تحلیل طراحی سیستم های کنترل چند متغیره در حوزهٔ فضای حالت

مروری بر مفهوم کنترل پذیری

سیستمی با فضای حالت شکل مقابل که دارای m ورودی و l خروجی است را در نظر بگیرید.

$$\dot{X} = AX + BU$$
$$Y = CX + DU$$

$$A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times m}, C \in R^{l\times n}$$
$$\operatorname{rank}B = m, \operatorname{rank}C = l$$

سیستم را کنترل پذیر حالت گویند اگر برای هر زمان t_0 ، بتوان یک بردار ورودی $u(t)$ را به گونه ای پیدا کرد که هر حالت اولیهٔ $x(t_0)$ را به هر حالت نهایی $x(t)$ در زمان محدود انتقال دهد.

نکته : با توجه به مفهوم فوق، ۳ نتیجه زیر برای یک سیستم کنترل پذیر حالت بدست می آید.

۱) ماتریس کنترل پذیری دارای رتبهٔ کامل است

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

۲) ماتریس $[SI - A \quad B]$ برای تمام S های متعلق به فضای اعداد مختلط دارای رتبهٔ کامل است.

۳) گرامیان کنترل پذیری

$$w_c(t) = \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau$$

برای هر $t > 0$ ، مثبت معین است.

معرفی اندیس های کنترل پذیری

با توجه به تعریف $B=[b_1,b_2,\ldots\ldots,b_m]$ و یادآوری ماتریس کنترل‌پذیری

$$\phi_c = \begin{bmatrix} b_1 \cdots b_m & Ab_1 \cdots Ab_m & \cdots & A^{n-1}b_1 \cdots A^{n-1}b_m \end{bmatrix}$$

که دارای بُعد $n\times nm$ است. بنابراین با فرض کنترل‌پذیر بودن سیستم، حداکثر n ستون مستقل خطی می‌توان در بین آنها یافت.

این بردارها با b_1 شروع شده و ممکن است برخی یا تمام بردارهای
$b_1, b_2, \ldots, b_m$ را شامل شود. هم چنین این امکان وجود دارد که
تعدادی از بردارهای Ab_1 تا $A^{n-1}b_m$ نیز جزء این بردارها باشند
برای یافتن اندیس های کنترل پذیری به صورت زیر عمل می‌گردد.
۱- تشکیل ماتریس کنترل پذیری $\mathcal{L}_c$
۲- دسته بندی بردارهایی از $\mathcal{L}_c$ که به صورت مستقل خطی از یکدیگرند

$$b_1, Ab_1, \ldots, A^{\mu_1-1}b_1$$
$$\vdots$$
$$b_i, Ab_i, \ldots, A^{\mu_i-1}b_i$$

i ممکن است ۲، ... و m باشد
$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i$ را اندیس های کنترل پذیری می نامند controlability indices
نکته مهم (۱): $b_1, b_2, \ldots, b_i$ باید مستقل خطی از هم باشند.
نکته مهم (۲): اگر سیستم کنترل پذیر باشد آنگاه

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i = n$$

تعریف اندیس کنترل پذیری controlability index

$$\nu_c = \max \mu_i \; (i=1,\ldots,m)$$

- **یک مثال**

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}(t)$$

ماتریس کنترل‌پذیری سیستم عبارتست از

$$\Phi_c = [B \quad AB] = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} b_1 & b_2 & Ab_1 & Ab_2 \end{matrix} \end{array}$$

رتبه Φ_c برابر ۲ است و لذا سیستم کنترل‌پذیر حالت است. توجه کنید که b_1 و Ab_1 مستقل خطی می‌باشند و لذا $\mu_1=2$ می‌باشد و در این حالت b_1 و b_2 وابسته خطی می‌باشند.

