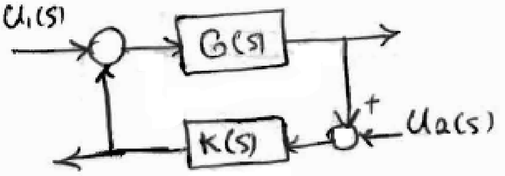


مثال: برای سیستمی با ساختار مقابل
$G(s)$ و $K(s)$ مطابق زیر تعریف شده اند

$$G(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s-1} & \frac{1}{s-1}\\ \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+1}\end{bmatrix},\quad K(s)=\begin{bmatrix}\frac{-2(s-1)}{s+1} & 1\\ \frac{s-1}{s+1} & -1\end{bmatrix}$$

با توجه به اینکه تابع تبدیل حلقه باز سیستم قطبی در $s=1$ دارد، در رابطه با پایداری داخلی بحث کنید.

حل: طبق قضیه مطرح شده داریم:

$$\det[I-G(s)K(s)]=\frac{(s+2)^2}{(s+1)}$$

بنابراین قسمت اول قضیه برآورده شده است، اما بررسی شرط دوم

$$[I-G(s)K(s)]^{-1}G(s)=\begin{bmatrix}\frac{s+1}{(s+2)(s-1)} & \frac{-s+1}{(s+2)(s-1)}\\ \frac{1}{s+2} & \frac{2}{s+2}\end{bmatrix}$$

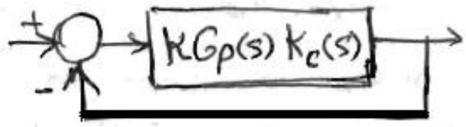
چون دارای قطب $s=1$ که همان قطب $G(s)$ است، می باشد پس تحلیلی نبوده و لذا سیستم پایداری داخلی ندارد.

چند نکته

۱) در بحث های فوق علامت فیدبک مثبت بوده است و چنانچه فیدبک علامتش عوض شود، تنها در علامت $K(s)$ و $G(s)$ تغییر علامتی مشاهده می گردد و ساختار کلی روابط تغییر نخواهد کرد.

۲) اگر طراح در مسیر طراحی بتواند تضمین کند که حذف صفر نیمراست صفحه رخ نخواهد داد. آن گاه استفاده از شرط (۲) لزومی ندارد

معیار پایداری نایکوئیست



فرض کنید سیستم حلقه بسته ای مطابق شکل روبرو در اختیار باشد.
که $G_p(s)$ ماتریس تابع تبدیل فرایند و $K_c(s)$ جبران ساز سیستم است
ساختار فوق به فرم خلاصه تر زیر پیشنهاد می گردد.

$L(s)=K\,G(s)$ و $\boxed{G(s)=G_p(s)K_c(s)}$

✓ فرض کنید که در ایجاد $L(s)$ هیچ حذف صفر و قطبی در نیمه راست صفحه s رخ نمی دهد و در ضمن شرایط زیر برقرار است.

الف) $K_c(s)$ پایدار نمائی است

ب) $\det[I-G_p(s)K_c(s)]$ هیچ صفری در نیمه راست صفحه s ندارد

ج) $[I-G_p(s)K_c(s)]^{-1}G_p(s)$ در قطب های ناپایدار $G_p(s)$ تحلیلی است

می دانیم که نمودار نایکوئیست به ازاء مسیر نایکوئیست تحلیلی Γ_s (نیمه راست صفحه s) که تحت تأثیر $L(s)$ نگاشت شده بدست می آید و طبق اصل آرگومان می توان تعداد قطب های سیستم حلقه بسته یا صفرهای $\Delta(s)=0$ را که در سمت راست صفحه s قرار دارند را بدست آورد. $Z=N+P$

اما بیان فوق برای سیستم های چند متغیره چگونه است.

روش کار

با توجه به بلوک دیاگرام فوق برای سیستم های چند متغیره، تعداد قطب های حلقه بسته سیستم که در سمت راست صفحه s قرار دارند برابر است با تعداد صفرهای $\det[I+KG(s)]$

مثال: برای یک سیستم چند متغیره داریم $KG(s)=\frac{K}{S+1}\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}$، $KG(s)$ تابع تبدیل حلقه و سیستم با فیدبک واحد است.

در رابطه با وضعیت قطب های حلقه بسته آن بازاء تغییرات K بحث کنید.

