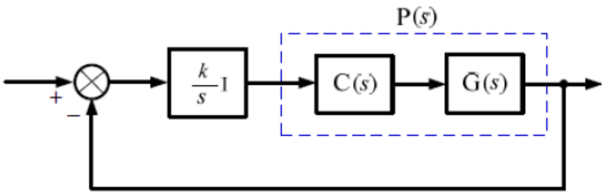
بررسی خاصیت تمامیت (Integrity)

تمامیت پایداری حلقه بسته یک سیستم چند متغیره ، با خارج و وارد کردن یک حلقه کنترل از مدار تضمین می گردد.

در حقیقت این سوال مطرح می گردد که:

اگر به هر دلیلی یکی از حلقه های کنترل، باز گردد پایداری سیستم حلقه بسته حفظ می شود یا خیر؟



قضیه : سیستم چند متغیره شکل مقابل را در نظر بگیرید. اگر فرضیات زیر برقرار باشد

۱) G(S) یک ماتریس تابع تبدیل قطری است.

۲) P(S) یک ماتریس گویای سره است.

۳) تمام حلقه های بستهٔ یک ورودی/یک خروجی که از باز کردن هر کدام از m-1 حلقه های فیدبک به دست می آیند، پایدار هستند. آنگاه

سیستم برای تمام K>0 ناپایدار است اگر شرط زیر برقرار باشد.

$$\frac{\det[G(0)]}{\prod_i g_{ii}(0)} < 0$$

شاخص نیدرلینسکی

نکته : اگر این شاخص مثبت باشد نمی توان گفت که سیستم پایدار است

نکته : عکس قضیه فوق صادق نیست.

اثبات فرض کنید که

$$C(s) = \begin{bmatrix} c_1(s) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & c_m(s) \end{bmatrix}$$

بهره‌ی حلقه برای هر کدام از تک حلقه‌ها $c_i(s)g_{ii}(s)$، $i = 1, \dots, m$ است. از نظریه سیستم‌های یک ورودی و یک خروجی می‌دانیم که سیستم را می‌توان با خطای حالت ماندگار صفر پایدار کرد اگر و فقط اگر $c_i(0)g_{ii}(0) > 0$ برای تمام iها. لذا

$$\prod_{i=1}^{m} c_i(0)g_{ii}(0) > 0$$

به دلیل شرط سوم نوشته شده است.

از طرف دیگر از قضیه **قبلی** داریم که $P(s)$ پایدار نا پذیر است اگر

$$\det[P(0)] = \prod_{i=1}^{m} c_i(0)\det[G(0)] < 0$$

و از ترکیب این دو ناتساوی، ناتساوی **قضیه** به دست می‌آید.

نکته ۱ ناتساوی **قضیه** یک شرط کافی ولی غیرلازم است. اما برای سیستم‌های ۲ × ۲ و ۱ × ۱، یک شرط لازم و کافی است.

نکته ۲ عدد $\frac{\det[G(\circ)]}{\prod_i g_{ii}(\circ)}$ را در نامساوی **قضیه** ، *شاخص نیدرلینسکی*[۱] (NI) می‌نامند و با $NI[G(\circ)]$ نشان می‌دهند.

نکته ۳ می‌توان نشان داد که

$$NI[G(\circ)] = \left(\lambda_{ii}(\circ)\right)^{-۱} NI[G^{ii}(\circ)]$$

رابطه فوق رابطهٔ مهم بین NI و RGA است.

مثال: ماتریس تابع تبدیل حالت ماندگار زیر را در نظر بگیرید

$$G(\circ) = \begin{bmatrix} -۱۱/۳ & -۲/۳۶۸ & -۹/۸۱۱ & ۰/۳۷۴ \\ ۵/۲۴ & ۰/۴۲۲ & ۵/۹۸۴ & -۱/۹۸۶ \\ -۰/۳۳ & ۰/۵۱۳ & ۲/۳۸ & ۰/۰۲۰۴ \\ ۴/۴۸ & ۱۵/۵۴ & -۱۱/۳ & -۰/۱۷۶ \end{bmatrix}$$

