فصل دوم

انواع روش‌های نمایش سیستمهای چند متغیره

الف) نمایش توسط فضای حالت (حوزه زمان)

ب) نمایش توسط ماتریس تابع تبدیل سیستم (حوزه فرکانس)

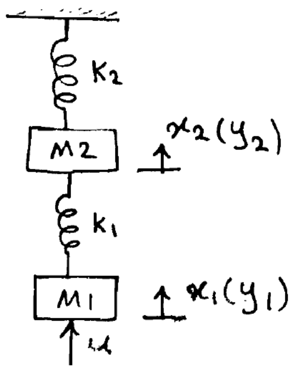
ج) نمایش توسط ماتریس رزنبراک سیستم (حوزه فرکانس)

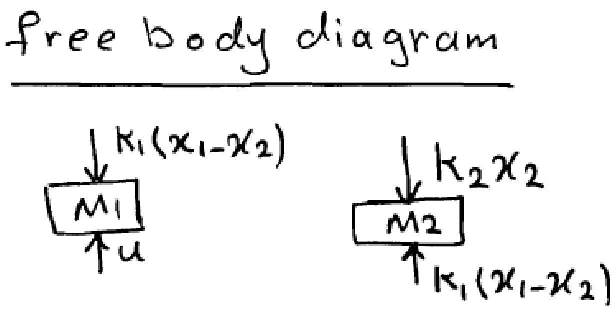
د) نمایش توسط کسر ماتریسی

الف) نمایش توسط فضای حالت

رجوع به درس کنترل خطی

مثال اول : نمایش فضای حالت سیستم شکل مقابل را ارئه دهید.





قانون دوم نیوتن برای هر جرم اعمال می‌شود

برای M_1 $\rightarrow$ $\sum F = M_1\ddot{x}_1$

$$u - K_1(x_1 - x_2) = M_1\ddot{x}_1 \qquad (1)$$

برای M_2 $\rightarrow$ $K_1(x_1 - x_2) - K_2 x_2 = M_2\ddot{x}_2 \qquad (۲)$

خروجی ها
$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \qquad (۳)$$

با معرفی متغیرهای حالت زیر

$$Z_1 = X_1 \quad ; \quad Z_2 = \dot{X}_1 \quad ; \quad Z_3 = X_2 \quad ; \quad Z_4 = \dot{X}_2$$

$$\begin{bmatrix}\dot z_1\\ \dot z_2\\ \dot z_3\\ \dot z_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -\frac{K_1}{M_1} & 0 & \frac{K_1}{M_1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \frac{K_1}{M_2} & 0 & -\frac{(K_1+K_2)}{M_2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\\ z_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{M_1}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\\ z_4\end{bmatrix}$$

مثال ۲ : برای سیستم دینامیکی شکل مقابل فضای حالت را استخراج کنید.

$$\frac{d\zeta_1}{dt}+\frac{d^3\zeta_1}{dt^3}=-\zeta_1 \qquad (1)$$

$$\frac{d\zeta_2}{dt}=-\zeta_2+u \qquad (2)$$

$$y=\zeta_1$$

استخراج فضای حالت برای این مثال قدری مشکل است.

با یک و دو بار مشتق‌گیری از معادله دوم به ترتیب داریم:

$$\frac{d^2\zeta_2}{dt^2}=-\frac{d\zeta_2}{dt}+\frac{du}{dt} \qquad (3)$$

$$\frac{d^3\zeta_2}{dt^3}=-\frac{d^2\zeta_2}{dt^2}+\frac{d^2u}{dt^2} \qquad (4)$$

و جایگزینی آن در معادلهٔ اول

$$\frac{d\zeta_1}{dt}=\frac{d^2\zeta_2}{dt^2}-\frac{d^2u}{dt^2}-\zeta_1 \qquad (5)$$

و از طرفی با جایگزینی (۳) در (۵) خواهیم داشت.

$$\frac{d\zeta_1}{dt}=-\frac{d\zeta_2}{dt}+\frac{du}{dt}-\frac{d^2u}{dt^2}-\zeta_1$$

و با اعمال رابطه (۲)

$$\frac{d\zeta_2}{dt}=-\zeta_2+u$$

با جایگزینی رابطه دوم در معادلهٔ اول خواهیم داشت.

$$\begin{cases}\dfrac{d\zeta_1}{dt}=-\zeta_1+\zeta_2-u+\dfrac{du}{dt}-\dfrac{d^2u}{dt^2}\\[2ex] \dfrac{d\zeta_2}{dt}=-\zeta_2+u\end{cases}$$

حال اگر متغیرهای حالت را به صورت روبرو تعریف کنیم

نمایش فضای حالت به صورت زیر در خواهد آمد.

$$x_1 = \zeta_1 + \frac{du}{dt} - 2u$$
$$x_2 = \zeta_2$$
$$\dot{x}_1 = -\zeta_1 + \zeta_2 - u - \frac{du}{dt}$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 + u$$
$$y = \zeta_1$$

و در فرم نمایش ماتریسی داریم

$$y = x_1 - \frac{du}{dt} + 2u$$
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \frac{du}{dt} + 2u$$

ب) نمایش سیستم چند متغیره، توسط ماتریس تابع تبدیل سیستم و به کمک معادلات دیفرانسیل حاکم بر آن

بعضاً معادلات دینامیکی (معادلات دیفرانسیل) سیستم در اختیار بوده و می-توان با گرفتن تبدیل لاپلاس از طرفین معادلات، ماتریس تابع تبدیل سیستم را بدست آورد. (روابط زیر)

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)\zeta(t) = Q\left(\frac{d}{dt}\right)u(t)$$
$$y(t) = R\left(\frac{d}{dt}\right)\zeta(t) + W\left(\frac{d}{dt}\right)u(t)$$

در رابطهٔ فوق:

$\zeta(t)$ **: بردار متغیرهایی از سیستم که الزاماً متغیر حالت نیستند.**

$\left(\frac{d}{dt}\right)\zeta(t)$ **: الزاماً به معنی مشتق اول نیست.**

$u(t)$ **: بردار ورودی سیستم با بعد m×1**

y(t) : بردار خروجی سیستم با بعد l×1

P، Q، R و W : ماتریس هایی هستند که درایه های آنها می‌توانند تابعی از زمان نیز باشد.