یک مثال

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -21 & 5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

ماتریس کنترل‌پذیری سیستم عبارتست از

$$\Phi_c = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 8 & 3 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 4 & -21 & -14 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} b_1 & b_2 & Ab_1 & Ab_2 & A^2b_1 & A^2b_2 & A^3b_1 & A^3b_2 \end{matrix} \end{array}$$

رتبه Φ_c برابر ۴ است و لذا سیستم کنترل‌پذیر حالت است. داریم

$$b_1 \ , \ b_2 \ , \ Ab_1 \ , \ Ab_2$$

بردارهای مستقل خطی هستند و لذا

$$b_1 \ , \ Ab_1 \quad \Rightarrow \quad \mu_1=2$$

$$b_2 \ , \ Ab_2 \quad \Rightarrow \quad \mu_2=2$$

و $\mu_1+\mu_2=4$.

مروری بر مفهوم رویت پذیری

سیستمی با فضای حالت شکل مقابل

$$\dot{X} = AX + Bu$$

$$y = CX + Du$$

را بر روی بازه زمانی $t_0 < t < T$ کاملاً رویت پذیر گویند اگر برای هر t_0 و T، هر بردار حالت $x(t_0)$ را بتوان از داده های بردار خروجی $y(t)$ که بر روی بازه $t_0 < t < T$ بدست آمده تعیین کرد

نکته: با توجه به مفهوم فوق، ۳ نتیجه زیر برای یک سیستم رویت پذیر بدست می آید.

۱) ماتریس رویت پذیری دارای رتبهٔ کامل است.

$$\mathcal{Q}_o=[C^T \quad A^TC^T \quad \dots (A^T)^{n-1}C^T]$$

۲) ماتریس $\begin{bmatrix} sI-A \\ C \end{bmatrix}$ برای تمام sهای متعلق به فضای اعداد مختلط دارای رتبه کامل است.

۳) گرامیان رویت پذیری

$$W_o(t)=\int_0^t e^{A\tau}BB^T e^{A^T\tau}\,d\tau$$

$$W_o(t)=\int_0^t e^{A^T\tau}C^TCe^{A\tau}\,d\tau$$

برای هر $t>0$، مثبت معین است

معرفی اندیس های رویت پذیری

با توجه به تعریف $C^T=[c_1^T, c_2^T, \dots, c_l^T]$ و یادآوری ماتریس رویت پذیری

$$\mathcal{Q}_o=[c_1^T \; c_2^T \dots c_l^T \; A^Tc_1^T \dots (A^T)^{n-1}c_1^T \dots (A^T)^{n-1}c_l^T]$$

که دارای بُعد $n\times nl$ است. بنابراین با فرض ~~کنترل پذیر~~ رویت پذیر بودن سیستم، حداکثر n ستون مستقل خطی می توان در بین آنها یافت.

این بردارها با c_1^T شروع شده و ممکن است برخی یا تمام بردارهای $c_1^T, c_2^T, \dots, c_l^T$ را شامل شود. هم چنین این امکان وجود دارد که تعدادی از بردارهای $A^Tc_1^T$ تا $(A^T)^{n-1}c_l^T$ نیز جزء این بردارها باشند.

برای یافتن اندیس های رویت پذیری به صورت زیر عمل می گردد.

۱. تشکیل ماتریس رویت پذیری $\mathcal{Q}_o$

۲. دسته بندی بردارهایی از $\mathcal{Q}_o$ که به صورت مستقل خطی از یکدیگرند

$$C_1^T,\ A^T C_1^T \cdots\cdots (A^T)^{\mu_1-1} C_1^T$$
$$\vdots$$
$$C_i^T,\ A^T C_i^T \cdots\cdots (A^T)^{\mu_i-1} C_i^T$$

که i ممکن است ۱، ۲، ... ، l باشد.

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l$ را اندیس های رویت پذیری می نامند

نکته ۱: C_1^T ، C_2^T ، ... ، C_i^T باید مستقل خطی از هم باشند

نکته ۲: اگر سیستم رویت پذیر باشد آنگاه

$$\sum_{i=1}^{l} \mu_i = n$$

مثال: سیستم روبرو را درنظر بگیرید.

