

طراحی کنترل کننده های چندمتغیره به روش حلقه بستن ترتیبی

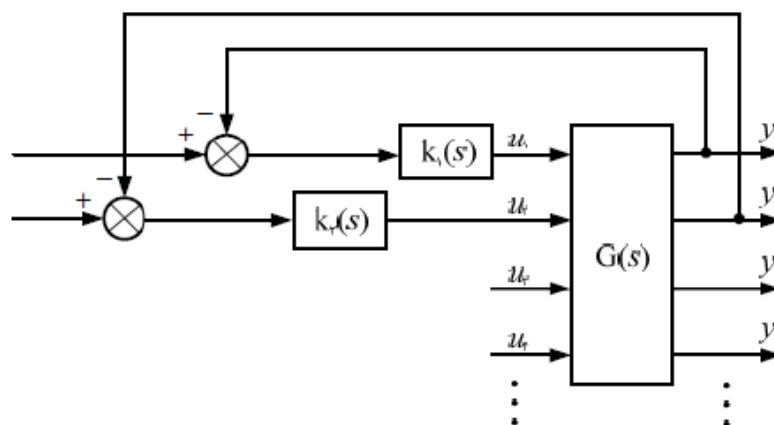
یک روش ساده در طراحی سیستم های کنترل چندمتغیره، نادیده گرفتن تداخل در سیستم و برخورد با آن ها به صورت سیگنال های اغتشاشی است. برای نمونه برای یک سیستم دو ورودی و دو خروجی داریم

$$y_1(s) = g_{11}(s)u_1(s) + g_{12}(s)u_2(s)$$

که اگر عبارت $g_{12}(s)u_2(s)$ را با $d_1(s)$ به عنوان یک اغتشاش جایگزین کنیم داریم

$$y_1(s) = g_{11}(s)u_1(s) + d_1(s)$$

و حال می توان $u_1(s)$ را چنان طراحی کرد که سیستم یک ورودی و یک خروجی $g_{11}(s)$ در حلقه بسته پایدار و در حد امکان اغتشاش $d_1(s)$ را پس زند. با بستن این حلقه، اکنون به سراغ حلقه دوم رفته و $u_2(s)$ را با نادیده گرفتن تداخل از حلقه اول (در نظر گرفتن آن به صورت یک عبارت اغتشاشی) به گونه ای طراحی می کنیم که سیستم حلقه بسته پایدار و در حد امکان عملکرد مناسبی نیز داشته باشد. توجه کنید که شرط اصلی این طراحی امکان نادیده گرفتن تداخل ها در سیستم چندمتغیره است. در حالت کلی یک کنترل کننده SISO برای یک جفت ورودی و خروجی طراحی می شود. پس از تکمیل طراحی اول، کنترل کننده SISO دیگری برای حلقه دوم و دومین جفت از ورودی ها و خروجی ها طراحی می شود. سپس کنترل کننده SISO بعدی برای حلقه سوم طراحی می شود و این روند تا تکمیل شدن طراحی و بستن تمام حلقه های کنترلی ادامه پیدا می کند. شمای کلی این طراحی در شکل زیر نشان داده شده است.



روش حلقه بستن ترتیبی در طراحی سیستم های کنترل چندمتغیره

این رویکرد طراحی در بسیاری از سیستم های صنعتی به کار گرفته شده است. واحدهای صنعتی که در آنها به دلایلی لازم است کنترل کننده های محلی جدای از هم و بدون برهم کنشی نسبت به هم طراحی و پیاده سازی شوند، ماتریس کنترل کننده ای قطری خواهند داشت و حلقه بستن ترتیبی راهکاری مناسب برای طراحی چنین سیستم های کنترلی است. از آنجا که با بستن هر حلقه، روند طراحی پایداری سیستم را در آن مرحله تضمین می کند، در عمل پیاده سازی این روش بسیار مناسب است. خصوصاً در کنترل فرآیندها این یک مزیت عمده به شمار می رود.

پیش نیاز اصلی این روش انتخاب پیکربندی مناسب برای سیستم است. اگر جفت ورودی و خروجی در نظر گرفته شده برای طراحی مناسب نباشند، عملکرد و حتی پایداری حلقه بسته سیستم به مخاطره جدی می افتد. اما با بهترین انتخاب پیکربندی، می توان به بهترین عملکرد ممکن در چارچوب این روش طراحی دست پیدا کرد. هنگامی این روش به خوبی کار می کند که سیستم تداخل قوی نداشته باشد و به ویژه اگر پهنای باند حلقه ها با هم متفاوت باشند. در این صورت باید طراحی را نخست از حلقه های سریع شروع کرد و سپس به طراحی حلقه های کندتر پرداخت. اگر ابتدا حلقه ای سریع را ببندیم، با توجه به بهره حلقه بالا در این فرکانس ها، بستن حلقه های کندتر دینامیک آنها را تحت الشعاع قرار نمی دهد و تداخل با حلقه های سریع در طراحی حلقه های کندتر در نظر گرفته شده است. توجه به این نکته ضروری است که مسأله طراحی ممکن است پاسخی نداشته باشد. برای نمونه اگر به مثال بخش قبل مراجعه نمائید، در حالت $\alpha = 0/1$ نمی توان از یک کنترل کننده قطری مناسب استفاده کرد، زیرا در این مثال هیچ پیکربندی کنترلی مناسبی وجود ندارد. لذا استفاده از کنترل متمرکز پیشنهاد می گردد.

