نوع برداری (Vectoral type) در سیستم‌های چند متغیره

مثال : برای ماتریس تابع تبدیل حلقه باز مقابل نوع سیستم را تشخیص دهید.

$$G(s)=\begin{pmatrix}\frac{1}{S+1} & 0\\ \frac{1}{S+3} & \frac{1}{S(S+2)}\end{pmatrix}$$

برای G(s) ملاحظه می‌گردد که در ستون اول، نوع برابر صفر و برای ستون دوم نوع برابر یک می‌باشد. چون نوعِ هر ستون با دیگری متفاوت است بنابراین برای این سیستم نوع اسکالر نداریم.

سوال : آیا می‌توان با کمک روابط از قبل تعریف شده، برای سیستم فوق، نوعی را تشخیص داد؟

جواب : اگر نوع را برابر صفر در نظر گیریم.

$$\rightarrow \Delta(S)=S(S+1)(S+2)(S+3)$$

$$|G(s)|=\frac{1}{S(S+1)(S+2)}$$

$$\lim_{s\to 0}\Delta(s)|G(s)|=\lim_{s\to 0}S(S+3)=0$$

تشخیص ناویژه بودن بهرهٔ DC

بنابراین سیستم از نوع صفر نیست.

حال اگر نوع را یک در نظر بگیریم.

$$G(s)=\frac{1}{S}\begin{pmatrix}\frac{S}{S+1} & 0\\ \frac{S}{S+3} & \frac{1}{(S+2)}\end{pmatrix}=\frac{1}{S}G'(s)$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta'(S)&=(S+1)(S+2)(S+3)\\ |G'(s)|&=\frac{S}{(S+1)(S+2)}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lim_{s\to 0}\Delta'(s)|G'(s)|=0$$

بنابراین، این سیستم از نوع یک نیست و لذا نوع اسکالر ندارد.

برای چنین سیستمهایی که در هر ستون دارای نوع‌های متفاوتی بوده و نتوان برای کل سیستم یک نوع اسکالر توصیف کرد، نوع جدیدی به نام نوع برداری تعریف می‌گردد.

تعریف نوع برداری

سیستم چند متغیره با فیدبک منفی واحد را از نوع برداری $[l_1,l_2,\dots\dots l_m]$ می-گویند ، اگر هر l_i $(i=1,\dots\dots,m)$ بزرگترین عدد صحیحی باشد که بتوان ماتریس تابع تبدیل حلقه باز $G(s)$ را به صورت زیر نوشت.

$$G(s)=H(s)G'(s)$$

$$H(s)=diag\left[\frac{1}{s^{l_1}},\frac{1}{s^{l_1}},\dots\dots,\frac{1}{s^{l_m}}\right]$$

تذکر : $G'(s)$ صفری در مبداء ندارد.

در این حالت $G(s)$ را ماتریس تابع تبدیل حلقه باز سیستم با نوع برداری $[l_1,l_2,\dots\dots l_m]$ می گویند.

بنابراین چنین سیستمی در پاسخ حلقه بسته، بازاء ورودی های مرجع

$$y_d(t)=\left[\frac{a_1t^{k_1}}{K_1!},\frac{a_2t^{k_2}}{K_2!},\dots\dots,\frac{a_mt^{k_m}}{K_m!}\right]^T$$

خطای ماندگار صفر را نتیجه می‌دهد.

نکته : در عبارت $y_d(t)$ داریم:

۱) $0\le k_i<l_i$

۲) برای $l_i\le 0$ ، ضرائیب K_i و l_i برابر صفرند.

و این بدان معنی است که ورودی های به شکل $\frac{1}{t}$ و یا توان‌های مثبت آن در این بحث جایی نداشته و معتبر نیست.

مثال : برای سیستم چند متغیره حلقه بسته با فیدبک منفی واحد که تابع تبدیل حلقه باز آن به شکل روبرو است. خطای ماندگار سیستم را بازاء ورودی های زیر بیابید.

$$G(s)=\begin{pmatrix}\frac{1}{S+1} & 0\\ \frac{1}{S+3} & \frac{1}{S(S+2)}\end{pmatrix}$$

الف) $[1\quad 0]^T$ ب) $[0\quad 1]^T$

با نگاه کردن به فرم ظاهری G(s)، ملاحظه می‌گردد که ستون اول از نوع صفر و ستون دوم از نوع یک است. بنابراین پیشنهاد می‌شود که G(s) به فرم زیر نوشته شود.