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) \quad , \quad y(t)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} x(t)$$

اندیس های رویت پذیری را بیابید.

$$Q_0=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 3 & 7 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

رتبه این ماتریس 2 است. بنابراین سیستم رویت ناپذیر است.
ملاحظه می گردد که تنها C_1^T ، C_2^T مستقل خطی از هم هستند

اندیس های رویت پذیری $\leftrightarrow$ $\mu_1=1$ و $\mu_2=1$

صفر های دکوپله ی ورودی

بازاء آن مقادیر s که ماتریس $P_I(s)=[sI-A \quad B]$ دارای کاهش رتبه می گردد (دارای رتبه کمتر از n می گردد) صفر دکوپله ورودی تعریف می گردد.

نکته مهم: این ماتریس زمانی دارای کاهش رتبه می گردد که $sI-A$ رتبه اش کاهش یابد. بنابراین صفر دکوپله ورودی زیرمجموعه ای از قطب های سیستم است.

صفرهای دکوپلینگ خروجی

آن مقادیر s که باعث می‌گردد ماتریس

$$P_o(s) = \begin{bmatrix} sI-A \\ C \end{bmatrix}$$

دارای کاهش رتبه گردد به عنوان صفر دکوپلینگ خروجی معرفی می‌گردد.

نکته: این ماتریس ($P_o(s)$) نیز زمانی رتبه‌اش تقلیل می‌یابد که رتبه‌ی $sI-A$ کم شود و این مسئله بیان می‌کند که صفرهای دکوپلینگ خروجی زیرمجموعه‌ای از قطب های سیستم است.

صفر دکوپلینگ خروجی/ورودی

آن مقداری که هم به عنوان صفر دکوپلینگ ورودی حساب شده و هم به عنوان صفر دکوپلینگ خروجی را صفر دکوپلینگ خروجی/ورودی می‌گوییم

نکته مهم: در حقیقت صفرهای دکوپلینگ ورودی یا خروجی، آن دسته از صفرهای ماتریس تابع تبدیل سیستم هستند که قابلیت حذف با قطب‌های سیستم را دارا می‌باشند

تعریف جدیدی برای تعیین تعداد صفرها و قطب‌های سیستم

صفرهای سیستم = صفرهای انتقال + صفرهای دکوپلینگ ورودی + صفرهای دکوپلینگ خروجی – صفرهای دکوپلینگ ورودی/خروجی

بنابراین صفرهای سیستم علاوه بر صفرهای انتقال سیستم، صفرهای دکوپلینگ را نیز شامل خواهد شد

نکته: صفرهای انتقال پس از حذف صفر و قطب‌های یکسان محاسبه می‌شوند

قطب‌های سیستم: قطب‌های ماتریس تابع تبدیل + صفرهای دکوپلینگ ورودی + صفرهای دکوپلینگ خروجی – صفرهای دکوپلینگ ورودی/خروجی

مفهوم صفرهای دکوپله

الف - صفرهای دکوپله ورودی

می توان نشان داد که اگر s_0 یک صفر دکوپله ورودی باشد آنگاه رتبه $(s_0I-A)^{-1}B$ کمتر از n خواهد بود. بنابراین کنترل پذیری سیستم با این ورودی با فرکانس s_0 دارای اشکال خواهد بود.

نکته: عبارت $(sI-A)^{-1}B$ درحقیقت همان عبارت سمت راست ماتریس تابع تبدیل سیستم $(G(s)=C(sI-A)^{-1}B)$ است که در $U(s)$ ضرب می گردد.

ب) صفر دکوپله خروجی

می توان نشان داد که اگر s_0 یک صفر دکوپله خروجی باشد آنگاه رتبه $C(s_0I-A)^{-1}$ کمتر از n خواهد بود. لذا رویت پذیری سیستم با این خروجی هایی که در این فرکانس (s_0) واقع می شوند دارای اشکال خواهد بود. منظور از اشکال آن است که اندازه گیری خروجی به طور موثری در این فرکانس انجام نمی پذیرد.

نکته: عبارت $C(sI-A)^{-1}$ درحقیقت همان عبارت سمت چپ ماتریس تابع تبدیل سیستم است که $Y(s)$ از چپ در آن ضرب می گردد.