و RGAی متناظر عبارت است از

$$\Lambda = \begin{bmatrix} ۱/۰۰۶۳ & -۰/۰۳۱۴ & ۰/۱۲۶۴ & -۰/۱۰۱۳ \\ -۰/۱۰۴۵ & ۰/۰۰۰۳ & ۰/۰۱۰۷ & ۱/۰۹۳۵ \\ ۰/۱۰۸۱ & ۰/۱۶۳۰ & ۰/۷۲۶۴ & ۰/۰۰۲۵ \\ -۰/۰۰۹۹ & ۰/۸۶۸۰ & ۰/۱۳۶۶ & ۰/۰۰۵۴ \end{bmatrix}$$

داریم $NI[G(\circ)] = -۴۹۰/۸۹۱$ و لذا سیستم را نمی‌توان با کنترل غیرمتمرکز پایدار کرد. از طرف دیگر، توجه کنید که اگر ردیف‌های دوم و چهارم را در $G(\circ)$ جا به جا کنیم، شاخص نیدرلینسکی جدید ۱/۱۸۱۴ خواهد بود که **علیرغم مثبت بودن آن باز هم** شرط قضیه را برآورده نمی‌سازد.

در ارتباط با کاربرد توأمان RGA و NI در تحلیل تمامیت سیستم‌های کنترل غیرمتمرکز نتایج جالبی وجود دارد. برای مثال می‌توان نشان داد که برای $m > ۲$، اگر هر کدام از λ_{ii}ها منفی باشد، سیستم کنترل فیدبک غیرمتمرکز یکی از خواص زیر را خواهند داشت

- اگر $NI[G(\circ)] > \circ$، سیستم حلقه بسته ناپایدار خواهد بود، اما سیستم کاهش یافته با حذف حلقه iام را می‌توان پایدار کرد.
- اگر $NI[G(\circ)] < \circ$، سیستم حلقه بسته با از کار افتادن حلقه متناظر iاُم ناپایدار خواهد شد.

توجه کنید که هر دو حالت بالا نامطلوب است و در صورت امکان در طراحی سیستم‌های کنترل باید از رخداد آن‌ها جلوگیری کرد.

مثال : ماتریس تابع تبدیل حالت ماندگار زیر را در نظر بگیرید

$$G(0) = \begin{bmatrix} 0/2 & 0/8 & 0/3 \\ -1 & 0/1 & 1 \\ 0/5 & -0/6 & 0/1 \end{bmatrix}$$

و RGAی متناظر عبارت است از

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0/159 & 0/626 & 0/215 \\ 0/339 & -0/017 & 0/678 \\ 0/502 & 0/391 & 0/107 \end{bmatrix}$$

توجه کنید که λ_{22} منفی است و NI برابر ۳۸۳/۵ است. لذا سیستم حلقه بسته در صورت از کار افتادن حلقه دوم ناپایدار خواهد شد. بنابر این جفت کردن ورودی- خروجی زیر

$$(u_1 \leftrightarrow y_1 \quad u_2 \leftrightarrow y_2 \quad u_3 \leftrightarrow y_3)$$

پیشنهاد نمی‌شود، زیرا سیستم طراحی شده تمامیت نخواهد داشت. از طرف دیگر، اگر اولین و دومین ردیف را جا به جا کنیم داریم

$$G(0) = \begin{bmatrix} -1 & 0/1 & 1 \\ 0/2 & 0/8 & 0/3 \\ 0/5 & -0/6 & 0/1 \end{bmatrix}$$

و RGAی متناظر عبارت است از

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0/339 & -0/017 & 0/678 \\ 0/159 & 0/626 & 0/215 \\ 0/502 & 0/391 & 0/107 \end{bmatrix}$$

در این حالت تمام λ_{ii}ها مثبت هستند و NIی متناظر نیز ۹/۵۸۷ است. بنابراین، جفت کردن ورودی- خروجی زیر پیشنهاد می‌گردد

$$(u_1 \leftrightarrow y_2 \quad u_2 \leftrightarrow y_1 \quad u_3 \leftrightarrow y_3)$$

زیرا امکان پایدارسازی سیستم حلقه بسته وجود دارد.

تمامیت در سیستم‌های کنترل صنعتی به خرابی و از کارافتادگی حسگر یا محرک برمی‌گردد. این خرابی‌ها می‌تواند از نوع سخت‌افزاری یا *اشباع* متغیر باشند. اشباع در سیستم‌های صنعتی پدیده‌ای متداول است. در واقع هر گاه شیری کاملاً باز شود، یا ماشین الکتریکی تحت شرایط بار کامل کار کند، یا وسایل گرمایش و سرمایش تحت بار حداکثر کار کنند، همگی از موارد اشباع متغیر هستند. هم‌چنین در خرابی‌های سخت‌افزاری به مواردی از قبیل: از دست دادن فشار روغن در محرک‌های هیدرولیکی، شکست قطعه مکانیکی در حسگر یا محرک مکانیکی، ترموکوپل‌های سوخته شده و ... اشاره کرد.

