مفهوم صفرهای دکوپله ورودی و خروجی از روی ماتریس روزنبراک

برای یک سیستم چند ورودی چند خروجی ماتریس روزنبراک سیستم به شکل زیر درآمده است

$$M(s)=\begin{bmatrix} P(s) & Q(s) \\ -R(s) & W(s) \end{bmatrix}$$

که در نتیجه ماتریس تابع تبدیل سیستم به شکل زیر خواهد بود

$$G(s)=R(s)P^{-1}(s)Q(s)+W(s)$$

اگر برای $P(s)$ و $Q(s)$ بزرگترین عامل مشترک از چپ را $L(s)$ بنامیم آنگاه

$$P(s)=L(s)\bar{P}(s)$$

$$Q(s)=L(s)\bar{Q}(s)$$

اگر دترمینال $L(s)$ چند جمله‌ای غیرصفری از s باشد، آنگاه ریشه‌های $|L(s)|=0$ را صفرهای دکوپله ورودی یا $i.d.z$ می‌نامند.

چون $G(s)$ با وجود عامل مشترک $L(s)$ به شکل جدید زیر درمی‌آید

$$G(s)=R(s)\bar{P}^{-1}(s)\bar{Q}(s)+W(s)$$

بنابراین هر $i.dz$ در تشکیل دادن $G(s)$ حذف خواهد شد.

صفر دکوپله خروجی

با توجه به بحث فوق اگر $P(s)$ و $R(s)$ به صورت زیر قابل نوشتن باشند

$$P(s)=\bar{P}(s)D(s) \quad \text{و} \quad R(s)=\bar{R}(s)D(s)$$

آنگاه با فرض ناویژه بودن $D(s)$، داریم

$$G(s)=\bar{R}(s)\bar{P}^{-1}(s)Q(s)+W(s)$$

بنابراین ریشه‌های $|D(s)|=0$ را صفرهای دکوپله خروجی یا $o.d.z$ می‌گویند. و هر $o.d.z$ نیز در تشکیل دادن $G(s)$ حذف خواهد شد.

نکته: برای هر دو نمایش جدید $G(s)$ (با حذف $i.d.z$ ها و $o.d.z$ ها) مرتبه‌ی تابع تبدیل $G(s)$ نسبت به حالت اول کاهش یافته و به عبارتی حذف صفر و قطب رخ داده است.

نکته: اگر مجموعه i.d.z ها را با $\{\beta_i\}$ و مجموعه o.d.z ها را با $\{\gamma_i\}$ نمایش دهیم، آنگاه مجموعه‌ای که معرف عوامل مشترک بین i.d.z ها و o.d.z ها است را با $\{\delta_i\}$ نشان داده و آن‌ها را صفرهای دکوپله ورودی/خروجی i.o.d.z می‌نامیم.

نکته: با توجه به تعریف i.d.z می‌توان گفت i.d.z صفر دکوپلای است که بازای آن $[P(s_0) \quad Q(s_0)]$ دارای کاهش رتبه خواهد شد.

نکته: با توجه به تعریف o.d.z می‌توان گفت که s_0، صفر دکوپله‌ی خروجی است اگر $[P^T(s_0) \quad R^T(s)]$ دارای کاهش رتبه گردد.

مثال: ماتریس سیستم زیر برای سیستمی به شکل رو به رو است، i.d.z را بیابید.

$$M(s)=\left[\begin{array}{cc|c} s+1 & 0 & 1 \\ -s(s+1) & s+2 & 2 \\ \hline -1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

این ماتریس سیستم یک i.d.z در -2 دارد چراکه،

$$\begin{bmatrix} P(-2) & Q(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ترکیب عادی $P(s)$, $Q(s)$ باید رتبه ۲ باشد (حداکثر رتبه) اما بازای $s=-2$، رتبه‌ی $[P(s) \quad Q(s)]$ برابر یک است.

مثال: ماتریس سیستم مقابل را در نظر گرفته

$$M(s)=\left[\begin{array}{cc|c} s(s+1) & 0 & s \\ 0 & s(s+2) & s \\ \hline -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

- صفرهای دکوپله ورودی
- صفرهای دکوپله خروجی
- صفرهای دکوپله ورودی/خروجی

را بیابید

حل: با دقت در فرم ظاهری $P(s)$ و $Q(s)$ میتوان عامل مشترک $L(s)$ را به صورت زیر در نظر گرفت

$$, \; L(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

$$P(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} \quad , \quad Q(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|L(s)| = s^2 \rightarrow \begin{cases} s = 0 \\ s = 0 \end{cases} \quad \text{ریشه‌های } |L(s)| = 0$$

بنابراین $\beta_i = \{0, 0\}$ صفرهای دکوپله ورودی سیستم هستند.