مثال: ماتریس تابع تبدیل سیستم داده شده زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

RGGA حالت ماندگار متناظر عبارت است از

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

و لذا $(u_1 \leftrightarrow y_1 \quad u_2 \leftrightarrow y_2)$ جفت مناسب برای کنترل غیرمتمرکز سیستم است. نخست اولین حلقه کنترلی را با کنترل کننده انتگرالی k_1/s می بندیم. داریم

$$y_1 = \frac{2}{s+1}u_1 + \frac{1}{s+1}u_2 = \frac{2k_1}{s(s+1)}(r_1 - y_1) + \frac{1}{s+1}u_2$$

که می دهد

$$y_1 = \frac{2k_1}{s^2 + s + 2k_1}r_1 + \frac{s}{s^2 + s + 2k_1}u_2$$

برای $k_1 = 1$ ، خروجی اول ورودی های مرجع پله ای r_1 را بدون خطا دنبال می کند اکنون به طراحی حلقه دوم می پردازیم. نخست باید تابع تبدیل از r_2 به y_2 را پس از بستن حلقه اول به دست آوریم. داریم

$$y_2 = \frac{1}{s+1}u_1 + \frac{1}{s+1}u_2$$

و با جایگزینی برای u_1 داریم

$$y_2 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2(s+1)}u_2$$

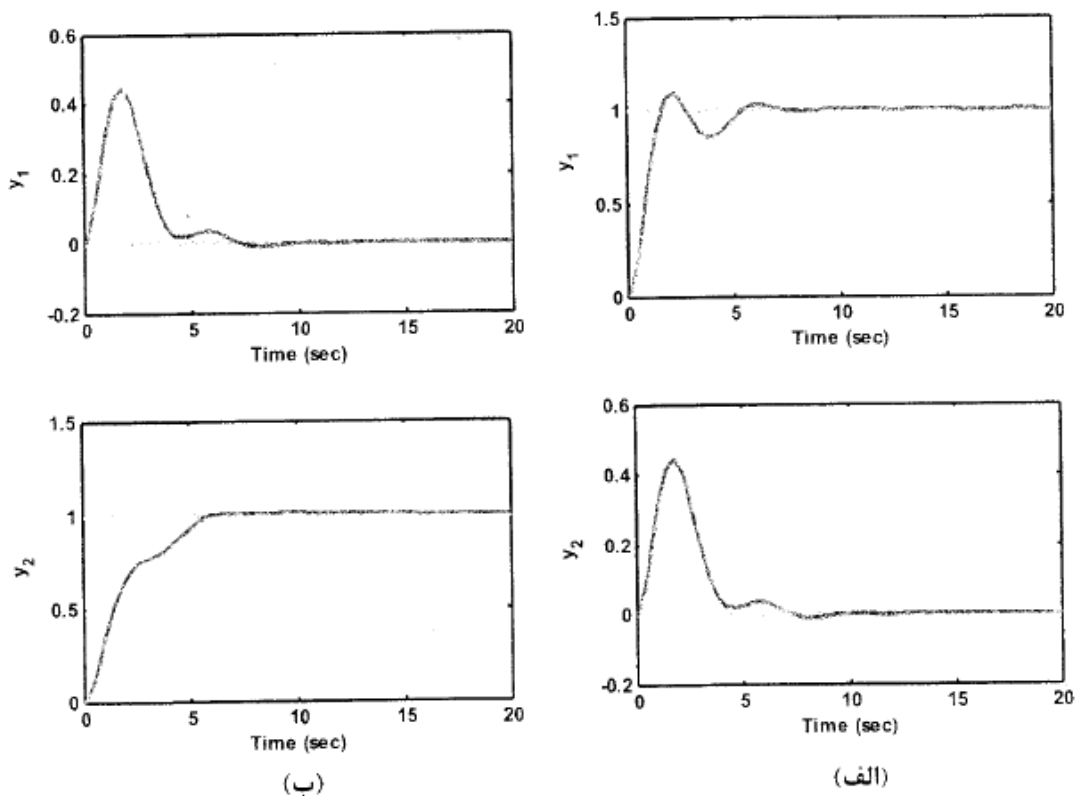
اکنون با جایگزینی برای y_1 به دست می آوریم