از کارافتادگی حسگر و محرک در سیستم‌های کنترل صنعتی به هر دلیلی که باشد، بسیار زیان‌آور است. زیرا با از کارافتادگی یا خرابی حسگر، اطلاعات نادرستی به کنترل‌کننده ارسال می‌گردد و در مورد از کارافتادگی یا خرابی محرک، عمل کنترلی در یک حلقه قطع و یا بسیار ضعیف می‌شود.
در ادامه با ارائه دو قضیه شرایطی را خواهیم دید که تحت آن‌ها خاصیت تمامیت در سیستم از دست می‌رود.

قضیه : فرض کنید که $\mathrm{P}(s)$ ماتریس تابع تبدیل گویا، سره و پایدارپذیر انتگرالی باشد. آن‌گاه، سیستم حلقه بسته با از کارافتادگی *j*امین حسگر یا محرک پایدارپذیر انتگرالی نیست اگر $\det(\mathrm{P}^{jj}(0)) < 0$.

از این قضیه به سادگی مشاهده می‌شود که با از کارافتادگی *j*امین حسگر یا محرک، سیستم حلقه بسته با کنترل انتگرالی ناپایدار خواهد شد.

قضیه : اگر

- $\lambda_{ii}(0) < 0$
- $\mathrm{C}(s)$ یک ماتریس جبران‌ساز قطری
- $\mathrm{P}(s)$ سره

آن‌گاه، با هر بهره مثبت $k > 0$، سیستم حلقه بسته نشان داده شده در بلوک دیاگرام ارائه شده در بخش های قبل حداقل یکی از خواص زیر را دارد:

- **ناپایدار است.**
- **حلقه *j*ام متناظر با $(u_j \leftrightarrow y_i)$، با باز کردن سایر حلقه‌ها ناپایدار است.**
- **سیستم حلقه بسته با برداشتن *j*امین حلقه ناپایدار است.**

نکته ۱ اگر هر کدام از عناصر قطری RGA منفی باشند، کنترل غیرمتمرکز با عمل انتگرالی به سیستم حلقه بسته‌ای بدون تمامیت منجر می‌گردد. قطعاً این مطلب در سیستم‌های واقعی نامطلوب است.

نکته ۲ در سیستم‌های چندمتغیره ۲ × ۲، همواره می‌توان با جایگشت مناسب ردیف‌های ماتریس تابع تبدیل به پیکربندی مناسبی دست یافت که عناصر قطری RGA مثبت باشند. اما این کار در سیستم‌های چندمتغیره با تعداد ورودی‌ها و خروجی‌های سه یا بیش‌تر لزوماً امکان‌پذیر نیست.

نکته ۳ شرط عناصر قطری منفی در قضیه فوق کافی ولی غیرلازم است.

مثال : ماتریس تابع تبدیل حالت ماندگار زیر را در نظر بگیرید

$$G(۰) = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۰/۱ & ۰/۱ \\ \alpha & ۲ & -۱ & ۰/۲ \\ -۲ & -۳ & ۱ & ۱ \\ -۰/۱ & ۰ & ۰/۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

برای $\alpha = ۱$، داریم

$$\Lambda = \begin{bmatrix} ۳/۷۷ & -۳/۰۵ & ۰/۲۲ & ۰/۰۶ \\ ۱/۷۱ & -۴/۱۹ & ۳/۳۸ & ۰/۱ \\ -۴/۷۹ & ۸/۲۴ & -۲/۹۹ & ۰/۵۴ \\ ۰/۳۱ & ۰ & ۰/۳۹ & ۰/۳ \end{bmatrix}$$

بدیهی است که تعویض دومین و سومین ردیف می‌دهد $\lambda_{ii}(۰) > ۰$ برای $\alpha = ۰/۱$، داریم

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -۷/۰۴ & ۱۰/۲۲ & -۱/۹۲ & -۰/۲۶ \\ -۰/۳۲ & ۷/۸۲ & -۶/۳۱ & -۰/۱۹ \\ ۸/۹۴ & -۱۷/۰۴ & ۱۰/۶۱ & -۱/۵۱ \\ -۰/۵۸ & ۰ & -۱/۳۸ & ۲/۹۶ \end{bmatrix}$$

توجه کنید که در این حالت، با هیچ جایگشتی نمی‌توان تمام عناصر قطری RGA را مثبت کرد.