حل

$$\det[I+KG(s)] = \frac{S^2+(2+3K)S+K^2+3K+1}{(S+1)^2} = 0$$

چون عبارت صورت کسر فوق غیرخطی است پس برای تعیین حدود تغییرات K در تشخیص پایداری قدری مشکل وجود دارد.

یکی از نقاط ضعف اصلی در استفاده مستقیم از روش نایکوئیست، در سیستم های چند متغیره وجود عبارت های غیرخطی بر حسب K در $\det[I+KG(s)]$ است. چرا که در این حالت نمی توان بازاء تغییرات K در رابطه با وضعیت تعداد دورهای دترمینان $I+KG(s)$ حول مبداء بحث کرد.

راه حل:

به جای استفاده از تعیین تعداد دورهای $\det[I+KG(s)]$ حول مبداء به صورت زیر بحث می شود

اگر $\lambda_i(s)$ مقدار ویژه $G(s)$ باشد داریم

$$|\lambda_i(s)I-G(s)|=0$$

پس $K\lambda_i(s)$ هم مقدار ویژه $KG(s)$ است و در نتیجه $1+K\lambda_i(s)$ هم مقدار ویژه $I+KG(s)$ خواهد بود.

از طرفی می دانیم که دترمینان هر ماتریس برابر است با حاصل ضرب مقادیر ویژه آن، بنابراین

$$\det[I+KG(s)] = \prod_i (1+K\lambda_i(s))$$

و در نتیجه، تعداد دورهای گذشت یافته

$$\det[I+KG(s)]$$

حول مبداء یعنی

$$\Delta \arg[\det[I+KG(s)]]$$

$\Delta\arg$: به معنی تعداد دور خواهد بود

بنابراین با استفاده از رابطه؛

$$\det[I+KG(s)]=\prod_i (1+K\lambda_i(s))$$

$$\Delta \arg \det[I+KG(s)]=\sum_i \Delta \arg(1+K\lambda_i(s))$$

و چون $\lambda_i(s)$ ها اسکالر هستند، می‌توان پایداری حلقه بسته سیستم را با شمارش تعداد دورهای $1+K\lambda_i(s)$ حول مبداء یا تعداد دورهای $K\lambda_i(s)$ حول ۱- بازاء تمام i ها و جمع کردن آن‌ها تعیین نمود.

$\lambda_i(s)$ ها را مکان های مقدار ویژه می نامیم

نکته: تعداد مکان های ویژه در سیستم های مربعی برابر تعداد ورودی و خروجی است.

مثال: برای ماتریس تابع تبدیل مقابل مکان‌های ویژه را رسم کنید

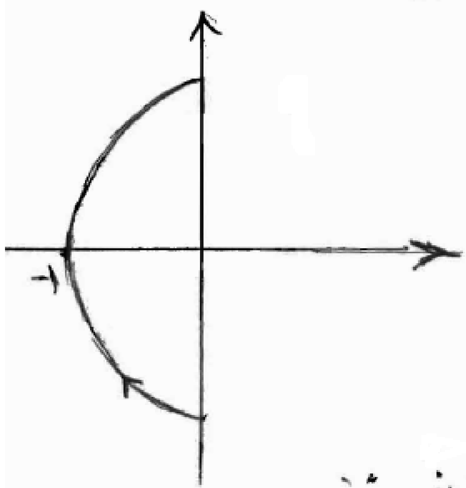
$$G(s)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{s-1}{s+1} & 0 \end{bmatrix}$$

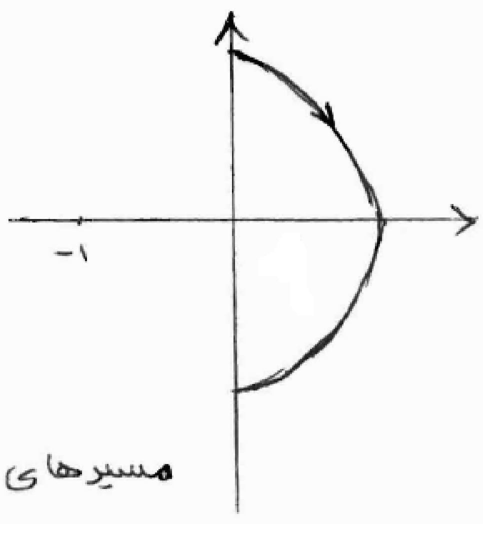
نخست مقادیر ویژه ماتریس تابع تبدیل را تعیین می‌کنیم.