آنگاه با گرفتن تبدیل لاپلاس از طرفین رابطه داریم.

$$P(s)\zeta(s)=Q(s)U(s)$$
$$Y(s)=R(s)\zeta(s)+W(s)U(s)$$

نکته : P(s) الزاماً لاپلاس P نیست، بلکه قسمت هایی از لاپلاس $\zeta(t)$ نیز در آن دخالت می‌کند.

در نهایت برای ماتریس تابع تبدیل سیستم (G(s)) داریم

$$Y(s)=G(s)U(s)$$
$$G(s)=R(s)P^{-1}(s)Q(s)+W(s)$$

مثال : برای سیستم شکل مقابل، ماتریس تابع تبدیل سیستم را بیابید.

$$\frac{d\zeta_1}{dt}+\frac{d^3\zeta_1}{dt^3}=-\zeta_1$$
$$\frac{d\zeta_2}{dt}=-\zeta_2+u$$
$$y=\zeta_1$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از طرفین

$$(s+1)\zeta_1(s)+s^3\zeta_2(s)=0$$
$$(0)\zeta_1(s)+(s+1)\zeta_2(s)=U(s)$$
$$Y(s)=\zeta_1(s)+0\times\zeta_2(s)$$

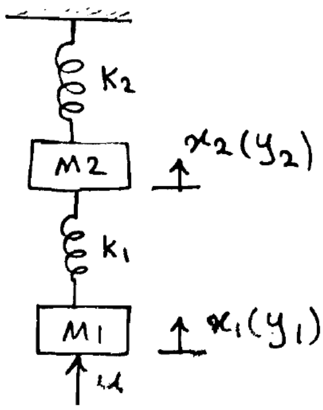
فرم ماتریسی رابطه فوق

$$\begin{pmatrix} s+1 & s^3 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta_1(s) \\ \zeta_2(s) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}U(s)$$
$$Y(s)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta_1(s) \\ \zeta_2(s) \end{pmatrix}+0\times U(s)$$

بنابر این

$$P(s)=\begin{pmatrix} s+1 & s^3 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} \quad , \quad Q(s)=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$R(s)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad W(s)=0$$
$$G(s)=R(s)P^{-1}(s)Q(s)+W(s)=\frac{-s^3}{(s+1)^2}$$

نکته : به P(s) اصطلاحاً ماتریس سیستم می گوئیم.



مثال: برای سیستم جرم و فنر مقابل معادلات دینامیکی سیستم را نوشته و ماتریس سیستم را بیابید.

قبلا برای این مثال داشتیم.

قانون دوم نیوتن برای هر جرم اعمال می‌شود

$$M_1 \text{ برای } \rightarrow \begin{cases} \sum F = M_1 \ddot{x}_1 \\ u - K_1(x_1 - x_2) = M_1 \ddot{x}_1 \quad (1) \end{cases}$$

$$M_2 \text{ برای } \rightarrow \ K_1(x_1 - x_2) - K_2 x_2 = M_2 \ddot{x}_2 \quad (2)$$

$$\text{خروجی ها} \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \quad (3)$$

ماتریس تابع تبدیل سیستم به صورت زیر به دست خواهد آمد.

با لاپلاس گیری از طرفین معادلات (۱) و (۲) و (۳)

$$\begin{bmatrix} M_1 s^2 + K_1 & -K_2 \\ -K_1 & M_2 s^2 + K_1 + K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} U(s)$$

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} U(s)$$

$$P = \begin{bmatrix} M_1 s^2 + K_1 & -K_2 \\ -K_1 & M_2 s^2 + K_1 + K_2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = R(s) P^{-1}(s) Q(s) + W(s)$$

نمایش ماتریس تابع تبدیل سیستم از روی فضای حالت

برای سیستمی با فضای حالت مقابل ماتریس تابع تبدیل سیستم را بیابید.

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\ 1\end{pmatrix}u$$

$$y=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}-\frac{du}{dt}+2u$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از طرفین معادله داریم.

$$\begin{pmatrix}S+1 & -1\\ 0 & S+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(s)\\ x_2(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ 1\end{pmatrix}U(s)$$

$$Y(s)=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(s)\\ x_2(s)\end{pmatrix}+(2-S)U(s)$$

با تطبیق رابطهٔ فوق با رابطه مقابل

$$P(s)\zeta(s)=Q(s)U(s)$$

$$Y(s)=R(s)\zeta(s)+W(s)U(s)$$

$$G(s)=R(s)P^{-1}(s)Q(s)+W(s)$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{(S+1)^2}\begin{pmatrix}S+1 & 1\\ 0 & S+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\ 1\end{pmatrix}+(2-S)=\frac{-S^3}{(S+1)^2}$$

نکته : در مثال فوق می توانستیم از رابطهٔ $G(s)=C(SI-A)^{-1}B+D$ نیز ماتریس تابع تبدیل را یافت.

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\ 1\end{pmatrix}u$$

$$y=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}-\frac{du}{dt}+2u$$

D

$$G(S)=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{(S+1)2}\begin{pmatrix}S+1 & 1\\ 0 & S+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\ 1\end{pmatrix}+(2-S)$$

تعیین مرتبهٔ یک سیستم

به چهار صورت می‌توان رتبهٔ سیستم را تعیین کرد.

روش اول : حذف ورودی و تعیین تعداد شرائط اولیهٔ لازم غیر وابسته، جهت تعیین پاسخ دقیق ناشی از شرائط اولیه

روش دوم : تعیین دترمینان ماتریس سیستم P(s) و مشخص نمودن بالاترین توان S

مثال : اگر P(s) به شکل مقابل باشد، مرتبهٔ سیستم را بیابید.

$$P(s)=\begin{pmatrix} s+1 & s^3 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}$$

تعیین دترمینان ماتریس سیستم :

$$|P(s)|=\begin{vmatrix} s+1 & s^3 \\ 0 & s+1 \end{vmatrix}=(S+1)^2$$

پس مرتبهٔ سیستم ۲ است.

