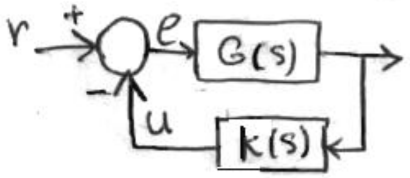
تمرین: برای ساختار نشان داده شده در شکل زیر نشان دهید که صفرهای انتقال حلقه بسته سیستم، صفرهای انتقال حلقه باز را شامل می‌شود.

ماتریس D فضای حالت را صفر در نظر بگیرید.



حل:

فضای حالت سیستم اولیه G(s)

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Be \\ y &= Cx \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

فضای حالت جبران‌ساز

$$\left.\begin{aligned} \dot{w} &= Fw + Gy \\ u(t) &= Hw + Dy \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

با لاپلاس گرفتن از مجموعه روابط فوق داریم

$$(1) \xrightarrow{\mathcal{L}} (sI - A)X(s) = BE(s)$$

$$E(s) = R(s) - U(s)$$

$$Y(s) = CX(s) \quad (3)$$

$$(2) \xrightarrow{\mathcal{L}} (sI - F)W(s) = GY(s) \quad (4)$$

$$U(s) = HW(s) + DY(s) \quad (5)$$

$$\Rightarrow (sI - A)X(s) = BR(s) - BHW(s) - BDY(s)$$

$$\Rightarrow (sI - A)X(s) = BR(s) - BHW(s) - BDCX(s)$$

$$\Rightarrow \boxed{(sI - A + BDC)X(s) = BR(s) - BHW(s)} \quad (6)$$

از طرفی $(sI - F)W(s) - GY(s) = 0$

$$\rightarrow \boxed{(sI - F)W(s) - GCX(s) = 0} \quad (7)$$

$$(3) \rightarrow \boxed{-CX(s) = -Y(s)} \quad (8)$$

و نمایش ماتریسی روابط (6) و (7) و (8) به قرار زیر است

$$\begin{bmatrix} sI-F & -GC & 0 \\ BH & sI-A+BDC & B \\ 0 & -C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w(s) \\ x(s) \\ -R(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -Y(s) \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس رزنبراک جدید سیستم به قرار زیر است.

$$M_1(s)=\begin{pmatrix} sI-F & 0 & G \\ BH & I & -BD \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & sI-A & B \\ 0 & -C & 0 \end{pmatrix}$$

$$|M_1(s)|=|sI-F|\,|M(s)|$$

بنابراین صفرهای انتقال حلقه بسته، عبارتند از صفرهای انتقال حلقه باز سیستم ($|M(s)|=0$) و قطب های جبرانگر ($|sI-F|=0$)

تمرین: برای ساختار جبران ساز پیشخور شکل زیر نشان دهید که صفرهای انتقال سیستم جدید، همچنان صفرهای انتقال سیستم اولیه را شامل می شود

$$\hat{u}(s)\longrightarrow\boxed{K(s)}\xrightarrow{u(s)}\boxed{G(s)}\longrightarrow y(s)$$

حل:

فضای حالت سیستم اولیه و جبرانگر در زیر آورده شده است.

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t) \qquad \dot{w}(t)=Fw(t)+G\hat{u}(t)$$

$$y(t)=Cx(t) \qquad u(t)=Hw(t)+D\hat{u}(t)$$

ماتریس رزنبراک سیستم جدید عبارتست از

$$M_1(s)=\left[\begin{array}{cc|c} sI-F & 0 & G \\ -BH & sI-A & BD \\ \hline 0 & -C & 0 \end{array}\right]$$

عبارت فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$M_1(s)=\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & sI-A & B \\ 0 & -C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} sI-F & 0 & G \\ 0 & I & 0 \\ -H & 0 & D \end{bmatrix}$$

$$|M_1(s)| = |M(s)| \times |M'(s)|$$

دترمینان ماتریس رزنبراک سیستم اولیه　　　دترمینان ماتریس رزنبراک جبرانگر

بنابراین سیستم جدید، صفرهای انتقال سیستم جبران شده را در بر دارد.