$$y_2 = \frac{s^2 + s + 1}{(s+1)(s^2 + s + 2)}u_2 + \frac{1}{s^2 + s + 2}r_1$$

با طراحی $u_2 = \frac{k_2}{s}(r_2 - y_2)$ داریم

$$y_r = \frac{k_r (s^2 + s + 1)}{d_r(s)} r_r + \frac{s(s+1)}{d_r(s)} r_1$$

که در آن $d_r(s) = s^4 + 2s^3 + (3 + k_r)s^2 + (2 + k_r)s + k_r$ لذا برای تمام $k_r > 0$ ، ورودی های مرجع پله ای r_r را بدون خطا ردیابی می کند. پاسخ های پله سیستم حلقه بسته برای $[1 \ 0]^T$ و $[0 \ 1]^T$ در شکل زیر رسم شده اند.



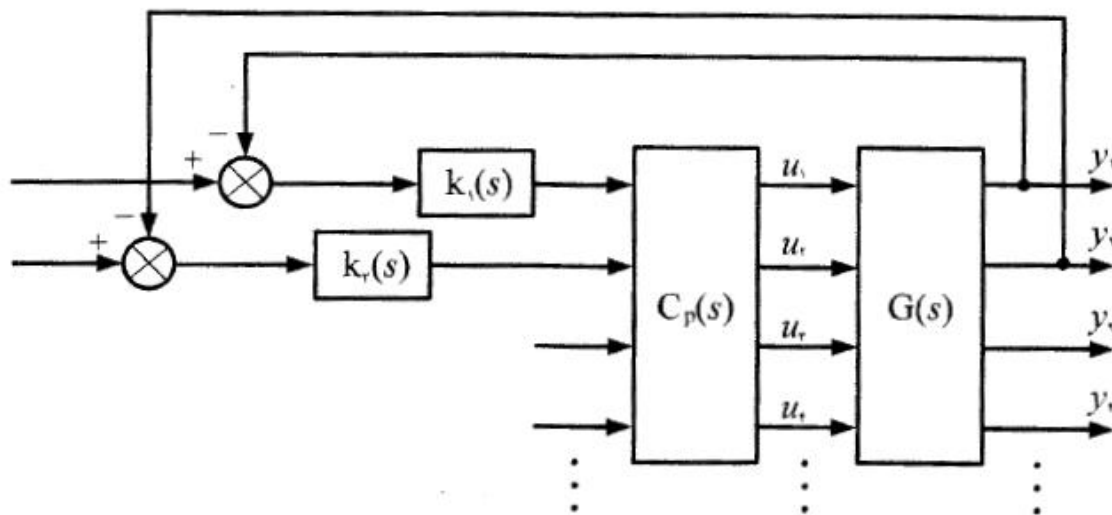
طراحی ماتریس های پیش جبران ساز برای حل دشواری کنترل

با وجود کاربردهای فراوان کنترل غیرمتمرکز و روش حلقه بستن ترتیبی که در بخش قبل ارائه گردید، این روش محدودیت های جدی نیز دارد. آنچه که دشواری کنترل نامیده می شود، کاربری این طراحی ها را ناموفق می کند. برای نمونه دو دشواری کنترل که در بسیاری از سیستم های کنترل چندمتغیره کاربرد کنترل کننده های قطری را مسأله دار می کنند عبارتند از

- وجود صفرهای عنصر نیمه راست صفحه در سیستم های چندمتغیره می نیمم فاز
- تداخل شدید در حلقه های کنترلی

سیستم چندمتغیره می نیمم فازی (با صفرهای انتقال در نیمه چپ صفحه) را در نظر بگیرید که در یک ردیف یا ستون آن صفرهای عنصر نیمه راست صفحه وجود دارند. یا صفر عنصر نیمه راست صفحه ای در جفت ورودی و خروجی که باید انتخاب شود، داشته باشد. در این حالت با وجود می نیمم فاز بودن سیستم، صفرهای نیمه راست صفحه عنصر محدودیت یک سیستم غیرمی نیمم فاز را بر طراحی اعمال می کنند. در این حالت می توان با طراحی یک ماتریس پیش جبران ساز، دشواری کنترل ناشی از صفر عنصر نیمه راست صفحه را بر طرف کرد. در حالت کلی ماتریس تابع تبدیل جبران ساز به شکل زیر خواهد بود

$$C(s) = C_p(s)K(s)$$



استفاده از پیش جبران ساز برای حل دشواری کنترل

که در آن $C_p(s)$ یک ماتریس پیش جبران ساز و $K(s)$ ماتریس قطری از جبران سازهای SISO است. شمای کلی این روش طراحی در شکل فوق نشان داده شده است.