روش سوم : تعیین ماتریس تابع تبدیل سیستم و تعیین بالاترین توان S از روی کوچکترین مخرج مشترک بین درایه های متفاوت این ماتریس

$$G(s)=\begin{pmatrix} \frac{S}{S+1} & \frac{1}{S} & \frac{1}{S(S+1)} \\ -\frac{1}{S} & \frac{1}{S} & \frac{1}{S+1} \end{pmatrix}=\frac{1}{S(S+1)}\begin{pmatrix} S^2 & S+1 & 1 \\ -(S+1) & (S+1) & S \end{pmatrix}$$

بنابراین مرتبه ۲ است

روش چهارم : استفاده از فضای حالت . در این روش درجه دترمینان $SI-A$ محاسبه و به عنوان درجهٔ سیستم معرفی می شود.

ج) نمایش ماتریس سیستم رُزنِبراک (Rosenbrock)

نمایش فرم خاصی از معادلات دینامیکی سیستم در حوزهٔ فرکانس بنام رزنبراک معروف است که به شکل زیر ارائه می‌گردد.

قبلاً در فرم نمایش سیستم در حوزه فرکانس داشتیم. (لاپلاس معادلات دینامیکی سیستم)

$$P(s)\zeta(s)=Q(s)U(s)$$
$$Y(s)=R(s)\zeta(s)+W(s)U(s)$$

عبارت فوق در فرم ماتریسی جدید زیر قابل نمایش است.

$$\begin{pmatrix} P(s) & Q(s) \\ -R(s) & W(s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta(s) \\ -U(s) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -Y(s) \end{pmatrix}$$

با توجه به این فرم نمایشی ماتریس رزنبراک به صورت زیر تعریف می گردد.

$$M(S)=\begin{pmatrix} P(s) & Q(s) \\ -R(s) & W(s) \end{pmatrix}$$

این ماتریس، قادر خواهد بود اطلاعات لازم را جهت تحلیل سیستم ارائه نماید.

بُعد ماتریس M(S)

$$[P(s)]_{r\times r} \qquad [Q(s)]_{r\times m} \qquad [R(s)]_{l\times r} \qquad [W(s)]_{l\times m} \Rightarrow [M(s)]_{(r+l)\times(r+m)}$$

m : تعداد ورودی ها

l : تعداد خروجی ها

چند نکته :

۱- بُعد ماتریس M الزاماً مربع نیست.

۲- مرتبهٔ سیستم (n) که از دترمینان P(S) بدست می‌آید، الزاماً r نخواهد بود و معمولاً بزرگتر یا مساوی r است.

مثال : برای سیستمی با ساختار مقابل

$$(s+1)^2\zeta(s)=s^3U(s)$$
$$Y(s)=\zeta(s)+(2-S)U(s)$$

الف) ماتریس رزنبراک را بیابید.

ب) مرتبهٔ سیستم را تعیین کنید

ج) تعیین ماتریس تابع تبدیل سیستم

حل قسمت الف: نمایش جدید معادلات فوق

$$\begin{pmatrix} (s+1)^2 & s^3 \\ -1 & 2-s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta(s) \\ -U(s) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -Y(s) \end{pmatrix}$$

بنابراین ماتریس رزنبراک عبارتست از :

$$M(S)=\begin{pmatrix} (s+1)^2 & s^3 \\ -1 & 2-s \end{pmatrix}$$

حل قسمت «ب»

برای تعیین رتبه، دترمینان P(s) را می یابیم.

$$P(S)=(S+1)^2 \Rightarrow |P(S)|=(S+1)^2$$

ملاحظه می‌گردد که با آنکه r=1 است، اما n=2 می باشد

حل قسمت «ج»

$$G(s)=R(s)P^{-1}(s)Q(s)+W(s)$$

$$G(s0=1\times\frac{1}{(S+1)^2}\times S^3+(2-S)=\frac{3S+2}{(S+1)^2}$$

نکته مهم :

همانگونه که ملاحظه می‌گردد، سیستم اکیداً سره است. در بحث نمایش فضای حالت، اگر عامل D غیرصفر می شد، آنگاه سیستم مطمئناً اکیداً سره نمی بود. اما در بحث نمایش سیستم در فرم رزنبراک ملاحظه می‌گردد که علیرغم غیر صفر بودن W(s) که به گونه‌ای معادل با D است، سیستم می‌تواند اکیداً سره نیز گردد.

نمایش ماتریس رزنبراک از روی معادلات فضای حالت

اگر فضای حالت به صورت معادلات روبرو باشد

$$\dot{X}=AX+Bu$$
$$y=CX+Du$$

آنگاه به سادگی می‌توان نشان داد که

$$\begin{pmatrix} SI-A & B \\ -C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X(s) \\ -U(s) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -Y(s) \end{pmatrix}$$

بنابراین داریم :

$$M(S)=\begin{pmatrix} SI-A & B \\ -C & D \end{pmatrix}$$

نمایش معادلات فضای حالت سیستم از روی ماتریس سیستم رزنبراک

اگر $M_1(s)$ ماتریس رزنبراک سیستمی باشد که دارای بعد ماتریس سیستم $P(s)$ یعنی r، از n کوچکتر باشد، نخست با تبدیل زیر بعد ماتریس رزنبراک جدید را افزایش می‌دهیم

$$M(s)=\left[\begin{array}{c|c} I_{n-r} & 0 \\ \hline 0 & M_1(s) \end{array}\right]$$

آنگاه می‌توان طبق مکانیزم خاصی از روی $M(s)$ نمایش فضای حالت را استخراج کرد.

این مکانیزم عملیات مقدماتی نام دارد.