$$|\lambda(s)I-G(s)|=\lambda^2(s)-\frac{s-1}{s+1}=0$$

$$\lambda_i(s)=\pm\sqrt{\frac{s-1}{s+1}} \qquad (i=1,2)$$

ملاحظه می‌گردد که $\lambda_i(s)$ تابع گویایی از s نیستند





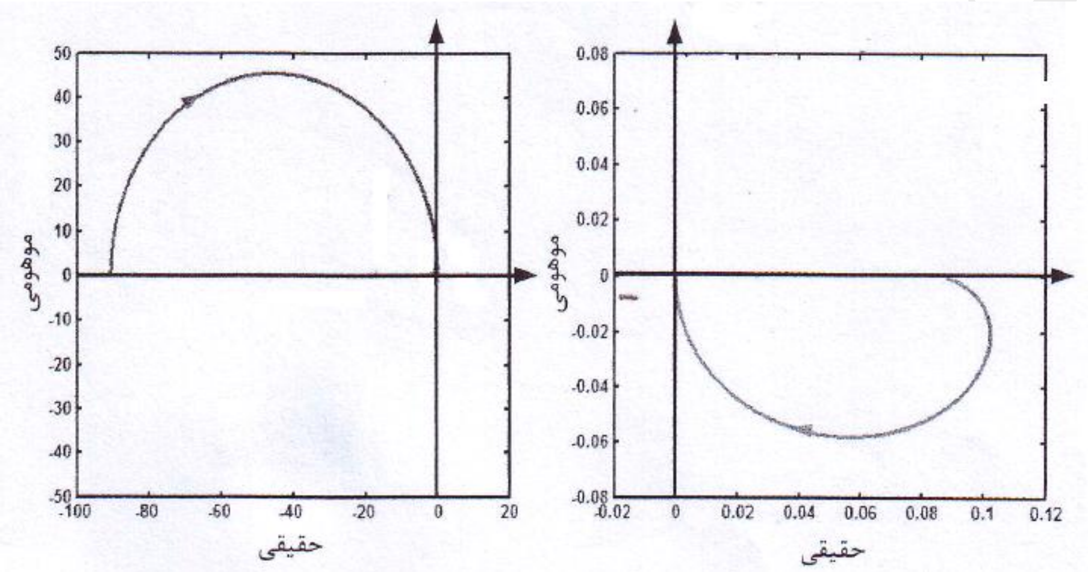
مسیرهای فوق بسته نیستند

مثال : ماتریس تابع تبدیل یک سیستم فیزیکی به صرت زیر داده شده است. مکان های ویژه آنرا ترسیم کنید.

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{0/03362}{s+0/3949} & \dfrac{1/03s}{\alpha(s)}\\[2ex] \dfrac{9/66\times10^{-4}s+1/17\times10^{-5}}{\alpha(s)} & \dfrac{-0/01141}{\alpha(s)}\end{bmatrix}$$

که در آن

$$\alpha(s)=s^{2}+0/395s+1/26\times10^{-4}$$



نکته : در هر ۲ مثال فوق، مکان مقادیر ویژه مسیر بسته نبوده و نمی‌توان تعداد دورها را حول مبداء حساب کرد. به همین دلیل باید با ارائه راه حل دیگری مشکل را مرتفع نمود.

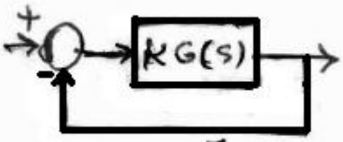
توضیح : معمولاً مکان مقادیر ویژهٔ غیرگویا به صورت مسیر بسته در نمی‌آیند

دیاگرام نایکوئیست تعمیم یافته

دیاگرام نایکوئیست تعمیم یافته درحقیقت تعمیم یافته همان بحث نایکوئیست در درس کنترل خطی است. این دیاگرام عبارتست از:
مجموعه مکان هایی که توسط مکان های مقادیر ویژه آن، به ازاء حرکت S روی Γ_s ایجاد می گردد

قضیه: اگر ماتریس تابع تبدیل گویای $G(s)$ (بدون حذف قطب و صفر نیمه راست) دارای تعداد P قطب ناپایدار باشد ← آنگاه سیستم حلقه بسته با تابع تبدیل حلقه $KG(s)$ پایدار است اگر و تنها اگر دیاگرام نایکویست تعمیم یافته آن در مجموع نقطه -1 را P بار در جهت خلاف عقربه ساعت دور بزند (با توجه به جهت Γ_s)

مثال: پایداری سیستم حلقه بسته شکل مقابل را بازای مقادیر مثبت و منفی K مورد بررسی قرار دهید.