تعریف ارائه شده برای پایدارپذیری انتگرالی تنها به وجود ثابتی مانند $k > ۰$ برای پایداری حلقه بسته سیستم نشان داده شده در شکل اصلی اکتفا می‌کند. با توجه به مطالب ارائه شده در بالا، بدیهی است که حفظ این پایداری در صورت کاهش بهره نیز ضروری است. لذا در ادامه تعریف *کنترل‌پذیری انتگرالی* را ارائه می‌کنیم.

تعریف : سیستم پایدار حلقه باز $\mathrm{P}(s)$ را *کنترل‌پذیر انتگرالی* گویند اگر یک $k^* > ۰$ چنان وجود داشته باشد که سیستم حلقه بسته نشان داده شده در شکل اصلی برای تمام $k \in [۰, k^*]$ پایدار باشد و خطای حالت ماندگار صفر باشد.

در عمل، سیستم‌های کنترل‌پذیر انتگرالی را می‌توان با افزایش بهره از یک مقدار کوچک تنظیم کرد تا ضمن تضمین پایداری، عملکرد مطلوب نیز به دست آید. قضیه زیر شرایطی را برای کنترل‌پذیری انتگرالی ارائه می‌کند

قضیه : ماتریس تابع تبدیل گویای $\mathrm{P}(s)$ کنترل‌پذی انتگرالی است اگر تمام مقادیر ویژه $\mathrm{P}(۰)$ در نیمه راست صفحه مختلط قرار گیرند و کنترل‌پذیر انتگرالی نیست اگر هر کدام از مقادیر ویژه $\mathrm{P}(۰)$ در نیمه چپ صفحه قرار گیرند.

نکته ۱ قضیه فوق حالت‌هایی را که مقادیر ویژه $\mathrm{P}(۰)$ روی محور موهومی قرار دارند در نظر نمی‌گیرد.

نکته ۲ برای پایدارپذیری انتگرالی، شرط $\det(\mathrm{P}(۰)) > ۰$ الزامی است. توجه کنید که اگر تعداد مقادیر ویژه سمت چپ زوج باشد، این شرط برآورده می‌گردد ولی شرط کنترل‌پذیری انتگرالی نقض می‌گردد. اما در حالت‌های یک ورودی و یک خروجی این دو شرط یکسان هستند.

مثال : سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\mathbf{P}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{-۳\left(-s+۱\right)}{\left(s+۱\right)\left(۰/۵s+۱\right)} & \dfrac{۴}{۰/۵s+۱} \\ \dfrac{-۴}{۰/۵s+۱} & \dfrac{۲}{۰/۵s+۱} \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه‌ی $\mathbf{P}(\circ)$ عبارتند از $-۰/۵ \pm j۳/۱۲$ و لذا سیستم کنترل‌پذیر انتگرالی نیست. اما $\det(\mathbf{P}(\circ)) = ۱۰$ و ممکن است پایدارپذیر انتگرالی باشد. معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارت است از

$$s^{۵} + ۵s^{۴} + \left(۱۰k + ۸\right)s^{۳} + \left(۱۸k + ۴\right)s^{۲} + \left(۸۸k^{۲} - ۴k\right)s + ۴۰k^{۲} = ۰$$

و داریم که سیستم حلقه بسته برای $۰/۱۵۷ < k < ۰/۳۸۹$ پایدار است. به سیستم‌های چندمتغیره‌ای که تنها برای محدوده‌ای از بهره که شامل بهره صفر نیست پایدار هستند، سیستم‌های *کنترل‌پذیر انتگرالی مشروط* گویند. این خاصیت در عمل نامطلوب است و پیدا کردن کران‌های بالا و پایین در سیستم‌های واقعی بسیار مشکل است. هم‌چنین، این سیستم‌ها تمامیت ندارند.

■

به قضیه زیر در ارتباط با کنترل‌پذیری انتگرالی و خرابی حسگر یا محرک توجه کنید.