$$G(s)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{S}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{S+1} & 0\\ \frac{S}{S+3} & \frac{1}{S+2}\end{pmatrix}=H(s)=G'(s)$$

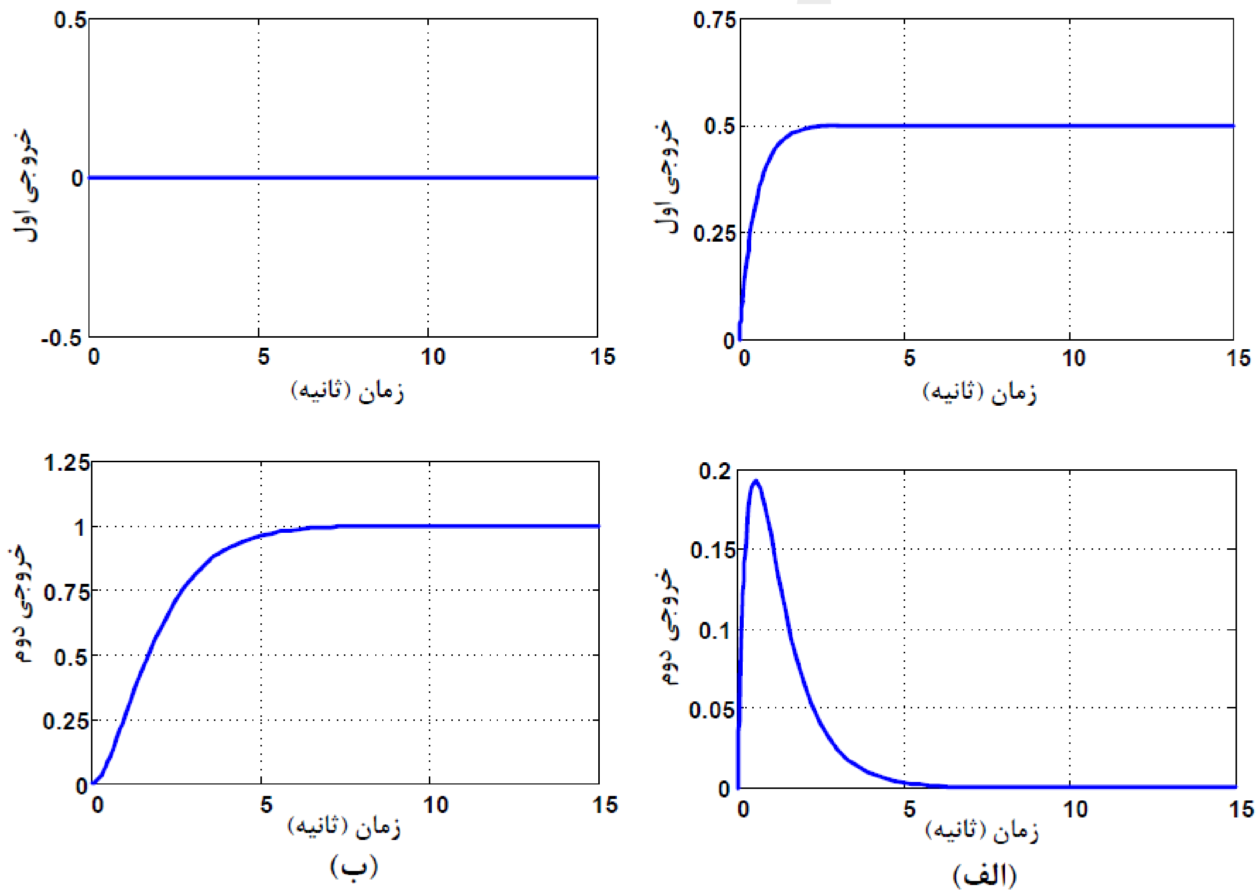
از طرفی ناویژه بودن بهره DC نیز براحتی قابل نمایش است.

$$\lim_{s\to 0}\Delta'(s)\left|G'(s)\right|=\lim_{s\to 0}(S+1)(S+2)(S+3)\frac{1}{(s+1)(S+2)}=3\neq 0$$

از طرفی G’(s) صفری در مبداء ندارد . (در بخش بعد راجع به صفر سیستم بحث می-شود)

با توجه به موارد فوق، بنابراین نوع برداری [1 0] برای G(s) قابل قبول است. و این بدان معنی است که اگر ورودی اول را صفر یا ضربه و ورودی دوم از نوع پله اختیار گردد، خطای ماندگار سیستم حلقه بسته صفر خواهد شد.