✓ تعیین صفرهای دکوپله خروجی

با درنظر گرفتن ترکیب $[P^T(s) \;\; R^T(s)]$ داریم

$$\begin{bmatrix} s(s+1) & 0 & -1 \\ 0 & s(s+2) & -1 \end{bmatrix}$$

ملاحظه می‌گردد که بازاء $s = 0$، رتبه‌ی $[P^T(s) \;\; R^T(s)]$ کاهش می‌یابد

بنابراین $\gamma_i = \{0\}$ تک صفر دکوپله خروجی است

صفرهای دکوپله ورودی–خروجی

در مثال فوق $\delta_i = \{0\}$ صفری است که هم دکوپله ورودی و هم دکوپله خروجی است

مثال: برای ماتریس رزنبراک سیستمی به شکل مقابل

صفرهای دکوپله ورودی، خروجی و ورودی/خروجی را بیابید

$$M(s) = \left[\begin{array}{cc|cc} s^2+3s+2 & s+2 & 0 & 3s+6 \\ s+1 & s+2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & s+2 & 0 & 0 \\ s+1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

کاملاً واضح است بازاء $s = -2$ رتبه‌ی $[P(s) \;\; Q(s)]$ تک خواهد شد پس $\beta_i = \{2\}$ است.

همچنین $\{-1, -2\} = \gamma_i$ می باشد لذا 2- تک $i.o.dz$ است.

مثال: ماتریس سیستم زیر که یک سیستم مطابق روبرو است

الف) قطب های سیستم را بیابید

ب) صفرهای دکوپله ورودی و خروجی و ورودی/خروجی را بیابید

ج) ماتریس تابع تبدیل سیستم چند قطب دارد؟

$$M(s)=\left[\begin{array}{cccc|c} I_2 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & s^2(s+1) & s(s+2) & & -s \\ 0 & 0 & s+2 & & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & & 0 \end{array}\right]$$

حل قسمت الف

$$|P(s)|=0 \rightarrow s^2(s+1)(s+2)=0$$

قطب های سیستم $s=0 ,\ s=0 ,\ s=-1 ,\ s=-2$

ب) صفرهای دکوپله ورودی

$$P(s)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s^2(s+1) & s(s+2) \\ 0 & 0 & 0 & s+2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad Q(s)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -s \\ 1 \end{bmatrix}$$

کاملاً مشخص است که بازاء $s=0$، یک صفر دکوپله ورودی داریم

چون یک ردیف از ماتریس کاملاً صفر می گردد

$$\{\beta_i\}=\{0\}$$

صفر دکوپله خروجی

$$R(s)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ترکیب $[P^T(s)\ \ R^T(s)]$ را می یابیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s^2(s+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s(s+2) & s+2 & -1 \end{bmatrix}$$

برای این ترکیب کاملاً واضح است که به ازاء $s=0$ و $s=0$ و $s=-1$ یک ردیف کاملاً صفر شده و کاهش رتبه خواهیم داشت

$$z_i=\{0,0,-1\}$$

بنابراین صفرها، دکوپله خروجی

نکته مهم: توجه داشته باشید که در ردیف سوم تنها یک جمله دارای s^2 می باشد و این جمله در دو مقدار $s=0$ برابر صفر می گردد و ردیف را کاملاً صفر می کند

صفر دکوپله ورودی/خروجی عبارتست از $s=0$

اگر حذف صفر و قطب را انجام دهیم بنابراین تابع تبدیل سیستم تنها دارای یک قطب و در $s=-2$ خواهد بود

کنترل پذیری خروجی و کنترل پذیری تابعی

کنترل پذیری خروجی: سیستم را کنترل پذیر خروجی گویند اگر بتوان با ورودی مناسب $u(t)$، هر بردار خروجی اولیه $y(t_0)$ را به هر خروجی نهائی $y(T)$ در زمان محدود منتقل نمود

شرط کنترل پذیری خروجی

$$\mathcal{Q}_{op}=[CB \quad CAB \quad \dots \quad CA^{n-1}B \quad D]$$

داشتن رتبه ی کامل برای ماتریس $\mathcal{Q}_{op}$

نکته: اگر C دارای رتبه ی کامل باشد آنگاه کنترل پذیری خروجی، کنترل پذیری حالت را نتیجه می دهد.