مثال: ماتریس تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} 1-s & \frac{1}{3}-s \\ 2-s & 1-s \end{bmatrix}$$

این سیستم ۴ صفر عنصر نیمه راست صفحه دارد و با هر انتخاب پیکربندی کنترلی اولین تابع تبدیل SISO که در نظر گرفته شود غیرمی نیمم فاز است

با محاسبه صورت اسمیث مک میلان $G(s)$ ملاحظه می گردد که تنها یک صفر انتقال در ۱ دارد و لذا ماتریس تابع تبدیل می نیمم فاز است.

بنابراین طراحی نباید با مشکل صفر نیمه راست صفحه روبرو شود. لذا از ساختار نشان داد شده در شکل صفحه قبل استفاده می کنیم. با انتخاب

$$Y=G(s)U(s)$$

$$U(S)=G_p(s)m(s)$$

$$Y(s)=G(s)G_p(s)m(s)$$

حاصل ضرب باید حتماً به صورت $G(s)G_p(s)$ باشد و برعکس آن صادق نیست.

$$C_p(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

داریم

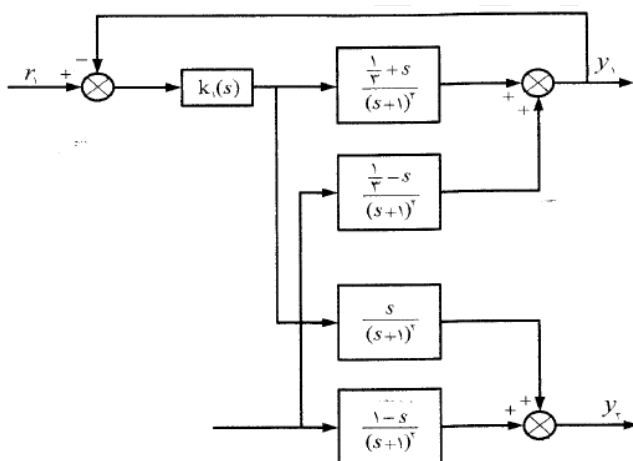
$$G(s)C_p(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} + s & \frac{1}{3} - s \\ s & 1 - s \end{bmatrix}$$

و لذا اگر از ورودی اول برای کنترل خروجی اول استفاده کنیم تابع تبدیل درآیه (۱,۱) می نیمم فاز است. شکل زیر اولین مرحله از طراحی حلقه بستن ترتیبی را برای سیستم جبران شده نشان می دهد. با بستن حلقه اول، تابع تبدیلی که در درآیه ی (۲,۲) ظاهر می شود عبارت است از

$$\frac{1-s}{(s+1)^2} + \frac{s}{(s+1)^2} h(s) \frac{\frac{1}{3} - s}{(s+1)^2}$$

که در آن

$$h(s) = \frac{-k_1(s)}{1 + \left[\left(\frac{1}{3} + s \right) / (s+1)^2 \right] k_1(s)}$$



با توجه به می نیمم فاز بودن حلقه اول، $k_1(s)$ را می توان بهره بالا طراحی کرد. لذا فرض می کنیم که

$$|k_1(s)| \gg \left| (s+1)^2 / \left(\frac{1}{3} + s \right) \right|$$

$$h(s) \approx -(s+1)^2 / (\frac{1}{3} + s)$$

و بدین ترتیب تابع تبدیل حلقه دوم پس از بستن حلقه اول چنین می شود

$$\frac{1}{(3s+1)(s+1)}$$

بنابراین مشاهده می شود که حلقه دوم نیز تابع تبدیلی می نیمم فاز دارد و برای آن می توان کنترل کننده ای مناسب طراحی کرد. لذا با طراحی مناسب C_p دشواری کنترلی را که با حضور صفرهای عنصر نیمه راست صفحه ایجاد شده بود، بر طرف کردیم.

غلبه قطری

سیستم چند متغیری را در نظر بگیرید که تداخل شدید دارد. در این حالت جبران ساز قطری نمی تواند ساده ترین مشخصه های حلقه بسته را نیز برآورده کند. در فصل چهارم دکوپله سازی قطری مطرح گردید. در آنجا دیده شد که با طراحی مناسب $C_p(s)$ ، می توان ماتریس $P(s)$ را که عبارت بود از $P(s)=G(s)C_p(s)$ به صورت قطری در آورد.

این نوع طراحی ایده آل بوده و در عمل مشکلاتی از قبیل ناپایداری قطب یا صفر $G(s)$ ، نامعینی در مدل سازی، ناسره شدن $C_p(s)$ و پیچیدگی آن روبرو می باشد و لذا به جای ایده دکوپله سازی، ایده غلبه قطری (diagonal dominance) مطرح می گردد.