شکل زیر پاسخ سیستم را نشان می دهد.



الف) ورودی $[1\ 0]^T$ و ب) ورودی $[0\ 1]^T$

صفرهای سیستم چندمتغیره

برخلاف سیستم های SISO ، تعریف صفر در سیستم های چند متغیره بسادگی امکان پذیر نیست. قبل از معرفی انواع صفر در سیستم های چند متغیره، نخست یک‌سری از ویژگی‌هایی را که اغلب صفرها دارا می باشند، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۱) صفرها خاصیت بلوکه کردن انتقال بعضی از ورودی ها را دارند.
۲) صفرها، می توانند پایداری سیستم معکوس را تعیین کنند.
۳) صفرهای سمت راست محور $j\omega$، منجر به غیرمی‌نیمم فاز بودن سیستم می‌گردند.
۴) موقعیت صفر نقش مهمی در رفتار حالت گذرای سیستم دارد.
۵) درجهٔ نسبی سیستم، اکیداً سره، سره و یا ناسره بودن سیستم به تعداد صفرها و قطب‌های سیستم وابسته است.
۶) مکان هندسی ریشه های معادلهٔ مشخصهٔ سیستم بازاء بهره‌های بزرگ به صفرهای حلقه باز میل می‌کند.
۷) صفرها در تحلیل پایداری نایکوئیست معکوس کاربر دارند.
۸) صفرهای سیستم، تحت تاثیر فیدبک تغییرناپذیر هستند.

نکته : در سیستم‌های چند متغیره، صفری که دارای تمامی ویژگی‌های فوق باشد از اهمیت بیشتری برخوردار است.

انواع صفرهای سیستم چند متغیره:

الف) صفرهای عنصر (element zeros)
ب) صفرهای انتقال (Transmission zeros)
ج) صفرهای دکوپله (Decoupling zeros)
د) صفرهای تغیرناپذیر (Invariant zeros)
ه) صفرهای سیستم (System zeros)

توضیح دو مورد اول در فصل ۳ و توضیح مورد سوم در فصل ۴ و جهت توضیح ۲ مورد آخر، به مرجع زیر مراجعه گردد.

Munro: Multivariable system theory

الف) صفرهای عنصر

برای سیستمی با ماتریس تابع تبدیل مقابل

$$G(s)=[g_{ij}(s)] \quad \begin{array}{l} i=1,\dots\dots,l \\ j=1,\dots\dots,m \end{array}$$

$$g_{ij}(s)=\frac{n_{ij}(s)}{d_{ij}(s)}$$

صفرهای عنصرِ ماتریس تابع تبدیل، مقادیری از s هستند که بازاء آنها $n_{ij}(s)$ مساوی صفر می‌گردد.

این صفرها، تمامی مشخصه های ۸ گانه را نداشته و در حقیقت اهمیت چندانی هم در تحلیل سیستم‌های چند متغیره ندارند.

از صفرهای عنصر، فقط در طراحی سیستم های کنترل غیر متمرکز که در آن ماتریس تابع تبدیل کنترل‌کننده قطری می باشد، استفاده می‌گردد.

مثال : برای سیستمی با ماتریس تابع تبدیل مقابل، صفرهای عنصر را بیابید.

$$G(s)=\frac{1}{(S+1)(S+2)}\begin{pmatrix} S+2 & 2(S+1) \\ S+2 & S+2 \end{pmatrix}$$

نخست G(S) را به فرم کسری می‌نویسیم.

$$G(s)=\begin{pmatrix} \frac{1}{S+1} & \frac{2}{S+2} \\ \frac{1}{S+1} & \frac{1}{S+1} \end{pmatrix}$$

بنابراین ملاحظه می‌گردد که هیچ صفر عنصری نداریم.

مثال : برای سیستمی با ماتریس تابع تبدیل مقابل، صفرهای عنصر را بیابید.

$$G(s)=\frac{1}{(S+1)^2}\begin{pmatrix} S-1 & 5S+1 \\ -1 & S-1 \end{pmatrix}$$

با توجه به فرم ظاهری G(s) صفرهای عنصر عبارتند از:

S = 1 ; S = -0.2 ; S=1

صفرهای انتقال

در واقع برای سیستم‌های چند متغیره، هرگاه راجع به صفر سیستم بحث می‌شود منظور همان صفر انتقال است. صفرهای انتقال مهم‌ترین صفرهای سیستم چند متغیره هستند. این صفرها تمامی مشخصه های ۸ گانه را دارند.