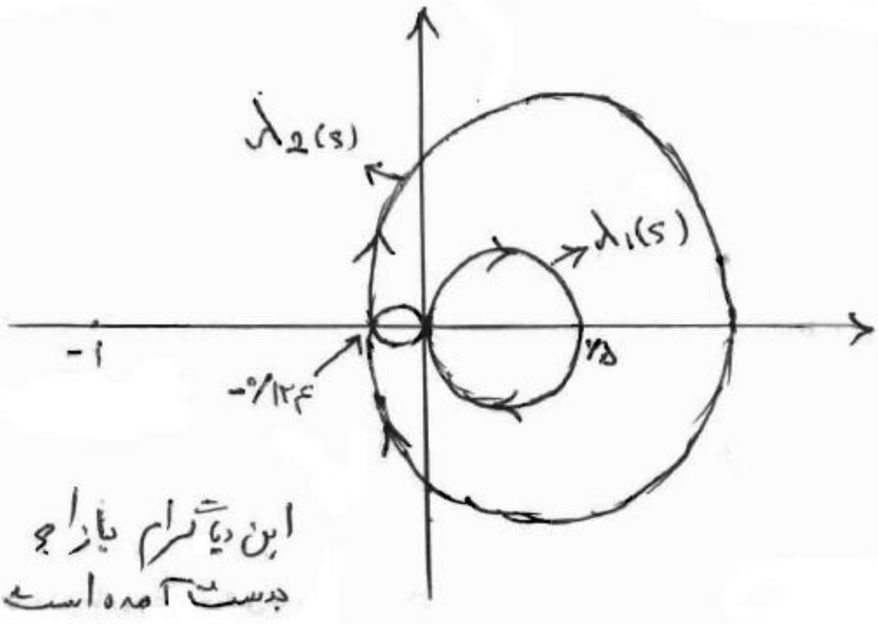


$$G(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{0.5(s+1)^2+1}{(s+1)^2} & \dfrac{-0.5(s-1)}{} \\ \dfrac{1}{(s-1)(s+1)^3} & 0 \end{bmatrix}$$

حل: نخست تعیین مقادیر ویژه

$$|\lambda(s)I-G(s)|=\left(\lambda(s)-\frac{0.5}{s+1}\right)\left(\lambda(s)-\frac{1}{(s+1)^3}\right)=$$

$$\lambda_1(s)=\frac{0.5}{s+1}\quad,\quad \lambda_2(s)=\frac{1}{(s+1)2}$$



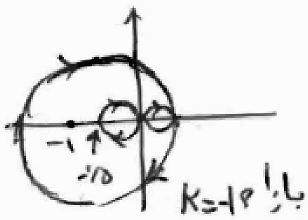
این دیاگرام بازای $K=1$ بدست آمده است

تعیین حدود پایداری

۱- بازاء $k=1$ ← $N=0$ ← $Z=0+1$
سیستم حلقه بسته ناپایدار

۲- اگر $k > \frac{1}{0/124}$ → $0/124k > 1$ ← $N=2$ ← $Z=3$ ، ۳ قطب حلقه بسته ناپایدار