تعریف: ماتریس تابع تبدیل گویای $P(s)$ را بر D غالب قطری ردیفی گویند اگر

$$|P_{ii}(s)| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |P_{ij}(s)|$$

برای $i = 1, \dots, m$ و تمام s روی D . آن را غالب قطری ستونی^۳ گویند اگر

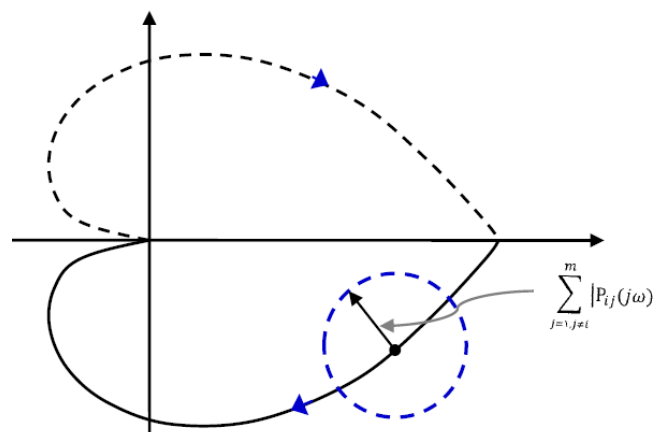
$$|P_{ii}(s)| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |P_{ji}(s)|$$

برای $i = 1, \dots, m$ و تمام s روی D .

روش ترسیمی ارزیابی غلبه قطری (ردیفی یا ستونی). با حرکت s روی مسیر نایکوئیست D ، منحنی نایکوئیست هر کدام از $P_{ij}(s)$ ها برای $i, j = 1, \dots, m$ به دست می آید. مجموعه این نمودارها را آرایه نایکوئیست $P(s)$ می گویند. در واقع، آرایه نایکوئیست ماتریس تابع تبدیل $P(s)$ ، آرایه ای از نمودارها است که (i, j) امین آنها نمودار نایکوئیست P_{ij} است. اکنون اگر در هر فرکانس، دایره ای با مرکز $P_{ii}(j\omega)$ و شعاع

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |P_{ij}(s)| \quad \text{یا} \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |P_{ji}(s)|$$

رسم کنیم، سیستم چندمتغیره در صورتی که این دایره ها، مبدا را دربر نگیرند، غلبه قطری ردیفی یا ستونی خواهد بود. شکل زیر یک چنین ترسیمی را برای یک فرکانس نشان می دهد.



این دایره ها را دایره های گرشگورین می نامند و باندهایی را که از تشکیل این دایره ها در فرکانس های مختلف ایجاد می شود، باندهای گرشگورین می نامند. بدیهی است که برای غلبه قطری (ستونی یا ردیفی) هیچ کدام از این باندها نباید مبدا را شامل شوند.

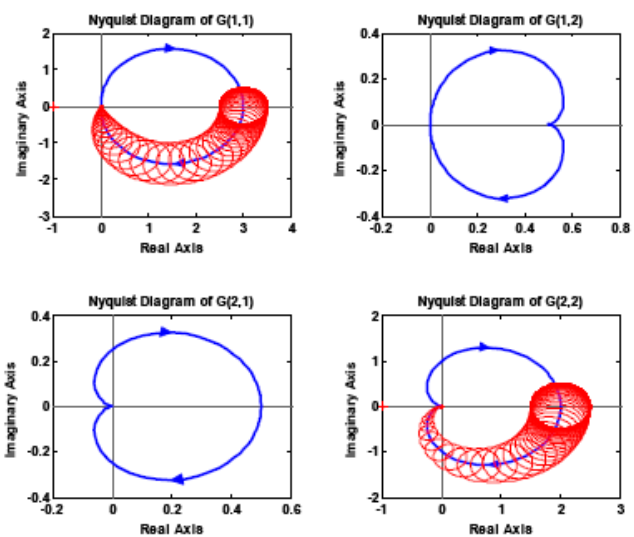
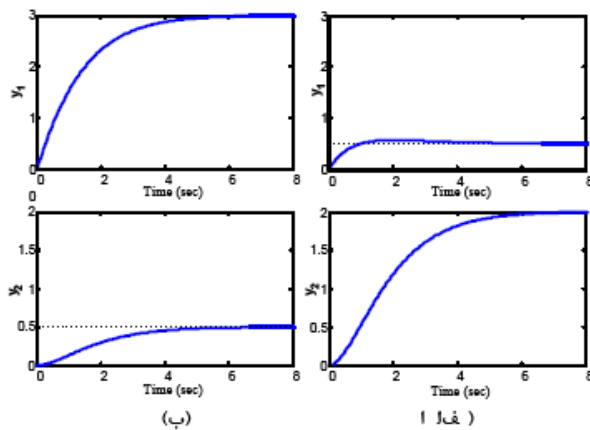
مثال: دو ماتریس تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \begin{bmatrix} 2s + 3 & s + 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix}$$

