دیگر نوشت.

$$\mathbf{u}_3 = (1)\mathbf{u}_1 + (-2)\mathbf{u}_2 + (0)\mathbf{u}_4 \quad , \quad \mathbf{u}_5 = (1)\mathbf{u}_1 + (3)\mathbf{u}_2 + (-5)\mathbf{u}_4$$

با این کار معادلات به شکل زیر در می آیند.

$$A\mathbf{x} = (x_1 + x_3 + x_5)\mathbf{u}_1 + (x_2 - 2x_3 + 3x_5)\mathbf{u}_2 + (x_4 - 5x_5)\mathbf{u}_4 = \mathbf{0}$$

از آنجائیکه بردارهای $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4$ مستقل خطی هستند.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_5 = 0 \\ x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

تعداد این معادلات برابر با رتبه ماتریس A می باشد.

هر برداری که سه معادله بالا را برآورده سازد یک بردار متعلق به فضای پوچی ماتریس خواهد بود.

تعداد بردارهایی که بدین ترتیب می توان انتخاب کرد نامحدود است، لیکن تعداد بردارهای مستقل خطی برابر با بُعد فضای پوچی می باشد.

بطور مثال دو بردار زیر مستقل خطی هستند و سه معادله بالا را بر آورده می کنند

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{-2}{5} \\ -3 \\ \frac{-3}{5} \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-3}{5} \\ -2 \\ \frac{-2}{5} \end{bmatrix}$$

بنابراین هر پاسخ معادله $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ باید به اسپن این دو بردار تعلق داشته باشد،
به عبارتی، این دو بردار یک پایه برای $N(A)$ تشکیل می دهند و پوچی برابر ۲
می باشد.

- <u>چند نکته مهم و کاربردی</u>

- از آنجائیکه در تئوری ماتریس ها، رتبه یک ماتریس بصورت بزرگترین درجه کلیه کهادهای غیر صفر آن ماتریس تعریف می شود، می توان نتیجه گرفت که رتبه یک ماتریس مربعی مانند $A_{n\times n}$ کامل است، یعنی $\operatorname{rank}(A)=n$ است، اگر و فقط اگر $|A|\neq 0$ یعنی، ماتریس $A_{n\times n}$ غیر منفرد باشد.

- اگر تمامی ستون های یک ماتریس مربعی مستقل خطی باشند، آن ماتریس غیر منفرد است.

- برای ماتریس های غیر مربعی مانند $A_{m\times n}$ می توان گفت،

$$\boxed{\operatorname{rank}(A)\le \min(m,n)}$$

- با توجه به مفاهیم فضای گستره و رتبه یک ماتریس، مسئله وجود جواب برای دستگاه معادلات خطی جبری $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ را می توان بشکل زیر بررسی کرد،

- برای ماتریس $A_{n\times n}$ و بردار $\mathbf{b}_{n\times 1}$ یک بردار $\mathbf{x}_{n\times 1}$ برای جواب وجود دارد که معادله $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ را برآورده سازد، اگر و فقط اگر $\mathbf{b}_{n\times 1}$ عضوی از $R(A)$ باشد یا $\operatorname{rank}(A)=n$ باشد.

- برای ماتریس $A_{n\times n}$ می توان نوشت،

$$\boxed{\mathrm{rank}(A)+\mathrm{nullity}(A)=n}$$

- اگر ماتریس $A_{n\times n}$ غیرمنفرد باشد، رتبه آن برابر بوده n و $\mathrm{nullity}(A)=0$ خواهد بود، لذا تنها پاسخ معادله $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ همان پاسخ بدیهی بردار صفر می شود.

- برای ماتریس های $A_{m\times n}$ و $B_{n\times p}$ نامساوی زیر بر قرار است،

$$\boxed{\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)-n\leq \mathrm{rank}(AB)\leq \min\left(\mathrm{rank}(A),\mathrm{rank}(B)\right)}$$

این رابطه به *نامساوی سیلوستر* معروف است.