کنترل پذیری تابعی

اگر در بحث کنترل پذیری خروجی بتوان بردار خروجی را از لحظه t_0 طی یک مسیر از پیش تعیین شده (ورودی مرجع) به خروجی مطلوب $y(T)$ رساند آنگاه سیستم را کنترل پذیر تابعی گوییم.
یا به عبارت دیگر عمل ردیابی در این سیستم بخوبی صورت می پذیرد

تعریف ریاضی کنترل پذیر تابعی

سیستم با ماتریس تابع تبدیل $G(s)$ با m ورودی و l خروجی را کنترل پذیر تابعی می گوییم اگر $l \leq m$ و $Rank\{G(s)\}=l$ باشد

اثبات

با ویژگی فوق، حتماً خروجی سیستم می تواند ورودی مرجع دلخواهی را تعقیب کند چرا که اگر خروجی مطلوب را $Y_r(s)$ نامیده و $U(s)$ را به صورت زیر انتخاب کنیم

$$U(s)=G^T(s)\left[G(s)G^T(s)\right]^{-1}Y_r(s)$$

آنگاه چون داریم ←

$$Y(s)=G(s)U(s)$$

$$=\underbrace{G(s)G^T(s)}\underbrace{\left[G(s)G^T(s)\right]^{-1}}Y_r(s)$$

$$\Rightarrow \boxed{Y(s)=Y_r(s)}$$

توجه: $G(s)G^T(s)$ یک ماتریس مربع $l\times l$ وارون پذیر خواهد بود.

نتیجه: اگر رتبهٔ $G(s)$ از l (تعداد خروجی ها) کمتر باشد آنگاه خروجی سیستم مطمئناً نمی تواند مسیر دلخواهی را تعقیب کند.

* از نظر فیزیکی نیز این مسئله کاملاً روشن است که هرگز نمی توان یک سیستم با دو خروجی را مثلاً با یک خروجی کنترل نمود.

نکته: درحالت کلی کنترل پذیری تابعی بر کنترل پذیری حالت دلالت نمی کند و بالعکس

مثال: سیستم توصیف شده در نمایش روبرو را در نظر بگیرید

$$G(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+3} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

کنترل پذیری تابعی و کنترل پذیری حالت آن را مورد بررسی قرار دهید

حل: جهت تشخیص کنترل پذیری تابعی باید رتبه $G(s)$ را بدست آوریم و لازمه آن نخست تعیین $|G(s)|$ است

$$|G(s)|=\frac{-(s-1)}{(s+1)^2(s+2)}$$

این دترمینان تقریباً بازاء تمام s ها مخالف صفر است (بجز $s=1$)

پس میتوان گفت که رتبه ماتریس $G(s)$ ، ۲ است

ولذا کنترل پذیری تابعی قابل قبول است

تشخیص کنترل پذیری حالت

نخست باید فضای حالتی برای سیستم ارائه کرد. فضای پیشنهادی بصورت مقابل است

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}x$$

میتوان نشان داد که رتبه ماتریس کنترل پذیری حالت کامل نیست.

نظریه تحقق در سیستم های چند متغیره

عمده تحقق سیستم ها در فضای حالت می باشد، چرا که تحلیل سیستم به کمک این تحقق ها ساده تر می باشد

تعریف تحقق می نیمال

تحقق (A, B, C, D) از ماتریس تابع تبدیل $G(s)$ را می نیمال گویند اگر بعد ماتریس A (تعداد متغیرهای حالت) برای توصیف سیستم حداقل مقدار ممکن باشد

نکته: یک تحقق از $G(s)$ می نیمال است اگر و فقط اگر کاملاً کنترل پذیر و رویت پذیر باشد.

نکته: در سیستمهای تک ورودی - تک خروجی تحقق می نیمال است که در تشکیل تابع تبدیل حذف صفر و قطب صورت نپذیرد.

در صورت حذف قطب و صفر، قطب حذف شده متناظر با یک مود کنترل ناپذیر و یا رویت ناپذیر است.

اشاره ای به تحقق های کانونیکال در یک سیستم SISO

تحقق کانونیک کنترل پذیری و رویت پذیری - تحقق کانونیک کنترل کننده و رویت گر - تحقق جردن (قطری)

تحقق در سیستم های چند متغیره

الف) تحقق غیر می نیمال

این روش که از نظر تئوری بسیار سر راست است اما کاربرد عملی مناسبی نداشته و بایستی در انتها به کمک روش های مناسب کاهش مرتبه و حذف مودهای کنترل ناپذیر و رویت ناپذیر، تحقق می نیمال را ارائه نمود

تحقق غیر می نیمال

این نوع تحقق مستقیما از روی ماتریس تابع تبدیل سیستم بدست می آید. و همین دلیل به آن ها ، تحقق مستقیم نیز می گویند

تحقق کانونیک (همبسته) کنترل پذیر

فرض می کنیم که $G(s)$ به فرم زیر نوشته شود. $G(s)$ با بعد $l\times m$ معرفی می گردد.

$$G(s)=[g_1(s) \quad g_2(s) \;\ldots\ldots\; g_m(s)]$$

هر یک از جملات $g_j(s)$ ($j=1,\ldots,m$) یک بردار ستونی با l عضو است که کوچکترین مخرج مشترک عناصر ستون jام با عبارت $d^j(s)$ نشان داده می شود.