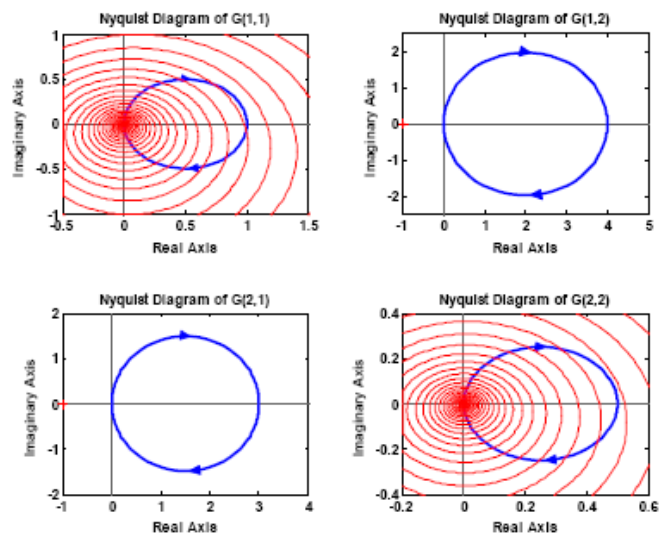
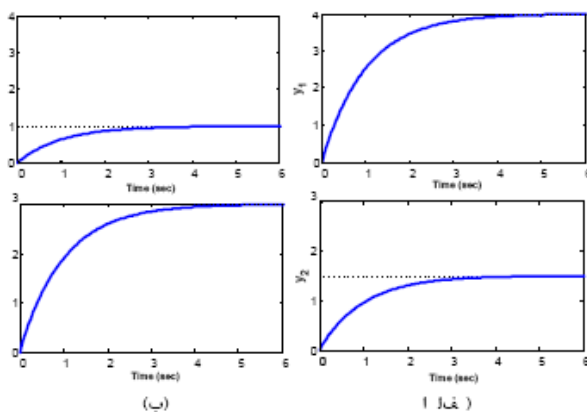
$$G_2(s) = \frac{1}{s + 1} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

آرایه های نایکوئیست $G_1(s)$ و $G_2(s)$ با باندهای گرشگورین برای $G_1(s)$ و $G_2(s)$ به ترتیب در شکل های بعدی نشان داده شده اند. همان طور که از این شکل ها مشاهده می شود، $G_1(s)$ یک سیستم غالب قطری است و حال آن که سیستم $G_2(s)$ غلبه قطری ندارد. اکنون پاسخ های پله این دو سیستم را برای ورودی های $[1 \ 0]^T$ و $[0 \ 1]^T$ رسم می کنیم. این پاسخ ها در شکل های صفحه بعد به ترتیب برای $G_1(s)$ و $G_2(s)$ رسم شده اند. همان طور که از شکل های پاسخ به خوبی مشاهده می گردد، تداخل در $G_1(s)$ به مراتب کمتر از تداخل در $G_2(s)$ است.

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \begin{bmatrix} 2s + 2 & s + 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix}$$



$$G_2(s) = \frac{1}{s + 1} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0.5 \end{bmatrix}$$



در صورتی که تداخل در سیستم شدید باشد، طراحی در دو مرحله انجام خواهد پذیرفت.

مرحله اول: ماتریس پیش جبران سازی مانند $C_p(s)$ چنان طراحی می گردد که سیستم جبران شده $P(s)C_p(s)$ غلبه قطری گردد.

مرحله ۲ ماتریس قطری کننده $K(s) = \text{diag}\{k_1(s), \dots, k_m(s)\}$ را چنان طراحی کنید که سیستم حلقه بسته پایدار و خروجی های سیستم ورودی های مرجع داده شده را ردیابی کنند.

یکی از مشکلات استفاده از روش طراحی بالا، انتخاب یا طراحی ماتریس $C_p(s)$ است. در مراجع بسیاری به این موضوع پرداخته شده است و روش هایی نیز برای انتخاب آن ارائه شده است [7] و [8]. در اینجا از ورود به جزئیات این طراحی ها پرهیز می کنیم. تنها اشاره می شود که $C_p(s)$ می تواند در حالت کلی استاتیک یا دینامیک باشد. از جمله انتخاب های استاتیک برای $C_p(s)$ می توان به موارد زیر اشاره کرد

$$C_p(s) = (CB)^{-1}$$

این انتخاب (در صورت ناویژه بودن اولین پارامتر مارکوف سیستم)، سیستم را در فرکانس های بالا غلبه قطری خواهد کرد. توجه کنید که داریم

$$G(s) \rightarrow \frac{CB}{s} \quad |s| \rightarrow \infty$$

و لذا

$$G(s)C_p \rightarrow \frac{I}{s} \quad |s| \rightarrow \infty$$

بنابر این، در فرکانس های بالا سیستم جبران شده به یک سیستم قطری میل می کند. یک انتخاب دیگر به صورت زیر است

$$C_p(s) = [G(s)]^{-1}$$

این انتخاب (در صورت ناویژه بودن ماتریس بهره حالت ماندگار سیستم یا کنترل پذیری تابعی سیستم در حالت ماندگار) سیستم را در فرکانس های پایین (نزدیک به) قطری می کند و می توان از کنترل کننده ای SISO برای کنترل هر حلقه استفاده کرد. هم چنین می توان از ماتریس های پیش جبران ساز زیر در فرکانس مورد نظر ω_b که پهنای باند لازمه سیستم است استفاده کرد

