مثال: ماتریس تابع تبدیل سیستمی مطابق رو برو است.

$$G(S)=\begin{pmatrix} \frac{1}{S+1} & \frac{2}{S+3} \\ \frac{1}{S+1} & \frac{1}{S+1} \end{pmatrix}$$

صفر انتقال این سیستم عبارتست از: $S=1$ بنابراین طبق شروط تعریف شده جهت تعیین بودار جهت صفر ورودی داریم.

$$G(1)u_Z=0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1Z} \\ u_{2Z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 0.5u_{1Z}+0.5u_{2Z}=0$$

برای برقراری شرط دوم:

$$u_{1Z}^2+u_{2Z}^2=1$$

با حل دو معادله فوق بدست خواهیم آورد.

$$u_Z=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}^T$$

بنابراین اگر ورودی سیستم فوق به صورت $u_Z e^t$ انتخاب گردد، فرکانس $S=1$ در خروجی حذف خواهد شد.

$$Y(S)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{1}{S+1} & \frac{2}{S+3} \\ \frac{1}{S+1} & \frac{1}{S+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\frac{1}{S-1}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{1}{(S+1)(S+3)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

بنابراین فرکانس $S=1$ توسط سیستم فوق بلوکه شده و اجازهٔ حضور در خروجی ندارد.

ب) جهت صفر حالت (zero-state direction)

بردار x_Z را جهت صفر حالت یک سیستم می خوانیم اگر x_Z به همراه u_Z بتواند معادلهٔ ماتریسی زیر را برقرار کند.

$$\begin{bmatrix} zI-A & -B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_z \\ u_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} Bu_z=(zI-A)x_z \\ Cx_z=-Du_z \end{cases}} *$$

بردار x_z یک بردار n بعدی است

مفهوم بردار x_z

x_z برداری است معرف شرائط اولیه حاکم بر سیستم. حال اگر پاسخ سیستم را به طور همزمان نسبت به شرائط اولیه معرفی شده توسط x_z و ورودی $u_z e^{zt}$ (z: یک اسکالر معرف صفر انتقال سیستم و u_z بردار معرف جهت صفر ورودی) بدست آوریم، پاسخ سیستم به طور کامل صفر می گردد.

$$Y(s)=C(sI-A)^{-1}x_z+C(sI-A)^{-1}B\frac{u_z}{s-z}+D\frac{u_z}{s-z}$$

$$=C(sI-A)^{-1}\left[x_z+B\frac{u_z}{s-z}\right]+D\frac{u_z}{s-z}$$

با استفاده از روابط *

$$=C(sI-A)^{-1}\left[x_z+\frac{(zI-A)x_z}{s-z}\right]+D\frac{u_z}{s-z}$$

$$=C(sI-A)^{-1}\left[\frac{(sI-zI)x_z+(zI-A)x_z}{s-z}\right]+D\frac{u_z}{s-z}$$

$$=C(sI-A)^{-1}\left[\frac{(sI-A)x_z}{s-z}\right]+D\frac{u_z}{s-z}$$

$$Y(s)=C\frac{x_z}{s-z}+D\frac{u_z}{s-z}$$ (داریم: $Cx_z=-Du_z$)

$$\Rightarrow Y(s)=0$$

بنابراین آنچه در مفهوم بردار x_z توضیح داده شده بود، برقرار گردید.

مثال: برای ماتریس تابع تبدیل روبرو

$$G(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{3}{s+3} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

الف) نمایش فضای حالت متناظر را ارائه نمائید.

ب) صفر انتقال را مشخص نمود و شرائط اولیه‌ای را بیابید که به همراه ورودی $u_z e^{zt}$ خروجی کاملاً صفر را نتیجه دهد.

حل

الف) چون قطب های سیستم عبارت از ۱-، ۱- و ۳- است یک فضای حالت اقتصادی به شکل مقابل ارائه می‌گردد

$$\dot{x}(t)=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} x(t)+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

ب) تعیین صفر انتقال

$$|G(s)|=\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{3}{(s+1)(s+3)}=\frac{-2s}{(s+1)^2(s+3)}$$

بنابراین یک $s=0$ صفر انتقال سیستم است.

