دکوپله سازی سیستم های چند متغیره با فیدبک حالت

منظور از دکوپله سازی آن است که بتوان تا حد امکان با طراحی یک جبران امکانی را ایجاد کرد که در یک سیستم چند متغیره هر خروجی y_i با u_i کنترل شده و ورودی های دیگر تأثیر بسیار کمی را در خروجی y_i y_j بگذارد.

بحث زیر فقط برای سیستمهای مربع با m ورودی و m خروجی مطرح شده است.

ایده‌آل ترین دکوپله کننده آن است که خروجی y_i دقیقاً برابر u_i باشد.

بنابراین برای سیستمی با فضای حالت

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y = Cx(t) + Du(t)$$

اگر تابع تبدیل سیستم را $G(s)$ بنامیم آنگاه بهترین دکوپله کننده $G^{-1}(s)$ است چرا که سیستم جبران شده را تبدیل به یک سیستم قطری می کند.

نکته مهم: برای جبران سازی فوق شرط پایداری و می نیمم فاز بودن سیستم حلقه باز باید برآورده شده باشد.

در این حالت

$$G^{-1}(s) = \left(C(sI-A)^{-1}B + D\right)^{-1}$$

$$= -D^{-1}C\left(sI - A + BD^{-1}C\right)^{-1}BD^{-1} + D^{-1}$$

چنانچه برای سیستم فوق یک نمایش فضای حالت ارائه دهیم خواهیم داشت

$$\dot{z}(t) = (A - BD^{-1}C)z(t) + BD^{-1}y(t)$$

$$u(t) = -D^{-1}Cz(t) + D^{-1}y(t)$$

در نمایش فوق کاملاً واضح است که اگر $|D| = 0$ آنگاه سیستم معکوس ناسره بوده و لذا نمی توان از یک پیش جبران ساز سره برای دکوپله سازی بهره برد.

در چنین مواردی دکوپله سازی تنها با فیدبک امکان پذیر است. در ادامه سه نوع دکوپله سازی معرفی می گردند که عبارتند از:

فیدبک خروجی استاتیکی		فیدبک حالت استاتیکی		فیدبک خروجی دینامیکی

در این بخش تنها فیدبک حالت استاتیکی بحث می شود.

فیدبک حالت استاتیکی

در مرجع شماره ۹ فصل ۴ کتاب اثبات شده که شرط لازم و کافی برای آنکه دکوپله سازی سیستم با فیدبک حالت استاتیکی امکان پذیر باشد آن است که رتبهٔ ماتریس دکوپله سازی که با B^* نشان داده می شود کامل گردد.

برای تعیین ماتریس دکوپله سازی نخست بایستی اندیس های دکوپله سازی d_i محاسبه شوند. با ذکر این نکته که تعداد ورودی و خروجی ها برابر m فرض می گردد.
برای تعیین این اندیس ها میتوان هریک از دو روش زیر را به کار گرفت.

الف) استفاده از فضای حالت

اندیس های دکوپله سازی عبارتند از:

$$d_i \triangleq \begin{cases} 0 & \text{اگر } i \text{ امین ردیف } D \text{ مخالف صفر باشد} \\ \min\{k>0 / c_i^T A^{k-1} B \neq 0\} & \text{اگر } i \text{ امین ردیف } D \text{ صفر باشد} \end{cases}$$

درحقیقت رابطهٔ فوق بیان می کند که اگر i امین ردیف D صفر باشد آنگاه d_i برابر است با کوچکترین عدد صحیحی که بازاء آن $c_i^T A^{k-1} B$ مخالف صفر گردد.

c_i : i امین ردیف ماتریس C B: ماتریس ورودی سیستم

مثال: برای سیستمی با معادلات فضای حالت زیر اندیس های دکوپله سازی را بیابید

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

همانگونه که ملاحظه می گردد برای این سیستم که دارای ۲ خروجی است ماتریس D کاملاً صفر است.