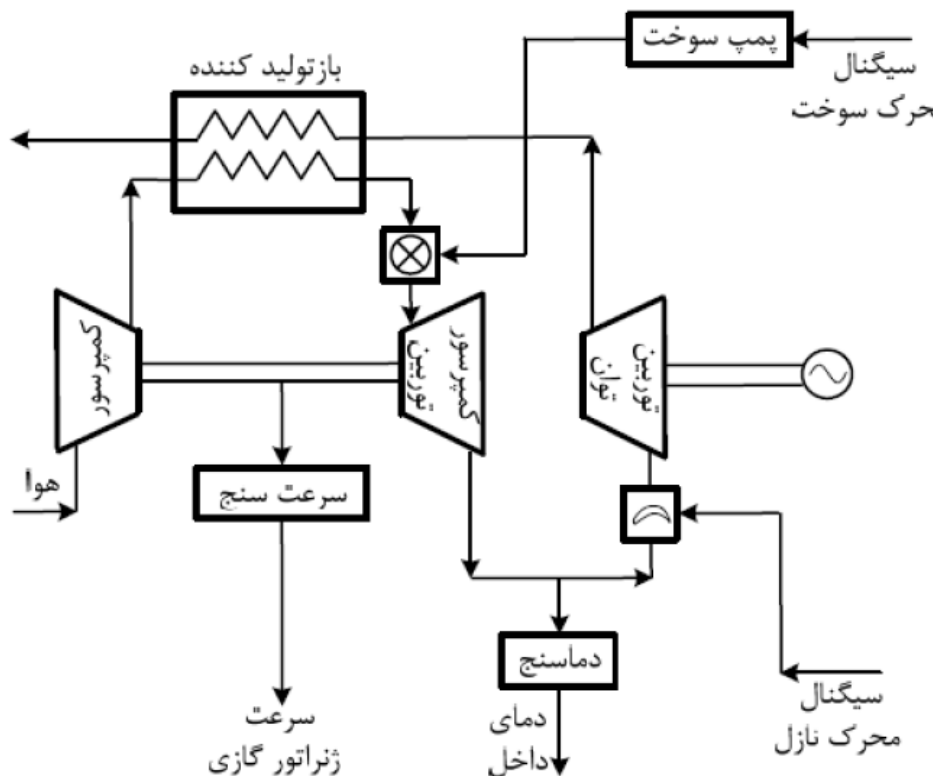
$$K_a \approx G^{-1}(j\omega_b) \quad \text{یا} \quad K_a \approx j\omega_b G^{-1}(j\omega_b)$$

در حالت کلی، انتخاب ماتریس پیش جبران ساز به صورت دینامیکی، می تواند سیستم جبران شده را در بازه وسیعی از فرکانس ها، غلبه قطری سازد.

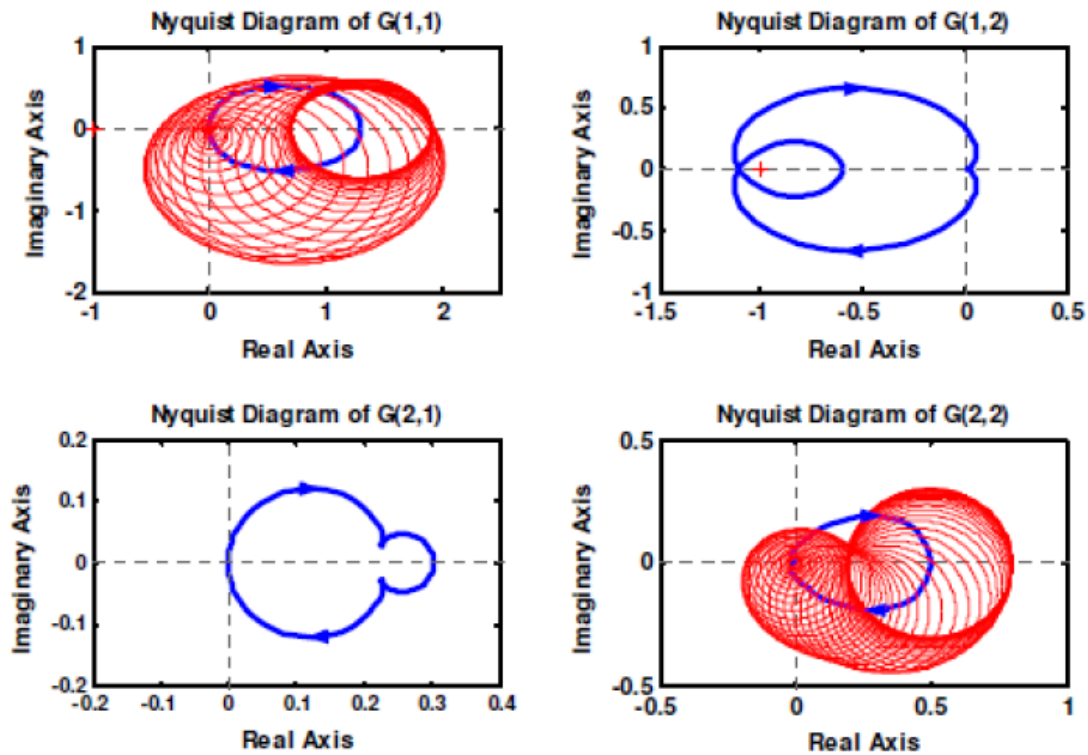
مثال: ماتریس تابع تبدیل توربین گازی که از خطی سازی معادلات غیرخطی توربین در نقطه کار ۸۰٪ سرعت ژنراتور گازی و ۸۵٪ سرعت توربین قدرت، با دو ورودی تحریک پمپ سوخت بر حسب mAmps و تحریک محرک نازل بر حسب ولت و دو خروجی سرعت ژنراتور گازی و توربین داخلی توربین، به دست آمده است عبارت است از