مشخصهٔ کلیدی این صفرها، خاصیت بلوکه کردن آنها است. بدین معنی که خروجی سیستم بازاء بعضی از ورودی‌ها با دامنهٔ غیر صفر و در یک فرکانس خاص، مقدار صفر را نتیجه می‌دهد.

قبل از ارائه مفهوم صفر انتقال در سیستم‌های چند متغیره، به مرور مفهوم صفر در سیستم SISO خواهیم پرداخت.

به عنوان مثال برای سیستم SISO مقابل

$$G(s) = \frac{S+2}{(S+3)(S+4)}$$

صفر سیستم عبارتست از S = -2 و این یعنی آنکه ، اگر وروی سیستم مثلاً به صورت $u(t)=u_0e^{-2t}$ باشد، آنگاه پاسخ، عبارتست از $y(t) = u_0e^{-3t} - u_0e^{-4t}$ ملاحظه می‌گردد که در خروجی عبارت e^{-2t} ظاهر نمی‌گردد و یا به عبارتی فرکانس S = -2 در خروجی موجود نیست.

برای یک سیستم چند متغیره، اگر ورودی سیستم به صورت $u_k e^{zt}$ باشد که بردار u_k ورودی و z ، صفر انتقال سیستم تعریف گردد آنگاه فرکانس $s=z$ در خروجی ظاهر نخواهد شد. به مثال زیر توجه کنید.

$$y(s) = G(s)u(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s^2} & 0 \\ 0 & \frac{s+2}{s^2} \end{bmatrix} u(s)$$

با توجه به فرم ظاهری G(s) که دقیقاً مطابق فرم S-M یک ماتریس مربع است. شرط لازم برای آنکه فرکانس ۱- یا ۲- در خروجی ظاهر نگردد آنست که ورودی یا به صورت $u_k e^{-t}$ و یا به صورت $u_k e^{-2t}$ باشد. *(البته بردار u_k نیز باید ویژگی بخصوصی داشته باشد)*

$$u(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} \Rightarrow y(t) = without\ \ an\ \ e^{-t}\ \ term$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-2t} \Rightarrow y(t) = without\ \ an\ \ e^{-2t}\ \ term$$

می‌دانید که رابطهٔ بین فرم S-M یک سیستم و ماتریس تابع تبدیل آن به شکل زیر است.

$$G(s) = L(s)M(s)R(s)$$

و ذکر اینکه L(s) و R(s) نسبت به هم اولند. لذا شرط لازم برای آنکه فرکانس خاصی از ورودی، در خروجی ظاهر نگردد آنست که بازاء آن فرکانس، دترمینان G(s) صفر باشد.

چرا که اگر دترمینان G(s) صفر گردد پس دترمینان M(s) نیز مساوی صفر بوده و لذا قاعدتاً بایستی، بازاء یک s خاص یکی از جملات $\varepsilon_i(s)$ مساوی صفر شده باشد. و یا به عبارت دیگر بازاء یک s خاص، رتبهٔ G(s) تقلیل یابد.

$$M(s) = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)} \end{pmatrix}$$

تعریف صفر انتقال

S=z را صفر انتقال می‌گوییم به شرط آنکه G(z) رتبه‌ای کمتر از رتبهٔ عادی G(s) را دارا باشد.

تعریف رتبهٔ عادی G(s) : برای یک ماتریس با بُعد $l \times m$ ، رتبهٔ عادی G(s) را بازاء تقریباً تمام sها برابر می‌نامیم، اگر بتوان بازاء تقریباً تمام sها، r ستون یا r ردیف مستقل خطی را در G(s) پیدا کرد.

مثال : صفر انتقال ماتریس تابع تبدیل مقابل را بیابید.

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{S} & \frac{1}{S+1} \\ \frac{1}{S+1} & \frac{1}{S} \end{pmatrix}$$

حل : نخست به بررسی رتبهٔ عادی G(s) می پردازیم. کافی است که دترمینان G(s) را بیابیم.

$$|G(s)| = \frac{2S+1}{S^2(S+1)^2}$$

$$|G(s)| = \frac{2s+1}{s^2(s+1)^2}$$

چون این دترمینان تقریباً بازاء تمام sها مخالف صفر است پس رتبهٔ عادی آن ۲ است.