روش اول جابجایی صفرهای انتقال

صفرهای انتقال یک سیستم با فضای حالت روبرو
$$\dot{x}=Ax+Bu$$
$$y=Cx+Du$$
مشروط بر آنکه D وارون پذیر باشد (سیستم مربع) همواره از روی قطب‌های وارون سیستم قابل تعیین می‌باشند. بنابراین برای تعیین صفرهای انتقال نخست می‌توان سیستم اولیه را وارون کرد. (یعنی ورودی را y و خروجی را u بگیریم)

$$y=Cx+Du$$
$$\Rightarrow D^{-1}y=D^{-1}Cx+u \rightarrow \boxed{u=D^{-1}y-D^{-1}Cx}$$
$$\dot{x}=Ax+B(D^{-1}y-D^{-1}Cx)=(A-BD^{-1}C)x+BD^{-1}y$$

و معادله خروجی ←
$$\boxed{u=-D^{-1}Cx+D^{-1}y}$$

فضای حالت جدید:

$$\dot{X}=(A-BD^{-1}C)X+BD^{-1}y$$

$$u=-D^{-1}CX+D^{-1}y$$

(y: ورودی و u خروجی)

قطب های این سیستم از عبارت $|SI-A+BD^{-1}C|$ که همان صفرهای انتقال سیستم اولیه هستند بدست می آید.

تشبیه: همانگونه که طبق مباحث کنترل مدرن، میتوان قطب های سیستم را با فیدبک حالت یا فیدبک خروجی در مکان های دلخواه جابجا نمود (به شرط کنترل پذیر سیستم) بنابراین می توان صفرهای انتقال سیستم را نیز در مکان دلخواه جابجا نمود.

بدین ترتیب که نخست سیستم معکوس را تشکیل داده و قطب های آن را که همان صفرهای انتقال سیستم اولیه هستند در مکان دلخواه جابجا می کنیم. (با استفاده از فیدبک حالت یا فیدبک خروجی)

قضیه: شرط کافی برای جابجایی کلیه n صفرهای انتقال (محدود یا نامحدود) توسط یک جبران ساز پیشخور بهره ثابت آن است (A, B, C) که $2m>n$ باشد

m : تعداد ورودی ها یا خروجی ها

n : تعداد متغیرهای حالت سیستم

در این حالت یک ماتریس بهرهٔ K با رتبهٔ کامل وجود خواهد داشت که کلیه مقادیر ویژه ماتریس $A-BKC$ را در مکان هایی که باید صفرهای انتقال قرار گیرند، جابجا کند.

صفرهای انتقال سیستم اصلاح شده (A,B,C,K^{-1}) در موقعیت های مورد نظر قرار خواهند گرفت.

این قضیه را بدون اثبات می پذیریم

$$G(s)=\begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+3} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{pmatrix}$$

مثال: سیستم غیر مینیمم فاز شکل مقابل را در نظر بگیرید
یک جبران گر به گونه ای طراحی کنید که
صفرهای انتقال آن به نقاط
$S=-1$, $S=-2$, $S=-3$
منتقل گردد.

حل: برای این سیستم ۳ قطب $S=-1$ ، $S=-1$ و $S=-3$ و یک صفر
انتقال محدود در $S=1$ داریم (به مثال های قبل توجه شود)
$n=3, m=2 \rightarrow 2m>n$
دو صفر انتقال دیگر نا محدود هستند.