طی این عملیات می‌توان

- هر کدام از ردیف‌های $M(s)$ را در یک ثابت غیر صفر ضرب کرد
- مضرب چند جمله‌ای از یک ردیف را به ردیف دیگر جمع کرد
- هر دو ردیف دلخواه را با هم تعویض نمود.
- انجام هر یک از عملیات فوق نسبت به ستون‌های $M(s)$

اصول کلی استخراج فضای حالت از روی $M(s)$

۱) با توجه به مرتبه سیستم باید $M(s)$ را به چهار ناحیه به گونه‌ای تقسیم کرد که ساختار زیر با ابعاد مشخص شده ظاهر گردد

$$M(s)=\left[\begin{array}{c|c} M_A(s) & M_B(s) \\ \hline M_C(s) & M_D(s) \end{array}\right]$$

$$[M_A(s)]_{n\times n}\ ,\ [M_B(s)]_{n\times m}$$

$$[M_C(s)]_{l\times n}\ ,\ [M_D(s)]_{l\times m}$$

۲) باید به کمک عملیات مقدماتی بر روی $M_A(s)$ ، $M_B(s)$ ، $M_C(s)$ و $M_D(s)$ به گونه‌ای عمل شود که در نهایت

الف) در $M_A(s)$ ، جملات حداکثر با درجه s و تنها بر روی قطر اصلی باید وجود داشته باشد و در ضمن ضریب s الزاماً یک گردد.

ب) $M_B(s)$ و $M_C(s)$ باید در انتهای عملیات به صورت عدد ثابت درآیند

ج) $M_D(s)$ می‌تواند تابعی از s باشد

مثال: با توجه به ماتریس روزنبراک شکل روبرو، نمایش فضای حالت را استخراج کنید

$$M(s)=\left[\begin{array}{cc|c} s+1 & s^3 & 0 \\ 0 & s+1 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

حل: همانگونه که ملاحظه می‌گردد، در این مثال $r=n$ است پس نیازی به افزایش بُعد $M(s)$ نیست. اما در درایه‌هایی غیر از قطر اصلی $M(s)$ ، عناصر s نیز مشاهده می‌گردد (مثل s^3) پس تبدیلات مقدماتی لازم است.

مرحله اول عملیات مقدماتی

s^2-s+1 برابر ردیف دوم را از ردیف اول کسر می‌کنیم

$$M(s)=\left[\begin{array}{cc|c} s+1 & -1 & -s^2+s-1 \\ 0 & s+1 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

تا اینجا ظاهراً مشکل $M_A(s)$ حل شده است

مرحله دوم

به آخرین ستون، $s-2$ برابر ستون اول را اضافه می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{cc:c} S+1 & -1 & -3 \\ 0 & S+1 & \frac{1}{\ } \\ \hdashline -1 & 0 & -S+2 \end{array}\right]$$

بنابراین $M_B(s)$ ، به عدد ثابت تبدیل گردید

لذا داریم:

$$P(S)=\begin{bmatrix} S+1 & -1 \\ 0 & S+1 \end{bmatrix} \quad Q(S)=\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad R(S)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$, W(S)=-S+2$$

با توجه به بحث های قبل خواهیم داشت

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D=-\frac{d}{dt}+2$$

و نمایش فضای حالت به قرار زیر خواهد بود.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}u$$

$$y=\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+2u-\frac{du}{dt}$$

مثال: نمایش فضای حالت سیستم مقابل را بدست آورید

$$M(S)=\left[\begin{array}{cc:c} S^2+2S+1 & 4 & 0 \\ S^2 & S & -S \\ \hdashline 2S & 1 & 1 \end{array}\right]$$

حل: در این سیستم $r=2$ و $n=3$ است پس نخست باید $M(s)$ را تعدیل کرد.

فرم تعدیل یافته ی $M(s)$

$$M(S)=\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S^2+2S+1 & 4 & 0 \\ 0 & S^2 & S & -S \\ \hdashline 0 & 2S & 1 & 1 \end{array}\right]$$

انجام عملیات مقدماتی

کم کردن سطر سوم از سطر دوم

$$M(s)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2S+1 & 4-S & S\\ 0 & S^2 & S & -S\\ 0 & 2S & 1 & 1\end{pmatrix}$$

اضافه کردن ستون سوم به اول

$$M(s)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 4-S & 2S+1 & 4-S & S\\ S & S^2 & S & -S\\ 1 & 2S & 1 & 1\end{pmatrix}$$

کم کردن S برابر ستون اول از دوم

$$M(s)=\begin{pmatrix}1 & -S & 0 & 0\\ 4-S & S^2-2S+1 & 4-S & S\\ S & 0 & S & -S\\ 1 & S & 1 & 1\end{pmatrix}$$

اضافه کردن S-2 برابر سطر اول به دوم

$$M(s)=\begin{pmatrix}1 & -S & 0 & 0\\ 2 & 1 & 4-S & S\\ S & 0 & S & -S\\ 1 & S & 1 & 1\end{pmatrix}$$

کم کردن ستون اول از سوم

$$M(s)=\begin{pmatrix}1 & -S & -1 & 0\\ 2 & 1 & 2-S & S\\ S & 0 & 0 & -S\\ 1 & S & -1 & 1\end{pmatrix}$$

نخست عوض کردن ستون اول و دوم و
سپس ستون دوم با سوم

$$M(s)=\left(\begin{array}{ccc:c}-S & -1 & 1 & 0\\ 1 & 2-S & 2 & S\\ 0 & 0 & S & -S\\ \hdashline S & -1 & 1 & 1\end{array}\right)$$

تا اینجای کار SI-A درست شده است، اما ضریب S برابر ۱- است که باید یک گردد و در ضمن $M_B(S)$ و $M_C(S)$ باید به صورت عدد ثابت درآیند

$$M(s)=\begin{pmatrix} S & 1 & 1 & 0 \\ -1 & S-2 & 2 & S \\ 0 & 0 & S & -S \\ -S & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ضرب ستون اول و دوم در ۱-

$$M(s)=\begin{pmatrix} S & 1 & 1 & 0 \\ -1 & S-2 & 2 & S \\ 0 & 0 & S & -S \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

اضافه کردن سطر اول به چهارم

$$M(s)=\begin{pmatrix} S & 1 & 1 & 1 \\ -1 & S-2 & 2 & 2+S \\ 0 & 0 & S & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

اضافه کردن ستون سوم به چهارم

$$M(s)=\left(\begin{array}{ccc:c} S & 1 & 1 & 0 \\ -1 & S-2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & S & 0 \\ \hdashline 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

کم کردن ستون دوم از چهارم

بنابراین کار پایان یافت

$$SI-A=\begin{pmatrix} S & 1 & 1 \\ -1 & S-2 & 2 \\ 0 & 0 & S \end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix};\qquad C=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \end{pmatrix};\qquad D=1$$

و فضای حالت به قرار زیر است.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}u$$

$$y=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}+u$$

د) توصیف کسر-ماتریسی سیستم‌های MIMO
(MATRIX FRACTION DESCRIPTION-MFD)

MFD نمایش خاصی از سیستم در حوزه فرکانس است که از همان ماتریس تابع تبدیل سیستم استخراج می‌گردد.