اگر $s=-0.5$ گردد، دترمینان $G(s)$، صفر می گردد و لذا بازاء $s=-0/5$ تنها یک ستون یا یک ردیف مستقل خطی خواهیم داشت و رتبهٔ عادی آن برابر یک خواهد شد.

$$G(-0/5) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \to |G(-0/5)| = 0$$

ستون دوم به اول وابسته است.

مثال: صفر انتقال ماتریس تابع تبدیل مقابل را بیابید

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{s}{s+2} \\ \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

حل: نخست تعیین رتبهٔ عادی $G(s)$:

همانگونه که ملاحظه می گردد ستون دوم s برابر ستون اول است. پس تنها یک ستون مستقل خطی وجود دارد. $(r=1)$

پس رتبهٔ عادی $G(s)$ کمتر از $m=2$ و کمتر از $l=2$ است

$\boxed{\text{در این حالت می گوییم صفر انتقال نداریم}}$

نکتهٔ مهم: یک سیستم با ماتریس تابع تبدیل $[G(s)]_{l\times m}$ دارای صفر انتقال نیست اگر $r<m$ یا $r<l$ باشد.

نکتهٔ مهم:

۱) اگر رتبهٔ عادی ماتریس تابع تبدیل (r) کوچکتر از m باشد می توان گفت که ورودی های $G(s)$ افزونه (Redundant) هستند

۲) اگر رتبه عادی ماتریس تابع تبدیل (۲) کوچکتر از l باشد می‌توان گفت که خروجی های $G(s)$ افزونه (Redundant) هستند

۳) در سیستم های صنعتی، ورودی افزونه به مفهوم زیاد بودن محرک ها و خروجی افزونه به مفهوم زیاد بودن سنسورها می باشد

اصول کلی تعیین صفرهای انتقال ماتریس تابع تبدیل $G(s)$

۱- تعیین فرم ماتریس اسمیت مک میلان $M(s)$

۲- تعیین رتبهٔ عادی $G(s)$

نظر به اینکه $G(s)$ را میتوان از روی $M(s)$ به فرم زیر نوشت

$$G(s)=L(s)M(s)R(s)$$

و $R(s)$ و $L(s)$ ماتریس های تک مدولی هستند (رتبه کامل) پس $s=z$، صفر انتقال $G(s)$ است اگر $M(z)$ نقص رتبه داشته باشد.

نتیجه:

با توجه به توضیح فوق، صفرهای انتقال $G(s)$ همان ریشه های صورت درایه های کسری $M(s)$ می باشد.

مثال: برای ماتریس تابع تبدیل مقابل صفرهای انتقال را به کمک فرم اسمیت- مک میلان بیابید.

$$G(s)=\begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+3} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{pmatrix}$$

حل: نخست تعیین فرم S-M

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+3)}\begin{bmatrix} s+3 & 2(s+1) \\ (s+3) & s+3 \end{bmatrix}$$

$$M(s)=\frac{1}{(s+1)(s+3)}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & (s+3)(s+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{(s+1)(s+3)} & 0\\ 0 & \frac{s-1}{s+1}\end{bmatrix}$$

بنابراین

قطب های سیستم: $s=-1$ ، $s=-1$ و $s=-3$ و

صفرهای انتقال سیستم: $s=1$

مثال: برای سیستمی با ماتریس تابع تبدیل $G(s)$ فرم $M(s)$ به شکل مقابل بدست آمده است قطب ها و صفرهای انتقال را بیابید.

$$M(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{(s+1)^2} & 0\\ 0 & \frac{s+2}{s+1}\end{bmatrix}$$

قطب ها: $\begin{cases}s=-1\\ s=-1\\ s=-1\end{cases}$　　　صفرها: $\{s=-2$

نکته : در کاهش رتبهٔ ماتریس تابع تبدیل بازاء صفر انتقال باید دقت کرد، چرا که در سیستم های چند متغیره ممکن است صفر و قطب حذف نشدنی در یک مقدار معین s قرار گیرند.

مثال : برای سیستمی با ماتریس تابع تبدیل مقابل، صفرهای انتقال را بیابید.

$$G(s)=\begin{pmatrix}\frac{S+1}{S+2} & 0\\ 0 & \frac{1}{S+1}\end{pmatrix}$$

در این حالت قطب و صفر ۱- ، حذف شدنی نیستند اما نمی توان $S = -1$ را به عنوان صفر انتقال در نظر گرفت، چرا که

دترمینان مقابل بازاء تمام S های معین، مخالف صفر است

$$|G(s)|=\frac{1}{S+2}$$

پس رتبهٔ G(s) ، ۲ بوده و نمی توان صفر محدودی را برای رابطهٔ فوق یافت.