$d_1 = ?$

اگر $k=1 \rightarrow c_1^T B = \underbrace{[-1 \quad 2]}_{\text{مخالف صفر}} \Rightarrow \boxed{d_1 = 1}$

$d_2 = ?$

اگر $K=1 \longrightarrow C_2^T B = [0 \quad 0]$ برابر صفر شد

اگر $K=2 \longrightarrow C_2^T A B = [0 \quad 0]$ برابر صفر شد

اگر $K=3 \longrightarrow C_2^T A^2 B = [-2 \quad 4]$ مخالف صفر $\Longrightarrow \boxed{d_2 = 3}$

بنابراین اندیس های کنترل پذیر عبارتند از ۱ و ۲

ب) استفاده از ماتریس تابع تبدیل سیستم

d_i عبارت است از حداقل درجه نسبی درایه های i امین ردیف ماتریس تابع تبدیل سیستم

مثال : برای ماتریس تابع تبدیل مقابل اندیس های دکوپله سازی را بیابید

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{4}{s+2} & \frac{8s}{s+4} \end{bmatrix}$$

این سیستم دارای ۲ خروجی است پس به محاسبه d_1 و d_2 نیاز داریم

d_1 : عبارتست از حداقل درجه نسبی درایه های اولین ردیف $G(s)$

در ردیف اول هر دو درایه دارای درجه نسبی یک هستند $\Rightarrow \boxed{d_1 = 1}$

d_2 : عبارتست از حداقل درجه نسبی درایه های دومین ردیف $G(s)$

در ردیف دوم یک درایه با درجه نسبی یک و دیگری با درجه نسبی صفر است

$\Rightarrow \boxed{d_2 = 0}$

تشکیل ماتریس دکوپله سازی (B^*)

الف) به کمک فضای حالت

$$B^* = \begin{bmatrix} C_1^T A^{d_1 - 1} B \\ C_2^T A^{d_2 - 1} B \\ \vdots \\ C_m^T A^{d_m - 1} B \end{bmatrix}$$

ب) به کمک ماتریس تابع تبدیل

$$B^* = \lim_{s \to \infty} D(s)G(s)$$

که $D(s)$ عبارتست از:

$$D(s) = diag(s^{d_1}, s^{d_2}, \ldots, s^{d_m})$$

d_i ها همان اندیس های دکوپله سازی هستند

مثال: برای سیستمی با فضای حالت مقابل ماتریس دکوپله سازی را حساب و امکان استفاده از فیدبک حالت را بررسی کنید.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

برای این مثال قبلاً ملاحظه گردید که

$$\boxed{d_1 = 1}, \quad \boxed{d_2 = 3}$$

$$\Rightarrow B^* = \begin{bmatrix} C_1^T B \\ C_2^T A^2 B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

چون رتبهٔ B^* کامل است، پس دکوپله سازی با فیدبک حالت استاتیک امکان‌پذیر است.

مثال: برای سیستمی با تابع تبدیل مقابل امکان اعمال فیدبک حالت استاتیک را بررسی کنید.

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{4}{s+3} & \frac{8}{s+4} \end{bmatrix}$$

نخست استخراج اندیس های دکوپله سازی

$\boxed{d_1 = 1}$ کوچکترین درجه نسبی درایه‌های ردیف اول

$\boxed{d_2 = 1}$ کوچکترین درجه نسبی درایه‌های ردیف دوم

$$\Rightarrow D(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \Rightarrow B^* = \lim_{s \to \infty} D(s)G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

دترمینان B^* مساوی صفر شده، لذا امکان اعمال فیدبک حالت استاتیک وجود ندارد.