برای یک سیستم با m ورودی و l خروجی

$$G(S)=\frac{N(S)}{d(S)}$$

$d(s)$: کوچکترین مخرج مشترک تکین (monic) تمامی درایه‌های ماتریس تابع تبدیل سیستم

| مفهوم تکین بودن = ضریب بالاترین توان S ، یک می‌باشد |

$N(s)$: یک ماتریس چند جمله‌ای $l\times m$ بوده که عناصر آن چندجمله‌ای‌هایی برحسب S هستند.

<u>مفهوم یا نمایش MFD از راست</u>

اگر تعریف کنیم

$$D_R(S)=d(s).I_m$$

$$N_R(S)=N(S)$$

آنگاه می‌توان G(s) را به فرم روبرو نوشت

$$G(S)=\underbrace{N_R(S)}_{l\times m}\,\underbrace{D_R^{-1}(S)}_{m\times m}$$

<u>نکته مهم</u>: درجه $D_R(s)$ همان درجه دترمینان $D_R(s)$ بوده که برابر است با

$$\text{درجه}\, D_R(S) \triangleq \text{درجه دترمینان}\, D_R(S)=rm$$

r : درجه $d(s)$ فرض شده است.

مفهوم یا نمایش MFD از چپ

آن را تعریف کنیم

$D_L(s)=d(s).I_L$

$N_L(s)=N(s)$

$G(s)=\underbrace{D_L^{-1}(s)}_{l\times l}\underbrace{N_L(s)}_{l\times m}$

$D_R(s)\triangleq$ درجه دترمینان $D_L(s)=rl$ درجه

نکته: میتوان نمایش های دیگری را به عنوان MFD راست و چپ نیز ارائه نمود

دو ساختار جدید برای MFD راست و MFD چپ

اگر ماتریس ناو یژه $W(s)$ در اختیار باشد آنگاه با تعریف

$$\left.\begin{aligned}\bar{D}_L(s)&\triangleq W^{-1}(s)D_L(s)\\ \text{و}\quad \bar{N}_L(s)&\triangleq W^{-1}(s)N_L(s)\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned}D_L(s)&=W(s)\bar{D}_L(s)\\ N_L(s)&=W(s)\bar{N}_L(s)\end{aligned}\quad *$$

از قبل داشتیم

$G(s)=D_L^{-1}(s)N_L(s)$

که با جایگذینی روابط * خواهیم داشت

$$\boxed{G(s)=\bar{D}_L^{-1}(s).\ \bar{N}_L(s)}$$

و این یعنی یک MFD چپ جدید.

برای MFD راست جدید با کمک ماتریس جدید $W(s)$ داریم.

$\bar{D}_R(s)=D_R(s)W^{-1}(s)$ و $\bar{N}_R(s)=N_R(s)W^{-1}(s)$

$$\Longrightarrow\ \boxed{G(s)=\bar{N}_R(s)\bar{D}_R^{-1}(s)}$$

نکته: با توجه به ظاهر رابطه $\bar{D}_L(s)=W^{-1}(s)D_L(s)$، اصطلاحاً $W(s)$ را یک مقسوم علیه چپ از $D_L(s)$ و همچنین $N_L(s)$ تعریف می‌کنیم.

با توجه به ظاهر رابطه $\bar{D}_R(s)=D_R(s)W^{-1}(s)$، اصطلاحاً $W(s)$ را یک مقسوم علیه راست از $D_R(s)$ و همچنین $N_R(s)$ تعریف می‌کنیم.

سوال: درجه $\bar{D}_L(s)$ را تعیین کنید.

$$D_L(s)=W(s)\,\bar{D}_L(s)$$

درجه دترمینان $D_L(s)=$ درجه دترمینان $W(s)+$ درجه دترمینان $\bar{D}_L(s)$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{درجه دترمینان } \bar{D}_L(s) \leqslant \text{ درجه دترمینان } D_L(s)}$

نتیجه‌گیری:

چون درجه دترمینان $\bar{D}_L(s)$ درحقیقت همان درجه MFD است

بنابراین:

با حذف مقسوم علیه های چپ مشترک از ماتریس های صورت و مخرج ماتریس تابع تبدیل سیستم ($\bar{N}_L(s)$ و $D_L(s)$)، می‌توان درجه MFD را کاهش داد.

و یا به بیان دیگر:
با حذف بزرگترین مقسوم علیه چپ مشترک بین $N_L(s)$ و $D_L(s)$ می‌توان یک MFD باحداقل درجه را بدست آورد.

مثال: برای ماتریس تابع تبدیل مقابل، یک MFD ارائه دهید.

$$G(s)=\frac{1}{s^2+2s+2}\begin{bmatrix} s^2 & 2 \\ -2 & s^2 \end{bmatrix}$$

یک MFD برای $G(s)$ عبارتست از

$$G(s)=\begin{pmatrix} s^2+2s+2 & 0 \\ 0 & s^2+2s+2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} s^2 & 2 \\ -2 & s^2 \end{pmatrix}$$

نمایش MFD جدید

هریک از دو ماتریس فوق را میتوان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{pmatrix} s^2+2s+2 & 0 \\ 0 & s^2+2s+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ -1 & s+1 \end{pmatrix}$$

و

$$\begin{pmatrix} s^2 & 2 \\ -2 & s^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s-1 & 1 \\ -1 & s-1 \end{pmatrix}$$

عامل مشترک در هر دو جمله ماتریس $\begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix}$ است

$$\Rightarrow\ G(s)=\begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s+1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} s-1 & 1 \\ -1 & s-1 \end{pmatrix}$$

نمایش MFD ساده نشدنی (IRREDUCIBLE)

اگر بزرگترین مقسوم علیه مشترک $N_L(s)$ و $D_L(s)$ ماتریس $W(s)$ ی باشد که دترمینان آن غیر صفر و مستقل از s باشد آنگاه $N_L(s)$ و $D_L(s)$ را تک مدولی (unimodular) خوانده و یا از طرف چپ نسبت به هم اول خوانده و در این حالت MFD را ساده نشدنی می‌گوئیم.