درجه $d^j(s)$ را با δ_j نشان داده و هر عنصر $g_{ij}(s)$ به شکل زیر فرض می گردد

$$g_{ij}(s)=\frac{\beta_1^{ij} s^{\delta_j-1}+\beta_2^{ij} s^{\delta_j-2}+\ldots\ldots+\beta_{\delta_j}^{ij}}{s^{\delta_j}+\alpha_1^j s^{\delta_j-1}+\ldots\ldots+\alpha_{\delta_j}^j}$$

یک تحقق کنترل پذیر در فرم همبسته مطابق نمایش زیر خواهد بود. این تحقق برای تنها عنصر $g_{ij}(s)$ نشان داده می شود

$$A_j=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ -\alpha_{\delta_j}^{ij} & -\alpha_{\delta_j-1}^{j} & \cdots & \cdots & -\alpha_1^j \end{bmatrix} \qquad b_j=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c_{ij}=\begin{bmatrix} \beta_{\delta_j}^{ij} & \beta_{\delta_j-1}^{ij} & \cdots\cdots & \beta_1^{ij} \end{bmatrix}$$

برای ماتریس تابع تبدیل $G(s)$ خواهیم داشت

$$A_c=\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & A_m \end{bmatrix} \qquad B_c=\begin{bmatrix} b_1 & 0 & & 0 \\ 0 & b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_m \end{bmatrix}$$

$$C_c=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{l1} & c_{l2} & \cdots & c_{lm} \end{bmatrix}$$

مثال: برای سیستم توصیف شده با ماتریس تابع تبدیل زیر تحقق کانونیک کنترل پذیر را ارائه کنید.

$$G(s)=\frac{1}{(s-1)^2(s+3)^2}\begin{bmatrix} (s+3)^2 & (s-1)(s+3) \\ -6(s-1) & (s-2)(s-1)^2 \end{bmatrix}$$

داریم

$$g_1(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s-1)^2} \\ \dfrac{-6}{(s-1)(s+3)^2} \end{bmatrix}=\frac{1}{(s-1)^2(s+3)^2}\begin{bmatrix} (s+3)^2 \\ -6(s-1) \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{s^4+4s^3-2s^2-12s+9}\begin{bmatrix} s^2+6s+9 \\ -6s+6 \end{bmatrix}$$

از این‌رو $\delta_1 = 4$. توجه کنید که ماتریس‌های حالت و ورودی تحقق‌های کنترل‌پذیر $g_{11}(s)$ و $g_{12}(s)$ یکسان هستند ولی ماتریس‌های خروجی آن‌ها تفاوت می‌کند. از $g_1(s)$، به‌دست می‌آوریم

$$A_{۱}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ -۹ & ۱۲ & ۲ & -۴ \end{bmatrix} \quad b_{۱}=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} c_{۱۱}=\left[\beta_{\delta_{۱}}^{۱۱}\right]^{T}=\begin{bmatrix} ۹ & ۶ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \\ c_{۲۱}=\left[\beta_{\delta_{۱}}^{۲۱}\right]^{T}=\begin{bmatrix} ۶ & -۶ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \end{array}$$

از $g_{۲}(s)$ نیز، به دست می‌آوریم

$$g_{۲}(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{۱}{(s-۱)(s+۳)} \\ \dfrac{s-۲}{(s+۳)^{۲}} \end{bmatrix}=\frac{۱}{(s-۱)(s+۳)^{۲}}\begin{bmatrix} s+۳ \\ s^{۲}-۳s+۲ \end{bmatrix}$$

از این‌رو $\delta_{۲}=۳$ و لذا

$$A_{۲}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۹ & -۳ & -۵ \end{bmatrix} \quad b_{۲}=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} c_{۱۲}=\left[\beta_{\delta_{۲}}^{۱۲}\right]^{T}=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \\ c_{۲۲}=\left[\beta_{\delta_{۲}}^{۲۲}\right]^{T}=\begin{bmatrix} ۲ & -۳ & ۱ \end{bmatrix} \end{array}$$