قضیه: سیستم داده شده با معادلات حالت و خروجی مقابل

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

با فرض آنکه $|B^*| \neq 0$، آنگاه کنترل فیدبک حالت

$$u(t) = (B^*)^{-1}\left[-\bar{B}x(t) + v(t)\right]$$

که

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} c_1^T A^{d_1} \\ c_2^T A^{d_2} \\ \vdots \\ c_m^T A^{d_m} \end{bmatrix}$$

سیستم را دکوپله ساخته و ماتریس تابع تبدیل سیستم دکوپله شده عبارتست از:

$$D_d^{-1}(s) = \begin{bmatrix} s^{-d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s^{-d_m} \end{bmatrix}$$

و $v(t) = \bar{B}x(t) + B^*u(t)$ ورودی کنترلی جدید

اثبات

با مشتق گیری از معادله خروجی داریم

$$\frac{d}{dt}y(t) = C\frac{d}{dt}x(t) = CAx(t) + CBu(t)$$

و با d_1 بار مشتق گیری خواهیم داشت (با توجه به تعریف d_1 برای y_1)

$$\frac{d^{d_1}}{dt^{d_1}}y_1(t) = c_1^T A^{d_1} x(t) + c_1^T A^{d_1-1} B u(t)$$

به همین ترتیب برای d_2 ، $y_2(t)$ داریم.

$$\frac{d^{d_2}}{dt^{d_2}}y_2(t) = c_2^T A^{d_2} x(t) + c_2^T A^{d_2-1} B u(t)$$

با ادامه این فرآیند برای d_3 تا d_m خواهیم داشت

$$\begin{bmatrix} \frac{d^{d_1}y}{dt^{d_1}} \\ \frac{d^{d_2}y}{dt^{d_2}} \\ \vdots \\ \frac{d^{d_m}y}{dt^{d_m}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^T A^{d_1} \\ c_2^T A^{d_2} \\ \vdots \\ c_m^T A^{d_m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} c_1^T A^{d_1-1}B \\ c_2^T A^{d_2-1}B \\ \vdots \\ c_m^T A^{d_m-1}B \end{bmatrix} u$$

$$= \mathrm{B}x + B^*u$$

اگر بردار ستونی سمت چپ را بعنوان بردار ورودی مرجعی که معرف مشتق خروجی های
می باشد یا عنوان $v(t)$ معرفی کنیم

$$v(t)=\left[\frac{d^{d_1}y_1(t)}{dt^{d_1}}\quad \frac{d^{d_2}y_2(t)}{dt^{d_2}}\quad \cdots\cdots \quad \frac{d^{d_m}y_m(t)}{dt^{d_m}}\right]$$

آنگاه می توان رابطه اخیر فوق را به شکل زیر نوشت

$$v(t)=\bar{B}x(t)+B^{*}u(t)$$

و در نتیجه

$$u(t)=(B^{*})^{-1}\left[-\bar{B}x(t)+v(t)\right]$$

چند نکته :

۱) در این حالت رابطه بین ورودی و خروجی سیستم حلقه بسته بصورت زیر است.

$$Y(s)=\begin{bmatrix} s^{-d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s^{-d_m}\end{bmatrix}V(s)\quad\Rightarrow\quad D_d^{-1}(s)=\begin{bmatrix} s^{-d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s^{-d_m}\end{bmatrix}$$

تابع تبدیل حلقه بسته

۲) تمام قطب های سیستم دکوپله شده در صفر قرار می گیرند و سیستم دکوپله شده صفر انتقال محدود ندارد. (درواقع تمام صفرهای انتقال محدود سیستم جبران شده با قطب های جبران ساز حذف شده اند)
با توجه به بحث فوق چون امکان دارد تعدادی از صفرهای انتقال محدود حذف شده با قطب های سمت راست جبران ساز حذف شده باشند بنابراین امکان ناپایداری داخلی نیز وجود دارد. [در مرجع [10] فصل ۶ نشان داده شده که روش فوق برای برخی از سیستم های با فاز غیرمینیمم قابل پیاده سازی هست]

اعمال قانون کنترلی بدست آمده به سیستم

$$\dot{x}=\left(A-B(B^{*})^{-1}\bar{B}\right)x(t)+B(B^{*})^{-1}v(t)$$
$$y=\left(C-D(B^{*})^{-1}\bar{B}\right)x(t)+D(B^{*})^{-1}v(t)$$

