## تعداد صفرهای انتقال (محدود و نامحدود)

با توجه به تعریف صفر انتقال (برای ماتریس های تابع تبدیل مربع) می توان گفت که تقریباً برای اکثر ماتریس های تابع تبدیل غیرمربع، صفر انتقال وجود ندارد. چرا که اصولاً وجود یک صفر انتقال به این معنی است که چندین کهاد با بالاترین رتبهٔ عادی ممکن، به طور همزمان در یک نقطه از صفحهٔ مختلط، ویژه شوند (یعنی دترمینان کهادها صفر گردد)

مثال: برای ماتریس تابع تبدیل مقابل

$$G(s)=\begin{bmatrix}\frac{s+5}{s+1} & \frac{2s+2}{s+6}\end{bmatrix}$$

آیا صفر انتقال وجود دارد؟

حل: رتبهٔ عادی $G(s)$ برابر یک است و بازاء هیچ $s$ای رتبهٔ عادی آن کم نخواهد شد و در ضمن بازاء هیچ $s$ای به طور همزمان کهادهای مرتبه ۱ صفر نمی شوند.

قضیه: اگر $G(s)$ مربعی باشد آنگاه تعداد صفرها و قطب های آن با در نظر گرفتن قطب ها و صفرهای در بی نهایت با هم برابرند.

اثبات:

ماتریس تابع تبدیل سیستم را به صورت مقابل در نظر می گیریم

$$G(s)=\left[g_{ij}(s)\right]_{l\times l}$$

جهت تعیین صفر و قطب در حالت کلی به شکل زیر عمل می گردد

$$|G(s)|=\frac{k\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-P_i)}\qquad Z(s)=\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)\ ,\ P(s)=\prod_{i=1}^{n}(s-P_i)$$

اگر به جای $s$ مقدار $\frac{1}{\lambda}$ قرار گیرد.

$$Z\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{\lambda}-z_i\right)=\lambda^{-m}\prod_{i=1}^{m}(1-\lambda z_i)$$

$$P\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\lambda^{-n}\prod_{i=1}^{n}(1-\lambda P_i)\Rightarrow \det G\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\frac{k\lambda^{n-m}\prod_{i=1}^{m}(1-\lambda z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(1-\lambda P_i)}$$

بنابراین اگر تعریف کنیم

$$H(\lambda)=G(1/\lambda)$$

$$\det[H(\lambda)]=\det[G(1/\lambda)]$$

$$\det[H(\lambda)]=\frac{K\lambda^{n-m}\prod_{i=1}^{m}(1-\lambda z_i)}{\prod_{i=1}^{m}(1-\lambda p_i)}$$

نظر به اینکه معمولاً درجه مخرج دترمینان ماتریس تابع تبدیل $(n)$ بزرگتر از درجه صورت دترمینان ماتریس تابع تبدیل $(m)$ است. پس $n-m>0$

رابطه فوق نشان می دهد که $\det(H(\lambda))$ به تعداد $n-m$ صفر در مبداء دارد

و این یعنی آنکه $\det(G(s))$ به تعداد $n-m$ صفر در بی نهایت دارد.

$G(s)$ تعداد قطبهای $= n$

$G(s)$ تعداد صفرهای $=$ تعداد صفرهای معین $+$ تعداد صفرهای در بی نهایت

$= \quad m + n-m = n$

بنابراین قضیه ثابت شد.

## تعیین تعداد صفرهای نامحدود از روی فضای حالت و تعیین پارامترهای مارکوف

فرض کنید برای ماتریس تابع تبدیل مربع $m\times m$ یک تحقق می نیمال با بعد $n$ ($n$ متغیر حالت) به صورت $\{A,B,C,D\}$ ارائه شده باشد

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$$

عبارت فوق را حول صفر در بی نهایت $s=\infty$ با بسط لورانت ارائه می دهیم.

$$G(s)=D+\frac{CB}{s}+\frac{CAB}{s^2}+\frac{CA^2B}{s^3}+\cdots\cdots \qquad |s|\to\infty$$

با توجه به تعریف $H(\lambda)$ که برابر بود با $G(1/\lambda)$ پس

$$H(\lambda)=D+\lambda CB+\lambda^2 CAB+\lambda^3 CA^2B+\cdots\cdots \qquad |\lambda|\to 0$$

$$H(0)=D$$

---

تذکر ، از نمایش فضای حالت سیستم‌های SISO بیاد داریم که هرگاه $D$ برابر صفر می‌گردید یعنی آنکه سیستم اکیداً سره می‌بود و اگر $D\neq 0$ می‌شد یعنی آنکه سیستم سره است. (درجه صورت و مخرج تابع تبدیل یکی بوده، پس تعداد صفر در بی‌نهایت صفر است)

در بحث فوق نیز اگر $D=0$ باشد آنگاه خواهیم گفت که $G(s)$ حداکثر $n-m$ صفر محدود و حداقل $m$ صفر در بی‌نهایت خواهد داشت