تعیین صفرهای انتقال سیستم چند متغیره از روی نمایش فضای حالت

ماتریس رزنبراک سیستم چند متغیره بر اساس فضای حالت، به قرار روبروست.

$$M(s)=\begin{pmatrix} SI-A & B \\ -C & D \end{pmatrix}$$

با فرض می نیمال بودن نمایش فضای حالت (می نیمم تعداد متغیرهای حالت ممکن استفاده شده اند) و رتبهٔ کامل بودن ماتریس تابع تبدیل، عبارت زیر برقرار است.

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ C(SI-A)^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} SI-A & B \\ -C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} SI-A & B \\ 0 & G(s) \end{pmatrix}$$

در رابطهٔ فوق کاملاً مشخص است که دترمینان ماتریس سمت چپ مخالف صفر است.
فرض کنیم که بازاء یک مقدار S ، دترمینان G(s) صفر شود (این مقدار S همان صفر انتقال است). این مقدار S نباید مقدار ویژه‌ای از A باشد یا به عبارتی قطبی از G(s) باشد. آنگاه دترمینان عبارت سمت راست صفر شده و ناچاراً بایستی دترمینان عبارت سمت چپ نیز صفر گردد و این یعنی آنکه دترمینان M(s) باید صفر شود.
پس می‌توان نتیجه گرفت که برای یافتن صفرهای انتقال از روی فضای حالت کافی است که عبارت زیر را برقرار کنیم.

$$|M(s)|=\begin{vmatrix} SI-A & B \\ -C & D \end{vmatrix}=0$$

به چند جمله‌ای فوق اصطلاحاً چند جمله‌ای صفر سیستم می گویند.

مثال: برای یک سیستم چند متغیره با فضای حالت مقابل
الف) صفرهای انتقال را از روی ماتریس تابع تبدیل بیابید.
ب) صفرهای انتقال را از روی چند جمله‌ای صفر بیابید.

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix} ۱ & -۸ & -۸ \\ ۱ & -۵ & -۴ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$

الف) ملاحظه می‌گردد که بازاء $S=1$ ، دترمینان $G(s)$ صفر می گردد. و لذا سیستم یک صفر انتقال در $S=1$ دارد

$$G(s)=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{S+2} & \dfrac{2}{S+3} \\ \dfrac{1}{S+1} & \dfrac{1}{S+1} \end{pmatrix} \Rightarrow |G(s)|=\frac{-S+1}{(S+1)^2(S+3)}$$

سیستم با فاز غیر می نیمم است

ب) محاسبهٔ $M(s)$

$$M(s)=\left[\begin{array}{ccc|cc} s-1 & 8 & 8 & 0 & 0 \\ -1 & s+5 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & s+1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow |M(s)|=S-1$$

و این نشانگر یک صفر انتقال در $S=1$ است.

جهت‌های مختلف صفر انتقال در سیستم‌های چند متغیره (Zero Directions)

برای سیستمی با ماتریس تابع تبدیل $G(s)$ ، اگر $s=z$ به عنوان صفر انتقال باشد آنگاه جهت‌های صفر زیر قابل تعریف هستند.

الف) جهت صفر ورودی(zero-input direction)

برای آنکه در یک سیستم چند متغیره، فرکانس خاصی از ورودی نتواند در خروجی ظاهر شود، علاوه بر آنکه فرکانس مورد نظر باید همان صفر انتقال سیستم باشد، از طرفی نیز جهت بردار ورودی باید در راستای بخصوصی باشد.

تعریف: بردار غیر صفر $[u_z]_{m\times 1}$ ***(که می‌تواند مختلط نیز باشد)*** را جهت صفر ورودی می‌گوییم اگر

a) $G(z)u_z=0$

b) $u_z^H u_z=1$ که H ترانهادهٔ مزدوج مختلط است.

در این حالت اگر تحت تاثیر شرایط اولیهٔ صفر، ورودی برابر $u_z e^{zt}$ اختیار گردد، آنگاه فرکانس $s=z$ در خروجی سیستم حذف خواهد شد.

پایان قسمت دوم از فصل سوم