قضیه : فرض کنید که $\mathrm{P}(s)$ گویا، سره و کنترل‌پذیر انتگرالی باشد. آن‌گاه، سیستم حلقه بسته با برداشتن jامین حسگر (محرک) کنترل‌پذیر انتگرالی است اگر تمام مقادیر ویژه $\mathrm{P}^{jj}(\circ)$ در نیمه راست صفحه مختلط باشند. سیستم کنترل‌پذیر انتگرالی نیست اگر با برداشتن jامین حسگر (محرک) هر کدام از مقادیر ویژه $\mathrm{P}(\circ)$ یا $\mathrm{P}^{jj}(\circ)$ در نیمه چپ صفحه مختلط قرار گیرند.

مثال : ماتریس تابع تبدیل حالت ماندگار زیر را در نظر بگیرید

$$\mathrm{P}(\circ) = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۱ \\ -۲ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

که در آن مقادیر ویژه $\mathrm{P}(\circ)$ عبارتند از $\{۳/۵۳۲، ۲/۳۴۷، ۰/۱۲۰۶\}$ و سیستم کنترل‌پذیر انتگرالی است. اگر حلقه اول از مدار خارج شود، سیستم کاهش یافته به صورت زیر خواهد بود

$$P^{11}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه آن {۳/۳۰۳ ، ۰/۳۰۳–} هستند و کنترل‌پذیر انتگرالی نیست. اگر حلقه دوم از مدار خارج شود، داریم

$$P^{22}(0) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه‌ی آن {۳/۶۱۸ ، ۱/۳۸۲} است و کنترل‌پذیر انتگرالی است. اگر حلقه سوم از مدار خارج شود، داریم

$$P^{33}(0) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه‌ی آن{$2 \pm j1$} است و کنترل‌پذیر انتگرالی است. بنابراین، طراح سیستم کنترل باید دقت نماید که حلقه اول از لحاظ معیوب شدن اهمیت بیش‌تری دارد و باید به شدت مراقبت گردد.

در **مرجع ۲** آمده است که سیستم چندمتغیره حلقه بسته با کنترل غیرمتمرکز را می‌توان پایدار کرد و بعد از معیوب شدن هر کدام از iامین حلقه‌ها پایدار خواهد ماند تنها اگر شرط‌های زیر برقرار باشند:

$$NI[G(0)] > 0, \qquad \lambda_{ii}\left(G(0)\right) > 0 \qquad (i = 1, \dots, m)$$

در مورد سیستم‌های چندمتغیره 2×2، اگر هر دو عنصر روی قطر RGA مثبت باشند، جبران‌سازی قطری چنان وجود خواهد داشت که سیستم حلقه بسته پس از حذف iامین حسگر، کنترل‌پذیر انتگرالی باشد.

آخرین خاصیت مهمی که در این بخش ارائه می‌گردد، *کنترل‌پذیری انتگرالی غیرمتمرکز* (DIC) است که خاصیتی کاربردی‌تر از کنترل‌پذیری انتگرالی است.

تعریف : سیستم چندمتغیره $G(s)$ را DIC گویند اگر کنترل‌کننده‌ای قطری به صورت $C(s)\frac{1}{s}$، همان‌طور که در شکل اصلی نشان داده شده است، وجود داشته باشد که برای آن سیستم حلقه بسته برای تمام $E\frac{1}{s}C(s)$ پایدار باشد، که در آن $E \in \varepsilon_D$ و $\varepsilon_D = \left\{E = \mathrm{diag}\,(\varepsilon_i) \middle| \varepsilon_i \in [0, 1], i = 1, \dots, m\right\}$.

با توجه به این تعریف داریم که اگر سیستم چندمتغیره DIC باشد، می‌توان کنترل‌کننده‌ای قطری را چنان طراحی کرد که سیستم حلقه بسته ویژگی‌های زیر را داشته باشد:

- تمام تک حلقه‌ها پایدارند.
- با بستن همزمان تمام حلقه‌ها سیستم حلقه بسته پایدار باقی می‌ماند.
  یعنی با اعمال تداخل ها، پایداری مختل نشود
- سیستم حلقه بسته با وجود کم شدن هر کدام از بهره‌ها تا صفر، پایدار می‌ماند.
  به گونه ای همان مفهوم کنترل پذیری انتگرالی را می دهد

توجه کنید که DIC از کنترل‌پذیری انتگرالی قوی‌تر و مطلوب‌تر است. در کنترل‌پذیری انتگرالی تمام بهره‌ها توأمان به صفر میل می‌کنند، اما در DIC بهره‌های حلقه به صورت‌های گوناگونی ممکن است کاهش یابند. لذا یک سیستم چندمتغیره ممکن است کنترل‌پذیر انتگرالی باشد ولی لزوماً DIC نیست ولی یک سیستم چندمتغیره که DIC است، حتماً کنترل‌پذیر انتگرالی نیز هست.