۳- اگر $k<0$ شود شکل دیاگرام به صورت زیر در می آید



۱. بازاء $k=-1$ سیستم ناپایدار است

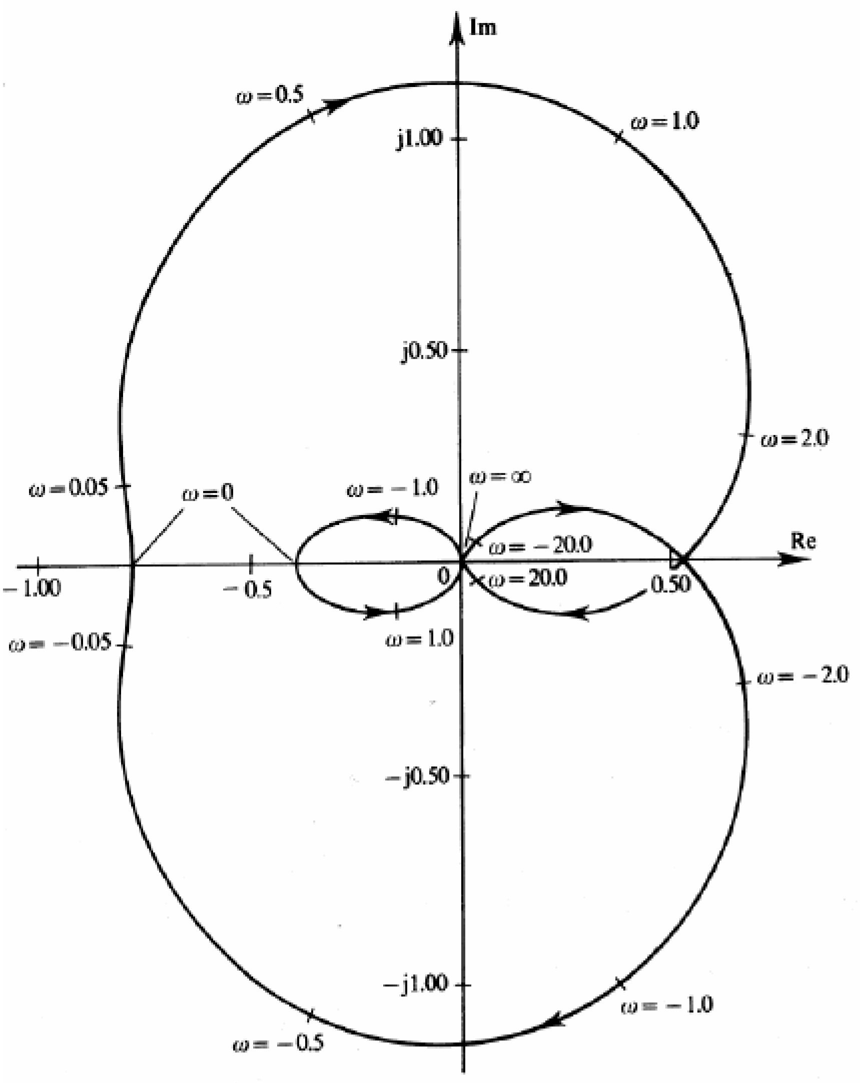
۲- اگر $k<-2$ گردد ← $N=2$ ← $Z=3$ ← سیستم ناپایدار

مثال :

ماتریس تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{k}{1.25(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s-1 & s \\ -6 & s-2 \end{bmatrix}$$

بسادگی می‌توان نشان داد که قطبهای $G(s)$ در 1- و 2- قرار دارند و لذا سیستم حلقه باز پایدار است (توجه کنید که قطبهای $G(s)$ را باید از صورت اسمیث ـ مک میلان آن تعیین کرد). بنابراین برای پایداری سیستم حلقه بسته فیدبک منفی باید چرخش در جهت خلاف عقربه ساعت نقطه بحرانی نداشته باشیم. با در نظر گرفتن $(-1/k,0)$ به عنوان نقطه بحرانی، تأثیر پارامتر k در $G(s)$ را بر روی پایداری حلقه بسته بررسی خواهیم کرد. با $k=1$ دیاگرام‌های نایکوئیست تعمیم یافته در شکل زیر رسم شده‌اند [1].



شرایط پایداری

(i) برای $-\infty<-1/k<-0.8$ ، چرخشی حول نقطه بحرانی ندارد و لذا سیستم حلقه بسته برای $0\le k<1.25$ پایدار است.

(ii) برای $-0.8<-1/k<-0.4$ ، یک چرخش حول نقطه بحرانی دارد و لذا سیستم حلقه بسته برای $1.25<k<2.5$ ناپایدار است.

(iii) برای $-0.4<-1/k<0$ ، چرخش حول نقطه بحرانی ندارد و لذا سیستم حلقه بسته برای $2.5<k<\infty$ پایدار است.

(iv) برای $0<-1/k<0.533$ ، دو چرخش در جهت عقربه ساعت حول نقطه بحرانی دارد و لذا سیستم حلقه بسته برای $-\infty<k<-1.875$ ناپایدار است.

(v) برای $0.533<-1/k\le\infty$ ، چرخشی حول نقطه بحرانی ندارد و لذا سیستم حلقه بسته برای $-1.875<k\le 0$ پایدار است.