ماتریس های اصلی مربوط به فضای حالت متناظر با
$$A=\begin{pmatrix} 1 & -8 & -8 \\ 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

ماتریس تابع تبدیل فوق (با توجه مثال دوم همین
$$C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

بخش) عبارتند از :

نخست فضای حالت متناسب با اعمال فیدبک خروجی، بر روی فضای حالت فوق ارائه

می گردد. (تشکیل $A_{cl}=A-BKC$ ماتریس سیستم حلقه بسته)

$$A_{cl}=\begin{bmatrix} 1 & -8 & -8 \\ 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -8 & -8 \\ 1 & -5+k_1 & -4+2k_1+k_2 \\ 0 & -k_1-k_3 & -1-2k_1-k_2-2k_3-k_4 \end{bmatrix}$$

با انتخاب $k_1=-k_3=1$ ، $k_2=1$ و $k_4=0$، داریم

$$A_{cl}=\begin{bmatrix} 1 & -8 & -8 \\ 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

لذا معادله مشخصه‌ی سیستم حلقه بسته عبارت است از

$$(s+2)(s^2+3s+4)=0$$

و مقادیر ویژه عبارتند از $S=-2$, $S=-1$, $S=-3$

که هر سه قطب پایدار هستند. اکنون برای جایابی صفر از

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

استفاده می‌کنیم. داریم

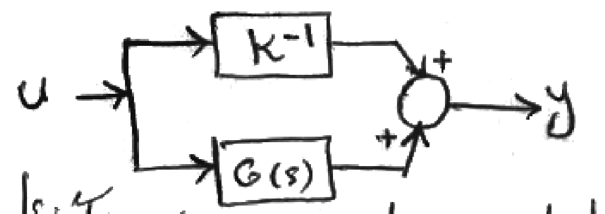
$$G(s) + K^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & -\dfrac{s+1}{s+3} \\ \dfrac{s+2}{s+1} & \dfrac{s+2}{s+1} \end{bmatrix}$$

صورت اسمیث- مک‌میلان آن به شکل زیر است

$$M(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s+1)(s+3)} & 0 \\ 0 & \dfrac{(s+2)(s^2+3s+4)}{s+1} \end{bmatrix}$$

صفرها
$s=-2,\ s=-1$
$s=-3$

قطب ها
$s=-1,\ s=-1,$
$s=-3$



$\boxed{D = K^{-1}}$

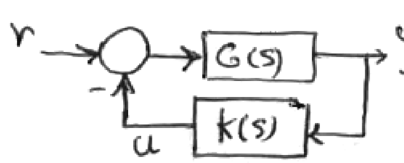
بنابراین قطب های سیستم اولیه تغییری نکرده اند اما صفرهای انتقال در مکان مطلوب قرار گرفته اند.

نکته: اگر $2m<n$ باشد جایابی قطب‌ها با فیدبک بهره خروجی ثابت امکان پذیر نبوده و درنتیجه جایابی صفرهای انتقال نیز ممکن نیست، درچنین حالتی باید از فیدبک دینامیکی استفاده کرد.

البته می‌توان با یک روش خاص نیز به‌جای استفاده از فیدبک دینامیکی سیستم اولیه را به یک سیستم افزوده (افزایش متغیرهای حالت) تبدیل نمود و به جای فیدبک دینامیکی از فیدبک بهره ثابت استفاده نمود.

مراحل کار

۱- بلوک دیاگرام سیستم جدید با فیدبک دینامیکی ترسیم می‌گردد



برای $K(s)$ یک فضای حالت پیشنهاد می‌کرد

$$\dot{z} = Fz + Gy$$
$$u = Hz + Ey$$

z : متغیرهای حالت مربوط به فیدبک دینامیکی که فرض می‌کنیم ۲ بعدی است

درحقیقت این جبران‌ساز باید قادر باشد $n+r$ قطب سیستم حلقه بسته را در مکان های مطلوب جابجا کند

۲- تعیین ماتریس حالت سیستم حلقه بسته

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B(r-u) \\ y = Cx \\ \dot{z} = Fz + Gy \\ u = Hz + Ey \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = Ax - BHz - BEy + Br \\ \dot{x} = (A - BEC)x - BHz + Br \\ \dot{z} = GCx + Fz \end{cases}$$

برای دو معادله اخیر می‌توان نمایش فضای حالت جدید را ارائه نمود.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A-BEC & -BH \\ GC & F \end{bmatrix}}_{A_{cl}} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r$$