تعیین جهت صفر ورودی

$$G(z)u_z=0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1z} \\ u_{2z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{و} \quad u_z^H u_z=1 \longrightarrow \boxed{u_z=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T}$$

تعیین جهت صفر حالت

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_{z1} \\ x_{z2} \\ x_{z3} \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_z=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

در ادامه پاسخ سیستم را بازاء u_z و x_z را محاسبه می‌کنیم

پاسخ سیستم تنها به ورودی $\frac{u_z}{S-Z}$ $(Z=0)$

$$Y_1(S)=G(s)\frac{u_z}{S}$$

$$\rightarrow Y_1(s)=-\frac{2}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\frac{1}{(s+1)(s+3)}\\0\end{bmatrix}$$

پاسخ سیستم تنها به شرایط اولیه x_z

$$Y_2(s)=C(SI-A)^{-1}x_z=\frac{2}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\frac{1}{(s+1)(s+3)}\\0\end{bmatrix}$$

کاملاً مشهود است که پاسخ کامل سیستم بازاء ورودی و شرائط اولیه بطور همزمان صفر است.

ج). جهت صفر خروجی (zero-output direction)

نخست به تعریف ریاضی بردار جهت صفر خروجی خواهیم پرداخت و سپس مفهوم آن را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

بردار غیر صفر $[y_z]_{l\times1}$ را بردار جهت صفر خروجی می گویند به نحوی که

$$y_z^H G(z)=0 \quad \text{و} \quad y_z^H y_z=1$$

مثال: برای سیستمی با ماتریس تابع تبدیل مقابل

$$G(s)=\frac{1}{(0.2S+1)(S+1)}\begin{pmatrix}1&1\\1+2S&2\end{pmatrix}$$

الف) بردار جهت صفر خروجی را بازاء صفر انتقال سیستم بیابید.

ب) پاسخ حلقه باز سیستم را بازاء ورودی های $u=[1\ 0]^T$ ، $u=[0\ 1]^T$ و $u=[1\ -1]^T$ بیابید

حل: تعیین صفر انتقال

$$|G(s)|=\frac{1-2S}{(0.2S+1)(S+1)}=0\rightarrow\boxed{S=0.5}$$

دقت داشته باشید که صفر انتقال در سمت راست صفحه s قرار دارد.

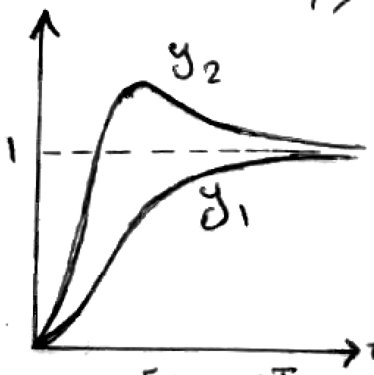
تعیین y_z: $y_z^H G(z) = y_z^H \times G(0.5) = y_z^H \times \frac{1}{1.65}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix} = (0 \quad 0)$

$$\Rightarrow \frac{1}{1.65}[y_{z1} \quad y_{z2}]\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix} = (0 \quad 0)$$

$$\Rightarrow y_z^H = \frac{1}{\sqrt{5}}(2 \quad -1)$$

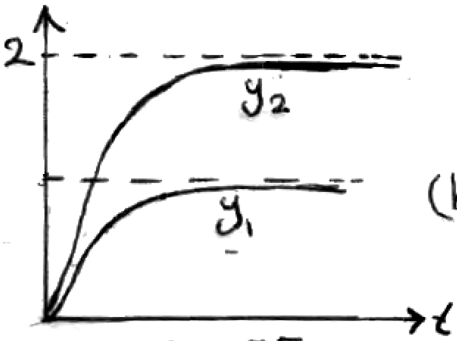
ب) پاسخ حلقه باز

در شکل های زیر پاسخ حلقه باز بازای ورودی های متفاوت ترسیم شده است.



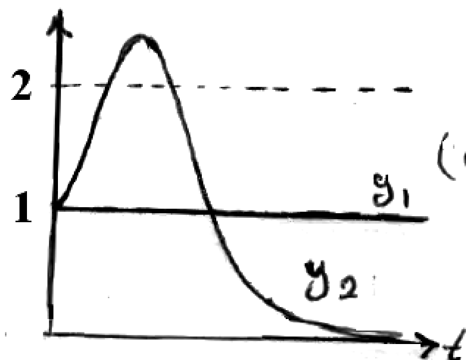
(a)

$u=[1 \quad 0]^T$



(b)

$u=[0 \quad 1]^T$



(c)

$u[1 \quad -1]^T$

نتیجه: ملاحظه می‌گردد که y_2 نسبت به y_1 بهتر ورودی را تعقیب می‌کند و یا به عبارتی کنترل خروجی y_2 نسبت به y_1 راحت‌تر است.