نظر به آنکه قطب های حلقه بسته سیستم در مبدا هستند، لذا جهت پایدارسازی
سازی سیستم حلقه بسته (علاوه بر دکوپله بودن) پیشنهاد می گردد که بجای انتخاب D_d

از $\hat{D}_\alpha(s)$ که به صورت زیر معرفی می‌گردد، استفاده می‌شود

$$D_\alpha(s)=\begin{bmatrix} s^{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s^{d_m} \end{bmatrix} \longrightarrow \hat{D}_\alpha(s)=\begin{bmatrix} P_1(s) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_2(s) \end{bmatrix}$$

تابع تبدیل حلقه بسته جدید

که $P_i(s)$ ها چندجمله‌ای پایدار دلخواه از درجه d_i هستند. بسادگی می‌توان نشان داد که

$$\lim_{s\to\infty} \hat{D}_\alpha(s)G(s)=B^*$$

واین یعنی آنکه ماتریس دکوپله‌سازی تغییر نمی‌کند.

می‌توان اثبات نمود که چنانچه برای ماتریس تابع تبدیل $\hat{D}_\alpha(s)G(s)$ یک تحقق بصورت $\{A,B,\hat{C},B^*\}$ ارائه نمائیم آنگاه قانون کنترلی زیر علاوه بر دکوپله‌سازی پایداری سیستم را نیز حفظ خواهد کرد

$$u=(B^*)^{-1}\left[-\hat{C}x(t)+v(t)\right]$$

و قانون کنترلی فوق تابع تبدیل حلقه بسته $\hat{D}_\alpha^{-1}(s)$ را نتیجه می‌دهد.

بررسی یک مثال :

$$G(s)=\frac{1}{s^2}\begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} & 0 \\ 0 & \frac{s+1}{s^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{ MP Plant}$$

A Minimal Realization:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1, \end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_1^T B = [1 \quad 0] \Rightarrow d_1 = 1$$

$$c_2^T B = [0 \quad 0], \Rightarrow c_2^T AB = [-1 \quad 1] \Rightarrow d_2 = 2$$

$$\Rightarrow B^* = \begin{bmatrix} c_1^T B \\ c_2^T AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{which is nonsingular,}$$

and

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} c_1^T A \\ c_2^T A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

and

$$u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + v \right)$$

And the compensated plant is:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1, \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

which gives:

$$D_d^{-1}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2} \end{bmatrix}$$

حال اگر بخواهیم سیستم دکوپله شده حلقه بسته پایدار نیز باشد، براساس معادلات بخش های قبل داریم

$$\hat{D}_d(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & (s+1)^2 \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$\hat{D}_d(s) G(s) = \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} s(s+1) & s+1 \\ (s+1)^2 & -(s+1)^2 \end{bmatrix}$$

که یک تحقق آن را به صورت $\{A, B, \hat{C}, B^*\}$ بدست می آوریم.
توجه داشته باشید که

$$\frac{1}{S^2}\begin{bmatrix} S(S+1) & S+1 \\ (S+1)^2 & -(S+1)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S^2} & \frac{S+1}{S^2} \\ \frac{2S+1}{S^2} & \frac{2S+1}{S^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

همچنین A و B به همان فرم قبلی و $\hat{C}$ به صورت زیر، تحقق از بخش اکیداً سره ماتریس تابع تبدیل بالا خواهد بود

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

و قانون فیدبک حالت عبارتست از

$$u(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}\left(-\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}x(t) + v(t)\right)$$

وسیستم حلقه بسته با فیدبک حالت فوق عبارتست از

$$\dot{x}(t) = \left[A - B(B^*)^{-1}\hat{C}\right)x(t) + B(B^*)^{-1}v(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

که فضای حالت زیر را بدست می دهد.

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}x(t) + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}v(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}x(t)$$

وتابع تبدیل حلقه بسته سیستم عبارتست از

$$D_d^{-1}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{S+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(S+1)^2} \end{bmatrix}$$