پیش از ارائه قضیه‌ای در ارتباط با DIC، به علامتگذاری‌های زیر توجه کنید. مجموعه نمایه T را به صورت زیر تعریف کنید

$$T \triangleq \left\{(i_1, \dots, i_k) \middle| 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le m\right\}$$

که شامل اعداد صحیح kتایی در بازه ۱ تا m است. برای هر $t = (i_1, \dots, i_k) \in T$ یک زیرماتریس اصلی از G با ردیف‌ها و ستون‌های القا شده توسط t ساخته می‌شود و با G_t نمایش داده می شود.

هم‌چنین، ماتریس G را پایدار-D گویند اگر و فقط اگر برای تمام ماتریس‌های قطری $D > 0$، مقادیر ویژه GD در نیمه راست صفحه باشند و *ماتریس علامت* را به صورت $S_G \triangleq \mathrm{diag}\left\{\mathrm{sign}(g_{11}), \dots, \mathrm{sign}(g_{mm})\right\}$ تعریف کنید که در آن

$$\mathrm{sign}\; x = \begin{cases} 1 & x > 0 \text{ اگر} \\ -1 & x < 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

در این صورت $G^+ = GS_G$.

قضیه : سیستم چندمتغیره $G(s)$ کنترل‌پذیر انتگرالی غیرمتمرکز (DIC) است اگر مقادیر ویژه $G_t^+(0)D$ برای تمام t و تمام Dهای قطری مثبت در نیمه راست صفحه (غیر از مبدا) قرار گیرند.

قضیه : سیستم چندمتغیره $G(s)$ کنترل‌پذیر انتگرالی غیرمتمرکز (DIC) است اگر هر دو شرط زیر برقرار باشند:

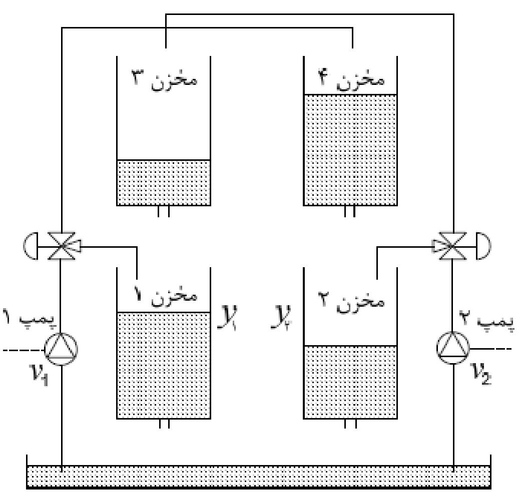
- تمام مقادیر ویژه $G^+(0)D$ برای تمام $D \geq 0$ در نیمه راست صفحه قرار گیرند.
- بهره‌های نسبی $G(s)$ مثبت هستند.

قواعد جفت کردن ورودی و خروجی یا انتخاب پیکربندی کنترل. بر اساس مطالب ارائه شده در این بخش، اکنون می‌توان قواعد انتخاب پیکربندی کنترل را با استفاده از RGA ارائه کرد. طراح بایستی به نکات زیر در حل مسأله جفت کردن ورودی و خروجی توجه نماید:

- جفت ورودی و خروجی‌ای را انتخاب کنید که عنصر RGAی متناظرشان نزدیک به واحد باشد.
- شاخص نیدرلینسکی باید مثبت باشد.
- عناصر RGAی متناظر با جفت ورودی و خروجی باید مثبت باشند.
- از عناصر RGAی بزرگ‌تر برای جفت کردن ورودی و خروجی پرهیز نمایید.