مفهوم جهت صفر خروجی

جهت صفر خروجی این اطلاعات را ارائه می‌نماید، که کنترل کدامین خروجی نسبت به سایرین، مشکل‌تر است. در مثال فوق چون درایه اول y_z از نظر قدر مطلق بزرگتر از y_{z2} است پس خواهیم گفت کنترل خروجی اول از دوم مشکل‌تر است. در شکل (b)، y_1 قاعدتاً باید صفر می‌شد و در شکل (c)، y_1 باید یک می‌گردید. در مثال فوق در حقیقت صفر سمت راست عملکرد مناسب

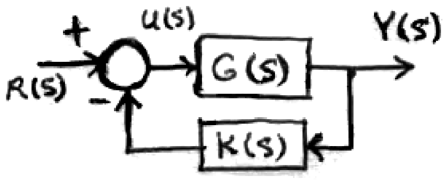
سیستم را مختل کرده است.

کاهش اثر صفر سمت راست در خروجی سیستم

به طور کلی وجود صفر نیمه صفحه راست ، محدودیت های جدی بر روی عملکرد سیستم تحمیل می نمایند که یکی از عمده ترین محدودیت ها، دشواری کنترل کردن خروجی سیستم است.

یکی از راههای برخورد عملی با دشواری کنترل ناشی از صفر RHP آن است که اثرات نامطلوب این صفر را به خروجی هائی که از نظر کاربردی اهمیت کمتری دارند منتقل کنیم و سایر خروجی ها را بدون محدودیت کمتری کنترل کرد.

استفاده از فیدبک در کاهش اثر صفر سمت راست



با استفاده از ساختار شکل مقابل میتوان با طراحی مناسب $K(s)$، اثر صفر سمت راست را بر روی خروجی ها کمتر نمود تا آنکه خروجی ها به خوبی ورودی را تعقیب کند.

برای بلوک دیاگرام شکل فوق داریم

$$Y(s) = T(s)R(s)$$

$$T(s) = G(s)\left[I + G(s)K(s)\right]$$

تابع تبدیل حلقه بسته

طبق بحث مربوط به جهت صفر خروجی و ذکر این نکته که می خواهیم اثر صفرهای سیستم بر روی خروجی کاهش یابد، خواهیم داشت

$$y_z^H G(z) = 0$$

$$y_z^H T(z) = 0 \quad *$$

بنابراین رابطه اخیر بیان می دارد که $T(z)$ و یا به عبارتی تابع تبدیل حلقه بسته سیستم باید در شرایط خاصی صدق کند (معادله *)

در ادامه بحث به دنبال نشان دادن این مطلب خواهیم بود که می توان با طراحی مناسب $K(s)$ به گونه ای عمل نمود که خروجی سیستم با تقریب خوبی ورودی را دنبال کند.

با استناد به مثال قبل :

$$y_z^H = \frac{1}{\sqrt{5}}[2 \quad -1]$$

و با توجه به معادله *

$$y_z^H T(z) = 0 \rightarrow [2 \quad -1]\begin{bmatrix} t_{11}(z) & t_{12}(z) \\ t_{21}(z) & t_{22}(z) \end{bmatrix} = [0 \quad 0]$$

$$\Rightarrow \boxed{2t_{11}(z) - t_{21}(z) = 0} \quad , \quad \boxed{2t_{12}(z) - t_{22}(z) = 0}$$

بنابراین دو معادله فوق یک نوع قید برای $T(s)$ را پدید می آورد.
در بحث های طراحی کنترل کننده ها ، معمولاً پاسخ ماندگار بسیار حائز اهمیت است. و یا به عبارتی $K(s)$ باید به گونه ای طراحی گردد که خروجی سیستم ، بردار ورودی مرجع r را ردیابی کند.
اگر صرفاً هدف ردیابی در حالت ماندگار مورد نظر باشد پس باید داشته باشیم.

$$T(0) = I$$

برای هدف فوق سه نوع طراحی پیشنهاد می گردد.