بنابرین، تحقق کامل کنترل‌پذیر از معادله (۴-۴-۳) به صورت زیر است

$$A_{c}=\left[\begin{array}{cccc:ccc} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & & & \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & & ۰ & \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & & & \\ -۹ & ۱۲ & ۲ & -۴ & & & \\ \hdashline & & & & ۰ & ۱ & ۰ \\ & ۰ & & & ۰ & ۰ & ۱ \\ & & & & ۹ & -۳ & -۵ \end{array}\right] \qquad B_{c}=\left[\begin{array}{c:c} ۰ & \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & \\ ۱ & \\ \hdashline & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ & ۱ \end{array}\right]$$

$$C_{c}=\left[\begin{array}{cccc:ccc} ۹ & ۶ & ۱ & ۰ & ۳ & ۱ & ۰ \\ ۶ & -۶ & ۰ & ۰ & ۲ & -۳ & ۱ \end{array}\right]$$

تحقق گیلبرت فضای حالت

این تحقق بسیار شبیه به فرم تحقق جردن است که در ادامه آن را در فرم مورد بررسی قرار می‌دهیم.

الف) اگر ماتریس تابع تبدیل سیستم فقط قطب‌های حقیقی غیرتکراری داشته باشد

فرض کنیم که نمایش فرم قطری سیستم به شکل (Λ, B_n, C_n, D) در اختیار است بنابراین داریم

$$G(s)=C_n(sI-\Lambda)^{-1}B_n+D$$

رابطه فوق را به شکل زیر نیز می‌توان نوشت.

$$G(s)=C_n\,\mathrm{diag}\left(\frac{1}{s-\lambda_1},\frac{1}{s-\lambda_2},\ldots,\frac{1}{s-\lambda_n}\right)B_n+D$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{G_k}{s-\lambda_k}+D$$

در رابطه فوق G_k یک ماتریس $l\times m$ بوده و از رابطه زیر بدست خواهد آمد.

$$G_k=C_{nk}\,b_{nk}^{T}$$

C_{nk} : k امین ستون از C_n | b_{nk} : k امین ردیف از b_n

به ماتریس G_k اصطلاحا ماتریس مانده $G(s)$ می‌گویند

این ماتریس را طبق رابطه زیر نیز می‌توان بدست آورد.

$$G_k=\lim_{s\to\lambda_k}(s-\lambda_k)G(s)$$

تعیین D : برای یافتن D نیز می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد.

$$D=\lim_{s\to\infty}G(s)$$

الگوریتم تحقق فضای گیلبرت با قطب های غیرتکراری حقیقی

۱- تعیین ماتریس D $\quad D=\lim_{s\to\infty} G(s)$

۲- تعیین G_k ها بازاء هر قطب حقیقی

$$G_k=\lim_{s\to\lambda_k}(s-\lambda_k)G(s)$$

هر G_k یک ماتریس $l\times m$ خواهد بود

۳- چون $G_k=c_{nk}b_{nk}^T$ لذا بردارهای c_{nk} و b_{nk} را بطور کاملاً اختیاری پیشنهاد می دهیم

نکته: چون c_{nk} و b_{nk} اختیاری است پس فضای حالت منحصر بفرد نمی باشد.

مثال : ماتریس تابع تبدیل زیر را درنظر بگیرید

$$G(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+1} & \frac{1}{s+4} \\ 0 & \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+4} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{2(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3)} & 0 \end{bmatrix}$$

فضای حالت فرم گیلبرت آنرا استخراج کنید.

حل :

قطب های این سیستم عبارتند از ۱-، ۲-، ۳- و ۴-

ابتدا ماتریس D را محاسبه می کنیم.

$$D=\lim_{s\to\infty} G(s)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_1 = \lim_{s\to -1}\left(s+1\right)G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{c_{n_1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}}_{b_{n_1}^T}$$

به طور مشابه

$$G_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}}_{c_{n_2}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{b_{n_2}^T} \quad \text{Pole } S=-2 \qquad G_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{c_{n_3}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{b_{n_3}^T} \quad \text{pole } S=-3 \qquad G_4 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{c_{n_4}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{b_{n_4}^T} \quad \text{pole } S=-4$$

بنابراین تحقق عبارت است از

$$\Lambda = \mathrm{diag}\left\{-1,-2,-3,-4\right\} \quad B_n = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، $s = -3$ یک قطب رؤیت‌ناپذیر سیستم است، با حذف این قطب یک تحقق مرتبه‌ی سوم و می‌نیمال به صورت زیر خواهیم داشت

$$\Lambda = \mathrm{diag}\left\{-1,-2,-4\right\} \quad B_n = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$