مثال : فرآیند مخزن چهارگانه داده شده در مثال زیر را در نظر بگیرید. ماتریس تابع تبدیل فرآیند در حالت ماندگار عبارت است از

$$G(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{\gamma_1 c_1}{1+sT_1} & \dfrac{k_c T_1(1-\gamma_2)k_2}{A_1(1+sT_3)(1+sT_1)} \\ \dfrac{k_c T_2(1-\gamma_1)k_1}{A_2(1+sT_4)(1+sT_2)} & \dfrac{\gamma_2 c_2}{1+sT_2} \end{bmatrix}$$



$$G(0) = \begin{bmatrix} \gamma_1 c_1 & (1-\gamma_2) c_1 \\ (1-\gamma_1) c_2 & \gamma_2 c_2 \end{bmatrix}$$

به سادگی نشان داده می‌شود که RGAی متناظر به صورت زیر است

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & \lambda \end{bmatrix}$$

که در آن $\lambda = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2 - 1}$. توجه کنید که درآیه‌های RGA به پارامترهای γ_1 و γ_2 وابسته‌اند. در واقع، اگر $1 < \gamma_1 + \gamma_2 < 2$ آن‌گاه $\lambda > 0$ و لذا جفت مناسب ورودی و خروجی در این حالت $(u_1 \leftrightarrow y_1 \quad u_2 \leftrightarrow y_2)$ است. شاخص نیدرلینسکی متناظر نیز $1/\lambda$ است. یعنی با پمپ ۱ سطح آب در مخزن ۱ و با پمپ ۲ سطح آب در مخزن ۲ را کنترل کنیم. اما برای $\gamma_1 + \gamma_2 < 1$، $\lambda < 0$ و $1 - \lambda > 0$، لذا جفت مناسب ورودی و خروجی در این حالت $(u_1 \leftrightarrow y_2 \quad u_2 \leftrightarrow y_1)$ است. شاخص نیدرلینسکی متناظر نیز به صورت زیر است

$$\frac{1-\gamma_1-\gamma_2}{(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)} = \frac{1}{1-\lambda} > 0$$

در این صورت با پمپ ۱ سطح آب در مخزن ۲ و با پمپ ۲ سطح آب در مخزن ۱ را کنترل می‌کنیم. توجه کنید که در هر دو حالت، کنترل غیرمتمرکز فرآیند مخزن چهارگانه با تمامیت امکان‌پذیر است.

مثال : ماتریس تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{1-s}{(5s+1)^2}\begin{bmatrix} 1 & -4/19 & -25/96 \\ 6/19 & 1 & -25/96 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

RGAی متناظر عبارت است از

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -5 \\ -5 & 1 & 5 \\ 5 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

به صورت کلی از RGA می‌توان دو دسته متفاوت از جفت‌های ورودی و خروجی به دست آورد. این دو دسته عبارت‌اند از

$$(u_1 \leftrightarrow y_1 \quad u_2 \leftrightarrow y_2 \quad u_3 \leftrightarrow y_3)$$

و

$$(u_1 \leftrightarrow y_3 \quad u_2 \leftrightarrow y_1 \quad u_3 \leftrightarrow y_2)$$

توجه کنید که این دو دسته را با توجه به شرط لازم مثبت بودن درآیه‌های متناظر در RGA به دست آوردیم. اما، در قواعد ارائه شده بیان گردید که انتخاب جفت‌هایی بهتر است که درآیه متناظرشان در RGA نزدیک واحد باشد. لذا به نظر می‌رسد که دسته اول انتخاب بهتری است. برای این پیکربندی، سه کنترل‌کننده PI به صورت $k_i(1 + 1/\tau_i s)$ طراحی شده است که پارامترهای کنترل‌کننده PI در جدول زیر داده شده‌اند. هم‌چنین سه کنترل‌کننده PI به صورت $k_i(1 + 1/\tau_i s)$ برای دسته دوم نیز طراحی شده است که پارامترهای آن‌ها نیز در جدول زیر آورده شده است.

پاسخ‌های حلقه بسته دو پیکربندی، در شکل بعدی نشان داده شده‌اند. همان طور که از پاسخ‌های زمانی به خوبی مشاهده می‌گردد، پاسخ پیکربندی دسته دوم بهتر است. این نشان می‌دهد که قواعد جفت کردن RGA لزوماً قواعدی بهینه نیستند.

	$\lambda_{ij}=1$ $(u_1-y_1, u_2-y_2, u_3-y_3)$		$\lambda_{ij}=5$ $(u_1-y_3, u_2-y_1, u_3-y_2)$	
	k_i	τ_i	k_i	τ_i
$i=1$	0.1230	32.40	-0.6840	24.15
$i=2$	0.1443	34.54	-0.02425	7.270
$i=3$	0.002940	3.988	0.007685	0.3688