$\boxed{\text{تمامی بحث های فوق برای MFD های راست نیز قابل بیان است.}}$

مثال – ماتریس تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}1 & -1\\ s^2+s-4 & 2s^2-s-8\\ s^2-4 & 2s^2-8\end{bmatrix}$$

یک MFD برای G(s) عبارت است از

$$G(s)=\begin{bmatrix}(s+1)(s+2) & 0 & 0\\ 0 & (s+1)(s+2) & 0\\ 0 & 0 & (s+1)(s+2)\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & -1\\ s^2+s-4 & 2s^2-s-8\\ s^2-4 & 2s^2-8\end{bmatrix}$$

$$=D_L^{-1}(s)N_L(s)$$

از طرف دیگر

$$N_L(s)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -s & 1 & 0\\ s & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ s^2+2s-4 & 2(s^2-4)-2s\\ 2s^2+s-8 & 4s^2-s-16\end{bmatrix}$$

$$=W(s)\bar{N}_L(s)$$

و

$$D_L(s)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -s & 1 & 0\\ s & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s^2+3s+2 & 0 & 0\\ s^3+3s^2+2s & s^2+3s+2 & 0\\ 0 & s^2+3s+2 & s^2+3s+2\end{bmatrix}$$

$$=W(s)\bar{D}_L(s)$$

بنابراین یک MFD دیگر سیستم

$$G(s) = \overline{D}_L^{-1}(s)\overline{N}_L(s)$$

است و $W(s)$ یک مقسوم علیه چپ تک مدولی $\overline{N}_L(s)$ و $\overline{D}_L(s)$ است.

مثال - ماتریس تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)^2}\begin{bmatrix} s & s(s+1)^2 \\ -s(s+1)^2 & -s(s+1)^2 \end{bmatrix}$$

یک MFD راست برای $G(s)$ عبارت است از

$$G(s) = \begin{bmatrix} s & s(s+1)^2 \\ -s(s+1)^2 & -s(s+1)^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (s+1)^2(s+2)^2 & 0 \\ 0 & (s+1)^2(s+2)^2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= N_{R_1}(s)D_{R_1}^{-1}(s)$$

که در آن

$$\deg\det D_{R_1}(s) = 8$$

یک MFD راست دیگر برای $G(s)$ عبارت است از

$$G(s) = \begin{bmatrix} s & s \\ -s(s+۱)^{۲} & -s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s+۱)^{۲}(s+۲)^{۲} & ۰ \\ ۰ & (s+۲)^{۲} \end{bmatrix}^{-۱}$$
$$= N_{R_۲}(s) D_{R_۲}^{-۱}(s)$$

که در آن

$$\deg\det D_{R_۲}(s) = ۶$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود MFD دوم دارای درجه‌ای کمتر از MFD اول است. یک MFD با درجه‌ی پایین‌تر را نیز می‌توان پیدا کرد. داریم

$$G(s) = \begin{bmatrix} s & ۰ \\ -s(s+۱)^{۲} & s^{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s+۱)^{۲}(s+۲)^{۲} & -(s+۱)^{۲}(s+۲) \\ ۰ & s+۲ \end{bmatrix}^{-۱}$$
$$= N_{R_۳}(s) D_{R_۳}(s)^{-۱}$$

که در آن

$$\deg\det D_{R_۳}(s) = ۵$$

توصیف کسر- ماتریسی کاهش ناپذیر

اگر بزرگترین مقسوم علیه مشترک بین $N_L(s)$ و $D_L(s)$ را که عوامل اصلی تشکیل دهنده ماتریس تابع تبدیل سیستم هستند، بیابیم آنگاه می توان MFD کاهش ناپذیر را بدست آورد.

فرض کنیم که ماتریس تابع تبدیل سیستم با نمایش

$$G(s)=D_L^{-1}(s)N_L(s)$$

یک MFD کاهش ناپذیر باشد، پس $D_L(s)$ و $N_L(s)$ باید نسبت به هم اول باشند. یا به عبارتی هیچ عامل مشترکی نداشته باشند.

اگر $R(s)$ بزرگترین مقسوم علیه مشترک بین $D_L(s)$ و $N_L(s)$ باشد، بنابراین

$$N_L(s)=R(s)\bar{N}_L(s)$$

$$D_L(s)=R(s)\bar{D}_L(s)$$

همچنین اگر $R(s)$ بزرگترین مقسوم علیه مشترک باشد، چنانچه $R_1(s)$ هر مقسوم علیه چپ دیگری از $N_L(s)$ و $D_L(s)$ باشد آنگاه $R_1(s)$ بزرگترین مقسوم علیه چپ از $R(s)$ است. یعنی

$$R(s)=R_1(s)\,W(s)$$

$W(s)$: یک چند جمله‌ای برحسب s است که رابطه فوق را برقرار می کند.

الگوریتم تعیین بزرگترین مقسوم علیه مشترک چپ بین $D_L(s)$ و $N_L(s)$

۱- تشکیل عبارت ماتریسی

$$\Big[\underbrace{N_L(s)}_{l\times m}\quad \underbrace{D_L(s)}_{l\times l}\Big]_{l\times(m+l)}$$

۲- استفاده از عملیات مقدماتی ستونی جهت تبدیل عبارت فوق به شکل زیر

$$\left[\underbrace{R(s)}_{l\times l} \;\vdots\; \underbrace{\varnothing}_{l\times m}\right]$$

$\boxed{R(s)}$: یک مقسوم علیه مشترک بین $N_L(s)$ و $D_L(s)$ است

سوال: نشان دهید که $R(s)$ حتماً یک مقسوم علیه مشترک بین $N_L(s)$ و $D_L(s)$ است.

جواب: اگر $R(s)$، مقسوم علیه مشترکی از $N_L(s)$ و $D_L(s)$ باشد پس روابط زیر باید بر قرار باشند.

$$N_L(s)=R(s)\times V_{11}(s)$$

$$D_L(s)=R(s)\times V_{12}(s)$$

که $V_{11}(s)$ و $V_{12}(s)$ خود ماتریس‌هایی هستند که درایه‌های آن‌ها عبارت کسری برحسب s هستند.