طراحی اول

فرض می گردد جهت سادگی کار ، دکوپله سازی حلقه بسته نیز مد نظر باشد

$$t_{12}(s) = t_{21}(s) = 0 \quad (1)$$ (در سیستم دکوپله عناصر غیر از قطر اصلی صفر می شوند)

از طرفی در بخش قبل نشان دادیم که

$$\begin{cases} 2t_{11}(z) - t_{21}(z) = 0 \\ 2t_{12}(z) - t_{22}(z) = 0 \end{cases} \quad (2) \quad \rightarrow (1), (2) \Rightarrow t_{11}(z) = t_{22}(z) = 0$$

لذا صفر نیم صفحه راست باید در هر دو عنصر قطری تابع تبدیل $T(s)$ حضور داشته و در ضمن $T(0) = I$ گردد ، بنابراین

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{-s+z}{s+z} & 0 \\ 0 & \frac{-s+z}{s+z} \end{bmatrix}$$

طراحی دوم

در این طرح هدف ردیابی ایده آل برای خروجی اول است . در این حالت تمامی دشواری کنترل به حلقه دوم منتقل می شود
تابع تبدیل حلقه بسته $T_1(s)$ به صورت مقابل قابل قبول است.

$$T(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t_{21}(s) & t_{22}(s) \end{bmatrix}$$

که $t_{21}(s)$ و $t_{22}(s)$ باید قیود زیر را برآورند

$$y_z^H T_1(z)=0$$

$$\Rightarrow 2\times 1 - t_{21}(z)=0 \quad ① \qquad \text{و} \qquad 2t_{12}(z)-t_{22}(z)=0 \quad ②$$

چون $t_{12}(s)=0 \rightarrow$ از ② $\Rightarrow 2\times 0 - t_{22}(z)=0 \rightarrow \boxed{t_{22}(z)=0}$ ③

$$① \rightarrow \boxed{t_{21}(z)=2} \quad ④$$

نکته مهم: همچنان باید خروجی های ماندگار سیستم همان ورودی های مرجع سیستم باشند

با توجه به نکته فوق و روابط ③ و ④ می توان $t_{21}(s)$ و $t_{22}(s)$ را به شکل زیر پیشنهاد داد.

$$t_{22}(s)=\frac{-s+z}{s+z} \qquad \text{و} \qquad t_{21}(s)=\frac{\beta s}{s+z}$$

چون $z=1 \rightarrow t_{22}(s)=\frac{-s+1}{s+1}$ و

$$\begin{cases} t_{21}(s)=\dfrac{\beta s}{s+1} & \text{و چون } \boxed{t_{21}(1)=2} \\ t_{21}(1)=\dfrac{\beta}{2}=2 \rightarrow \boxed{\beta=4} \end{cases}$$

$$T_1(s)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{-s+1}{s+1} & \dfrac{4s}{s+1} \end{pmatrix}$$

طراحی سوم

در این طرح هدف ردیابی ایده آل برای خروجی دوم است، و در این حالت تمام دشواری کنترل به حلقه اول منتقل می گردد. تابع تبدیل حلقه بسته $T_2(s)$ به صورت زیر قابل قبول است.

$$T_2(s)=\begin{bmatrix} t_{11}(s) & t_{12}(s) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

قیود طراحی نیز عبارتند از:

$$y_z^H T_2(z)=0 \rightarrow 2t_{11}(s)-1=0 \qquad \text{و} \qquad t_{11}(z)=0$$

$$\Rightarrow t_{11}(s)=\frac{-s+z}{s+z} \qquad , \qquad t_{12}(s)=\frac{\beta s}{s+z}$$

به شرط آنکه $\beta=1$ باشد، قیود فوق برقرار است.

مقایسه طراحی های مختلف

۱- در طراحی $T_1(s)$، صفر سمت راست هیچ اثری بر روی خروجی ① ندارد.

۲- در طراحی $T_2(s)$، صفر سمت راست هیچ اثری بر روی خروجی ② ندارد.

نتیجه: ① به طور دلخواه می توان اثر صفر سمت راست را بر روی یکی از خروجی ها از بین برد.

البته از این بابت باید هزینه ای پرداخت کرد. در طراحی $T_1(s)$ چون β بزرگتر است، پس هزینه بیشتری باید پرداخت گردد که این خود به معنای تداخل بیشتر است. یا به عبارتی می توان گفت که کنترل خروجی ① مشروط به آنکه بخواهیم تأثیرپذیری کمتری نسبت به صفر سمت راست داشته باشد، سخت تر بوده و هزینه بیشتری را می طلبد.

این مسئله، با توجه به اینکه از قبل می دانستیم y_{z1} بزرگتر از y_{z2} است، کاملاً قابل تشخیص بود.

② : هزینه دکوپله سازی

در طراحی $T_0(s)$ ملاحظه می گردد که تابع تبدیل حلقه بسته دارای دو صفر سمت راست است، با آنکه در تابع تبدیل حلقه باز تنها یک صفر سمت راست وجود داشت. به عبارتی دکوپله سازی منجر به وجود یک صفر سمت راست اضافه گردیده است.