- در واقع با این نامساوی یک کران بالا و یک کران پایین برای رتبه ماتریس AB بدست می آوریم و ارتباط بین رتبه های $A_{m\times n}$ و $B_{n\times p}$ و رتبه ماتریس حاصلضرب آنها را درک می کنیم.

- اگر ماتریس $A_{m\times n}$ را داشته باشیم، آنگاه برای هر ماتریس غیر منفرد مانند $B_{n\times n}$ و $C_{m\times m}$ خواهیم داشت،

$$\boxed{\text{rank}(AB) = \text{rank}(A) \quad , \quad \text{rank}(CA) = \text{rank}(A)}$$

- به عبارتی با ضرب کردن یک ماتریس غیرمنفرد رتبه ماتریس $A_{m\times n}$ تغییر نخواهد کرد.

- روابط کاربردی از ماتریس های بلوکی و دترمینان ها

- برای ماتریس های $A_{n\times n}$ ، $B_{n\times m}$ ، $C_{m\times n}$ و $D_{m\times m}$ روابط زیر برقرار هستند.

- اگر $|A| \neq 0$ و $|D| \neq 0$ باشند،

$$\boxed{\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}}$$

- اگر $|A| \neq 0$ و $|D - CA^{-1}B| \neq 0$ باشند،

$$\boxed{\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}}$$

- اگر $|D| \neq 0$ و $|A - BD^{-1}C| \neq 0$ باشند،

$$\boxed{\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} & -(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} + D^{-1} \end{bmatrix}}$$

- برای ماتریس های $A_{n\times m}$، $B_{m\times n}$ روابط زیر برقرار هستند،

$$\boxed{|I_n + AB| = |I_m + BA|}$$

- اگر $m=1$ باشد،

$$\boxed{|I_n + AB| = 1 + BA}$$

- اگر $|I_n + AB| \neq 0$ باشد،

$$\boxed{(I_n + AB)^{-1} = I_n - A(I_m + BA)^{-1}B}$$

- لم معکوس سازي ماتریس **(Matrix Inversion Lemma)**
- برای ماتریس های $A_{n\times n}$، $B_{n\times m}$ ، $C_{m\times n}$ و $D_{m\times m}$ رابطه زیر برقرار است،

$$\boxed{(A+BDC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(D^{-1}+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}}$$

- اثبات:

$$(A+BDC)(A+BDC)^{-1} = (A+BDC)[A^{-1} - A^{-1}B(D^{-1}+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}]$$

$$\begin{aligned}
I &= (A+BDC)A^{-1} - (A+BDC)A^{-1}B(D^{-1}+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \\
&= I + BDCA^{-1} - (B+BDCA^{-1}B)(D^{-1}+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \\
&= I + BDCA^{-1} - BD(D^{-1}+CA^{-1}B)(D^{-1}+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \\
&= I + BDCA^{-1} - BDCA^{-1} = I
\end{aligned}$$

مقدار ویژه، بردار ویژه و معادله مشخصه

- چند جمله ای مشخصه و معادله مشخصه

- ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ را در نظر بگیرید، دترمینان زیر را چند جمله ای مشخصه ماتریس $A_{n\times n}$ می نامند.

Characteristic Polynomial $\boxed{|\lambda I_n - A|}$

که یک چند جمله ای مرتبه nام از λ می باشد.

- معادله مشخصه بدین صورت تعریف می شود،

- **Characteristic Equation** $\boxed{|\lambda I_n - A| = 0}$

• مقادیر ویژه (Eigenvalues)

• اگر دترمینان را $|\lambda I_n - A|$ بسط دهیم، معادله مشخصه بصورت زیر بیان می گردد،

$$\boxed{\begin{aligned}|\lambda I_n - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n = 0\end{aligned}}$$

• ریشه های معادله مشخصه را مقادیر ویژه ماتریس A می نامند، که به تعداد n تا هستند.

- چند نکته

- یک ماتریس $A_{n\times n}$ حقیقی لزوماً مقادیر ویژه حقیقی ندارد.