برای بدست آوردن نمایش فوق از تعریف $R(s)$ که در الگوریتم مربوطه ارائه شد استفاده می‌کنیم. گفته شد

$$\left[N_L(s) \quad D_L(s)\right] \xrightarrow{\text{باعملیات مقدماتی}} \left[R(s) \;\vdots\; \varnothing\right]$$

بنابراین عبارت زیر حتماً صحیح است.

$$\left[N_L(s) \quad D_L(s)\right]U(s)=\left[R(s) \;\vdots\; \varnothing\right] \quad \bigstar$$

$U(s)$ نتیجه همان عملیات ستونی مقدماتی بوده و یک ماتریس با بعد $(m+l)\times(m+l)$ است، که می‌توان آن را به صورت زیر نشان داد.

$$U(s)=\begin{bmatrix} U_{11}(s)_{m\times l} & U_{12}(s)_{m\times m} \\ U_{21}(s)_{l\times l} & U_{22}(s)_{m\times m} \end{bmatrix}$$

اگر $V(s)$ وارون $U(s)$ تعریف گردد.

$$V(s)=\begin{bmatrix} V_{11}(s) & V_{21}(s) \\ V_{21}(s) & V_{22}(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} U_{11}(s) & U_{12}(s) \\ U_{21}(s) & U_{22}(s) \end{bmatrix}^{-1}$$

بنابراین رابطهٔ ★ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\big[\underbrace{N_L(s)}_{l\times m}\quad \underbrace{D_L(s)}_{l\times l}\big]_{l\times(m+l)}=\big[\underbrace{R(s)}_{l\times l}\ \vdots\ \underbrace{\emptyset}_{l\times m}\big]\begin{bmatrix} V_{11}(s)_{l\times m} & V_{12}(s)_{l\times l} \\ V_{21}(s)_{m\times m} & V_{22}(s)_{m\times l} \end{bmatrix}_{(l+m)\times(l+m)}$$

از رابطه فوق میتوان نوشت

$$\underset{l\times m}{N_L(s)}=\underset{l\times l}{R(s)}\,\underset{l\times m}{V_{11}(s)}$$

و

$$\underset{l\times l}{D_L(s)}=\underset{l\times l}{R(s)}\,\underset{l\times l}{V_{12}(s)}$$

روابط فوق بیان می‌کنند که $R(s)$ حتماً مقسوم علیه مشترکی بین $N_L(s)$ و $D_L(s)$ است.

نکته: میتوان ثابت نمود که $R(s)$ بزرگترین مقسوم علیه نیز هست.

اثبات در کتاب

مثال: برای ماتریس تابع تبدیل $G(s)$ مقابل یک MFD ارائه نموده و بزرگترین مقسوم علیه مشترک عوامل MFD را بیابید

$$G(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

حل: همانگونه که ملاحظه می‌گردد مخرج عوامل مختلف $G(s)$ یکسان نیست. جهت تعیین بزرگترین مقسوم علیه مشترک بهتر است. مخرج تمام عوامل $G(s)$ را یکسان نمود.

برای این کار کوچکترین مخرج مشترک درایه های متفاوت $G(s)$ را می یابیم

$$G(s)=\frac{1}{(S+1)^2(S+2)}\begin{bmatrix}(S+1)(S+2) & (S+1)(S+2)\\ S+2 & (S+1)^2\end{bmatrix}$$

$$G(s)=D_L^{-1}(s)N_L(s)$$

$$N_L(s)=\begin{bmatrix}(S+1)(S+2) & (S+1)(S+2)\\ S+2 & (S+1)^2\end{bmatrix}$$

$$D_L(s)=\begin{bmatrix}(S+1)^2(S+2) & 0\\ 0 & (S+1)^2(S+2)\end{bmatrix}$$

نخست تا حد امکان $N_L(s)$, $D_L(s)$ را به ساده ترین فرم ممکن تبدیل می کنیم

ملاحظه می‌گردد که عامل (S+1) در تمام عناصر سطر اول این دو ماتریس مشترک است.

$$N_L(s)=\begin{pmatrix}S+1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}S+2 & S+2\\ S+2 & (S+1)^2\end{pmatrix}$$

$$D_L(s)=\begin{pmatrix}S+1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(S+1)(S+2) & 0\\ 0 & (S+1)^2(S+2)\end{pmatrix}$$

با حذف عوامل مشترک، ماتریس های جدید $N_L(s)$ و $D_L(s)$ نوشته می شوند.

$$\bar{N}_L(s)=\begin{pmatrix}S+2 & S+2\\ S+2 & (S+1)^2\end{pmatrix}\quad ;\quad \bar{D}_L(s)=\begin{pmatrix}(S+1)(S+2) & 0\\ 0 & (S+1)^2(S+2)\end{pmatrix}$$

در ادامه تست، اول بودن $N_L(s)$ و $D_L(s)$ نسبت به یکدیگر (تصمیم گیری راجع به بزرگترین مقسوم علیه مشترک بودن عامل مشترک) صورت می گیرد.

در حقیقت می خواهیم R(s) را بیابیم.

$N_L(s)$ و $D_L(s)$ به صورت زیر نوشته تا طبق عملیات مقدماتی سطری/ستونی توضیح داده شده، R(s) بدست آید.

$$\begin{bmatrix} \bar{N}_L(s) & \bar{D}_L(s) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:cc} S+2 & S+2 & (S+1)(S+2) & 0 \\ S+2 & (S+1)^2 & 0 & (S+1)^2(S+2) \end{array}\right]$$

شروع عملیات مقدماتی :

کم کردن S+2 برابر ستون دوم از چهارم

$$\begin{bmatrix} S+2 & S+2 & (S+1)(S+2) & -(S+2)^2 \\ S+2 & (S+1)^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

اضافه کردن ستون سوم به چهارم

$$\begin{bmatrix} S+2 & S+2 & (S+1)(S+2) & -(S+2) \\ S+2 & (S+1)^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