صفر سمت راست باعث کندی پاسخ می گردند.

قضیه:

برای ماتریس تابع تبدیل مربعی $G(s)$ که کنترل پذیر تابعی و پایدار است و تنها یک صفر سمت راست $s=z$ را داشته و قطب ناپایداری در $s=z$ ندارد اگر kامین عنصر بردار جهت صفر خروجی غیرصفر باشد $(y_{zk}\neq 0)$ آنگاه می توان کنترل ایده آلی را روی تمام خروجی های y_j $(j\neq k)$ به دست آورد و خطای حالت ماندگار خروجی kام را نیز صفر کرد. در این حالت $T(s)$ به فرم مقابل در خواهد آمد.

$$T(s)=\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \text{ردیف } k\text{ام} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & 0 \\ \frac{\beta_1 s}{s+z} & \cdots & \frac{\beta_{k-1} s}{s+z} & \frac{-s+z}{s+z} & \cdots & \frac{\beta_n s}{s+z} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow \text{ستون } k\text{ام}$$

$$\beta_j = \frac{-2y_{zj}}{y_{zk}} \qquad j\neq k$$

هرچه β_j ها بزرگتر باشند هزینه کار بیشتر است چرا که تداخل قوی‌تر خواهد شد

نکته مهم: اگر درایه‌ای از y_z صفر باشد، اثر صفر را نمی‌توان به خروجی مربوطه منتقل نمود.

مثال: با ماتریس تابع تبدیل مقابل

$$G(s)=\begin{bmatrix}\alpha & 1\\ \frac{1}{s+1} & \alpha\end{bmatrix} \quad \alpha\in\mathbb{R}$$

الف) صفر انتقال را بدست آورید

ب) بردار جهت صفر خروجی را تعیین کنید.

ج) با فرض آنکه هدف کنترل ایده‌آل خروجی ۲ و تأمین خطای ماندگار صفر برای خروجی ۱ باشد ماتریس تابع تبدیل حلقه بسته را بدست آورید.

حل: الف و ب

$$z=? \rightarrow |G(s)|=\alpha^2-\frac{1}{s+1}=\frac{\alpha^2(s+1)-1}{s+1}=0$$

$$\rightarrow \boxed{z=1/\alpha^2-1} \quad , \quad y_z=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+1}}\begin{bmatrix}-\alpha & 1\end{bmatrix}^T$$

کاملاً مشخص است که بازاء $|\alpha|>1$ صفر سمت چپ و بازاء $|\alpha|<1$ صفر سمت راست پدید می‌آید.

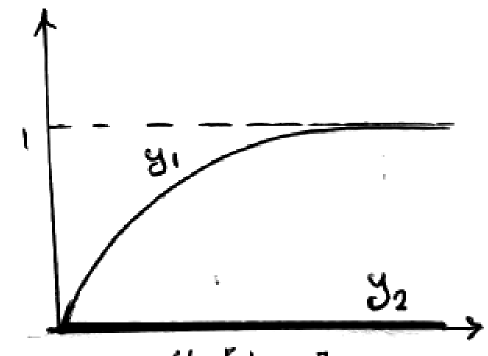
ج) با توجه به قضیه قبل داریم $j=2$ و $x=1$

$$T(s)=\begin{bmatrix}\frac{-s+z}{s+z} & \frac{\beta s}{s+z}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

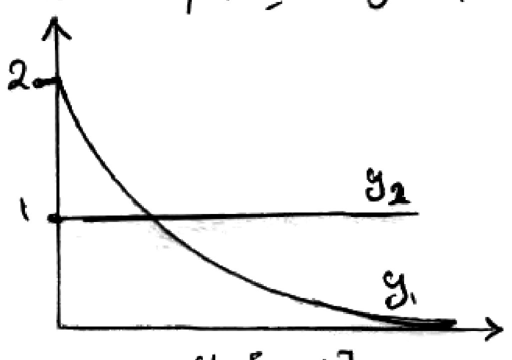
$$\beta=\frac{-2y_{z2}}{-\alpha}=\frac{-2\times 1}{-\alpha}=\frac{2}{\alpha}$$

به عنوان مثال اگر $\alpha=0/1$ باشد آنگاه $\beta=20$ می‌گردد.

پاسخ سیستم در شکل های زیر ترسیم شده است.



$u=[1 \;\; 0]$



$u=[0 \;\; 1]$

بنابراین خواسته مسئله برآورده شده است.