- لیکن برای یک ماتریس حقیقی $A_{n\times n}$، معادله مشخصه $\left|\lambda I_n - A\right| = 0$ یک چند جمله ای با ضرایب حقیقی است.

- بنابراین کلیه مقادیر ویژه مختلط باید بصورت جفتهای مزدوج باشند.

- به عبارتی اگر $\alpha + j\beta$ یک مقدار ویژه ماتریس A باشد، آنگاه $\alpha - j\beta$ نیز یک مقدار ویژه ماتریس A خواهد بود.

- اگر فرض کنیم که مقدار ویژه ماتریس A برابر λ_i و مقدار ویژه ماتریس A^{-1} برابر μ_i باشد، آنگاه می توان گفت،

$$\boxed{\mu_i = \lambda_i^{-1} \qquad , \qquad i = 1,2,\ldots,n}$$

- می توان ثابت کرد که برای ماتریس های مربعی $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ داریم،

$$\boxed{\left|\lambda I_n - AB\right| = \left|\lambda I_n - BA\right|}$$

حتی اگر $AB \neq BA$ باشد.

- بردا ویژه (Eigenvector)

- هر بردار غیر صفر مانند $\mathbf{x}_i$ که رابطه زیر را برآورده سازد، یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ_i ماتریس $A_{n\times n}$ نامیده می شود.

$$\boxed{A\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i}$$

- از آنجائیکه مؤلفه های بردار $\mathbf{x}_i$ از n معادله جبری همگن خطی با یک ضریب ثابت تعیین می گردند، لذا اگر $\mathbf{x}_i$ بردار یک بردار ویژه باشد، آنگاه برای هر اسکالر مخالف صفر مانند α ، حاصل $\alpha\mathbf{x}_i$ نیز یک بردار ویژه خواهد بود.

- اگر λ یک مقدار ویژه برای ماتریس A و بردار $\mathbf{x}$ بردار ویژه متناظر با آن باشد، در اینصورت λ^k نیز یک مقدار ویژه برای ماتریس A^k با بردار ویژه $\mathbf{x}$ متناظر خواهد بود.(k مقدار صحیح مثبت می باشد).

- برای ماتریس $A_{n\times n}$ با مقادیر ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ دترمینان بصورت زیر است،

$$\boxed{|A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n}$$

- اگ• اگر ماتریس $A_{n\times n}$ یک مقدار ویژه تکراری از مرتبه k داشته باشد، آنگاه حداقل مه یک و حداکثر k بردار ویژه مستقل خطی متناظر با این مقدار ویژه تکراری وجود خواهد داشت.

- توابع ماتریسی و قضیه کیلی- هامیلتون

- ساده ترین تابع یک ماتریس مربعی توانهای آن می باشد. ماتریس A^n را می توان بصورتn بار حاصلضرب ماتریس A در خودش تعریف کرد.

- در حالت کلی یک چند جمله ای ماتریسی از یک ماتریس مربع بدین صورت نوشته می شود،

- سری بینهایت تابع نمایی ماتریسی e^A بصورت زیر می باشد،

که

$$
\boxed{e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}A^i}
$$

- چ [illegible] عوامل مختلف تجزیه کرد.

- همانند متغیرهای اسکالر، سری بینهایت برای یک متغیر ماتریس A بصورت زیر تعریف می شود،

$$
\boxed{f(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i A^i}
$$

- یکی از مهمترین قضایای تحلیل ماتریس، که در زمینه های مختلف ریاضی و مهندسی کاربرد فراوان دارد قضیه کیلی- هامیلتون **(Cayley-Hamilton)** است.

- قضیه: هر ماتریس مربعی مانند در معادله مشخصه خود صدق می کند.

$$|\lambda I - A| = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$$

$$\boxed{\mathbf{0} = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_{n-1} A^{n-1} + A^n}$$

تمرین سری اول :

تمرینات فصل ۱ را در گروههای ۶ نفره انجام دهید.

موفق باشید