کم کردن S برابر ستون اول از دوم

$$\begin{bmatrix} S+2 & -S^2-S+2 & (S+1)(S+2) & -(S+2) \\ S+2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

اضافه کردن S+1 برابر ستون چهارم به ستون سوم

$$\begin{bmatrix} S+2 & -S^2-S+2 & 0 & -(S+2) \\ S+2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

با اضافه کردن $-s+۱$ برابر ستون چهارم به ستون دوم داریم

$$\left[\begin{array}{cc:cc} s+۲ & ۰ & ۰ & -(s+۲) \\ s+۲ & ۱ & ۰ & ۰ \end{array}\right]$$

اکنون با کم کردن $s+2$ برابر ستون دوم از ستون اول داریم

$$\left[\begin{array}{cc:cc} s+2 & 0 & 0 & -(s+2) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

و در نهایت با اضافه کردن ستون اول به ستون چهارم داریم

$$\left[\begin{array}{cc:cc} s+2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

لذا می‌توانیم بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک چپ را به صورت زیر تعیین می‌کنیم

$$R(s) = \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

سرانجام توجه کنید که

$$\begin{aligned} \bar{N}_L(s) = R(s)\bar{\bar{N}}_L(s) &= \begin{bmatrix} s+2 & s+2 \\ s+2 & (s+1)^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ s+2 & (s+1)^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{D}_L(s) = R(s)\bar{\bar{D}}_L(s) &= \begin{bmatrix} (s+1)(s+2) & 0 \\ 0 & (s+1)^2(s+2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & (s+1)^2(s+2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

بنابراین

$$G(s)=\bar{\bar{D}}_L(s)^{-۱}\bar{\bar{N}}_L(s)=\begin{bmatrix} s+۱ & \\ ۰ & (s+۱)^{۲}(s+۲)\end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ s+۲ & (s+۱)^{۲}\end{bmatrix}$$

یک MFD ی نسبت به هم اول کاهش ناپذیر از G(s) است.

مثال: MFD ی سیستمی به قرار زیر است

$$N_L(s)=\begin{pmatrix} S & S^2+S \\ S+2 & S+2\end{pmatrix},\quad D_L(s)=\begin{pmatrix} -S & S^2+S \\ S-2 & S+2\end{pmatrix}$$

بزرگترین مقسوم علیه مشترک بین این دو را بیابید

حل

نخست سعی می شود تا حد امکان عوامل مشترک بین هر دو حذف گردد

$$N_L(s)=\begin{bmatrix} 0 & S \\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} S+1 & 1 \\ 1 & S+1\end{bmatrix}$$

در سطر اول $N_L(s)$ و $D_L(s)$ عامل S مشترک بوده است.

$$D_L(s)=\begin{bmatrix} 0 & S \\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} S-1 & 1 \\ -1 & S+1\end{bmatrix}$$

$N_L(s)$ و $D_L(s)$ های جدید عبارتند از:

$$\bar{N}_L(s)=\begin{bmatrix} S+1 & 1 \\ 1 & S+1\end{bmatrix}\qquad \bar{D}_L(s)=\begin{bmatrix} S-1 & 1 \\ -1 & S+1\end{bmatrix}$$

باز هم می توان عامل مشترکی را یافت.

$$\bar{N}_L(s)=\begin{bmatrix} S & 1 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & S+1\end{bmatrix}$$

$$\bar{D}_L(s)=\begin{bmatrix} S & 1 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & S+1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{\bar{N}}_L(s)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & s+1\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \bar{\bar{D}}_L(s)=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & s+1\end{bmatrix}$$

از نظر درجه، MFD فوق مطمئناً مینیمال است. اما $\bar{\bar{N}}_L(s)$ و $\bar{\bar{D}}_L(s)$ نسبت به هم اول نیستند. (یعنی بزرگترین مقسوم علیه مشترک هنوز بدست نیامده است) حال با الگوریتم ارائه شده سعی می‌گردد که $R(s)$ بدست آید.
بهتر است با $N_L(s)$ و $D_L(s)$ اولیه کار را دنبال کنیم

$$\left[\begin{array}{cc:cc} s & s^2+s & -s & s^2+s \\ s+2 & s+2 & s-2 & s+2 \end{array}\right]$$

ستون دوم را از ستون چهارم کم کنید. داریم

$$\left[\begin{array}{cc:cc} s & s^2+s & -s & 0 \\ s+2 & s+2 & s-2 & 0 \end{array}\right]$$

سپس ستون اول را با ستون سوم جمع می‌کنیم. داریم

$$\left[\begin{array}{cc:cc} s & s^2+s & 0 & 0 \\ s+2 & s+2 & 2s & 0 \end{array}\right]$$

در ادامه $(s+1)-$ برابر ستون اول را با ستون دوم جمع می‌کنیم، داریم

$$\left[\begin{array}{cc:cc} s & 0 & 0 & 0 \\ s+2 & -s(s+1) & 2s & 0 \end{array}\right]$$

اکنون $\frac{1}{2}(s+2)$ برابر ستون سوم را با ستون دوم جمع می‌کنیم و پس از آن ستون‌های ۲ و ۳ را جابه‌جا می‌کنیم، در نهایت به دست می‌آوریم

$$\left[\begin{array}{cc:cc} s & 0 & 0 & 0 \\ s+2 & 2s & 0 & 0 \end{array}\right]$$

لذا بزرگ‌ترین عامل چپ مشترک MFD عبارت است از

$$R(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ s+2 & 2s \end{bmatrix}$$

توجه کنید که

$$N_L(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ s+2 & 2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s+1 \\ 0 & -\frac{1}{2}s-1 \end{bmatrix}$$

$$D_L(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ s+2 & 2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & s+1 \\ 1 & -\frac{1}{2}s-1 \end{bmatrix}$$

بنابراین MFD های جدید عبارتند از

$$\bar{N}_L(s) = \begin{bmatrix} 1 & s+1 \\ 0 & -\frac{1}{2}s-1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{D}_L(s) = \begin{bmatrix} -1 & s+1 \\ 1 & -\frac{1}{2}s-1 \end{bmatrix}$$

و بزرگترین مقسوم علیه مشترک عبارتست از:

$$R(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ s+2 & 2s \end{bmatrix}$$

پایان فصل دوم