و به طور کلی اگر رتبه $D$ کمتر از $m$ بوده و آن را برابر $\mu$ تعریف کنیم، آنگاه خواهیم گفت $H(\lambda)$ حداقل $m-\mu$ صفر در $\lambda=0$ و یا $G(s)$ حداقل $m-\mu$ صفر در بی‌نهایت دارد. و اگر رتبه $D$ همان $m$ گردد $(\mu=m)$ بنابراین رتبه‌ی $G(s)$ در بی‌نهایت کاهش نیافته و یا به عبارتی صفر انتقال در بی‌نهایت نداریم

تعیین دقیق تعداد صفرهای نامحدود توسط پارامترهای مارکوف

---

توسط یک الگوریتم بسیار پیچیده می‌توان توسط پارامترهای مارکوف، تعداد دقیق صفرهای انتقال در بی‌نهایت را تعیین کرد.
در اینجا تنها نتیجه نهایی بیان می‌گردد.

اگر $\text{Rank}\{CB\}=n \Longrightarrow$ تعداد صفر محدود $= n-m$

به طور دقیق

اگر $\text{Rank}\{CB\}=m-d \Longrightarrow$ حداکثر صفر محدود $= n-m+d$

مثال : برای ماتریس تابع تبدیل مقابل تعداد صفرهای نامحدود را بیابید.

$$G(S)=\begin{bmatrix} \frac{1}{S+1} & \frac{2}{S+3} \\ \frac{1}{S+1} & \frac{1}{S+1} \end{bmatrix}$$

صفر انتقال محدود : $\boxed{S=1}$

قطب های محدود : $S=-1\ ,\ S=-1\ ,\ S=-3$

بنابراین باید دو صفر در بی‌نهایت موجود باشد.

تعداد صفرهای انتقال را (در بی نهایت) از دو راه دیگر مورد بررسی قرار می دهیم

۱) استفاده از سری لوران $G(s)$

$$G(s)=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}+\frac{1}{s}\begin{bmatrix}-3&-2\\-1&1\end{bmatrix}+\frac{1}{s^2}\begin{bmatrix}11&-6\\11&-1\end{bmatrix}+\cdots$$

بنابراین $G(s)$ حداکثر $n-m$ صفر محدود و حداقل $m$ صفر در بی نهایت دارد $\Leftarrow$ $\Rightarrow D=0$

$2 =$ حداقل صفر در بی نهایت

۲) استفاده از پارامترهای مارکوف

نخست باید فضای حالت را داشته باشیم

$$A=\begin{bmatrix}1&-8&-8\\1&-5&-4\\0&0&-1\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\\-1&1\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$Rank\{CB\}=2\equiv 2-d \Rightarrow d=0$$

حداکثر صفر محدود $= n-m = 3-2=1 \Rightarrow$ $\boxed{\text{تعداد صفر نامحدود} \equiv 2}$

## جابجایی صفرهای انتقال

موقعیت صفرهای انتقال در یک سیستم عملی علاوه بر توپولوژی دینامیکی سیستم به موقعیت سنسورها و محرک ها شدیداً وابسته است. معمولاً موقعیت سنسورها و محرک ها از قبل مشخص بوده و غیر قابل تغییر هستند لذا موقعیت صفرهای انتقال ظاهراً غیر قابل تغییر بوده و حتی نمی توان توسط جبران سازی فیدبک آن ها را تغییر داد.

اما می توان توسط روش های مخصوص صفرهای انتقال را جابجایی کرد.

قبل از پرداختن به این مورد، چند قضیه را مورد مطالعه قرار می دهیم.

قضیه: صفرهای انتقال یک سیستم چند متغیره تحت فیدبک حالت و خروجی تغییرناپذیر هستند.

## اثبات - قسمت اول (فیدبک حالت)

برای سیستمی با فضای حالت $(A, B, C)$ و فیدبک حالت $u = -Kx + r$

ماتریس رزنبراک سیستم به قرار زیر در خواهد آمد.

$$M_1(s) = \begin{bmatrix} sI - A + BK & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ K & I \end{bmatrix}$$

$$= M(s) \begin{bmatrix} I & 0 \\ K & I \end{bmatrix}$$

ماتریس رزنبراک سیستم اولیه بدون فیدبک حالت

بنابراین $|M_1(s)| = |M(s)|$

قبلاً گفته شد که صفرهای انتقال سیستم از روی عبارت $|M(s)| = 0$ تعیین می‌گردد لذا نتیجه گرفته می‌شود که صفرهای انتقال سیستم تحت تأثیر فیدبک حالت تغییر نمی‌کنند.

## اثبات - قسمت دوم (فیدبک خروجی)

در این حالت سیگنال فیدبک را $Fy$ تعریف کرده و برای ورودی فضای حالت داریم.

$$u = Fy + r$$

در این حالت

$$M_2(s) = \begin{bmatrix} sI - A + BFC & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{M(s)} \begin{bmatrix} I & 0 \\ FC & I \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow |M_2(s)| = |M(s)|$ بنابراین مجدداً صفرهای انتقال تغییر نمی‌کنند