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{0/806s + 0/264}{s^2 + 1/15s + 0/202} & \frac{-(15s + 1/42)}{s^2 + 12/8s^2 + 13/6s + 2/36} \\ \frac{1/95s^2 + 2/12s + 0/49}{s^2 + 9/15s^2 + 9/39s + 1/62} & \frac{7/14s^2 + 25/8s + 9/35}{s^4 + 20/8s^3 + 116/4s^2 + 111/6s + 18/8} \end{bmatrix}$$

دیاگرام شماتیک این سیستم در شکل زیر نشان داده شده است و اعتبار این مدل با بررسی های غیرخطی مورد تأیید قرار گرفته است



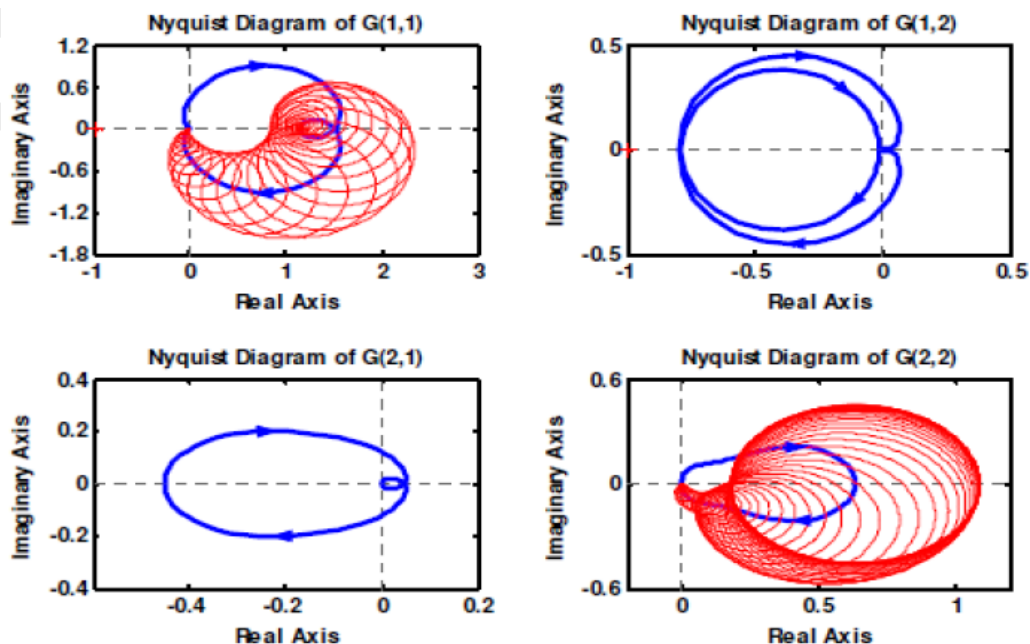
شکل بعدی آرایه نایکوئیست $G(j\omega)$ را برای ω از ۰ تا ۱۰۰ رادیان بر ثانیه نشان می دهد. با توجه به باندهای گرشگورین، تداخل شدید در توربین گازی کاملاً قابل مشاهده است و به سادگی غیر غالب قطری بودن سیستم به دست می آید



اکنون با انتخاب

$$C_p(s) = \begin{bmatrix} 0/361 & 0/45 \\ -1/13 & 1 \end{bmatrix}$$

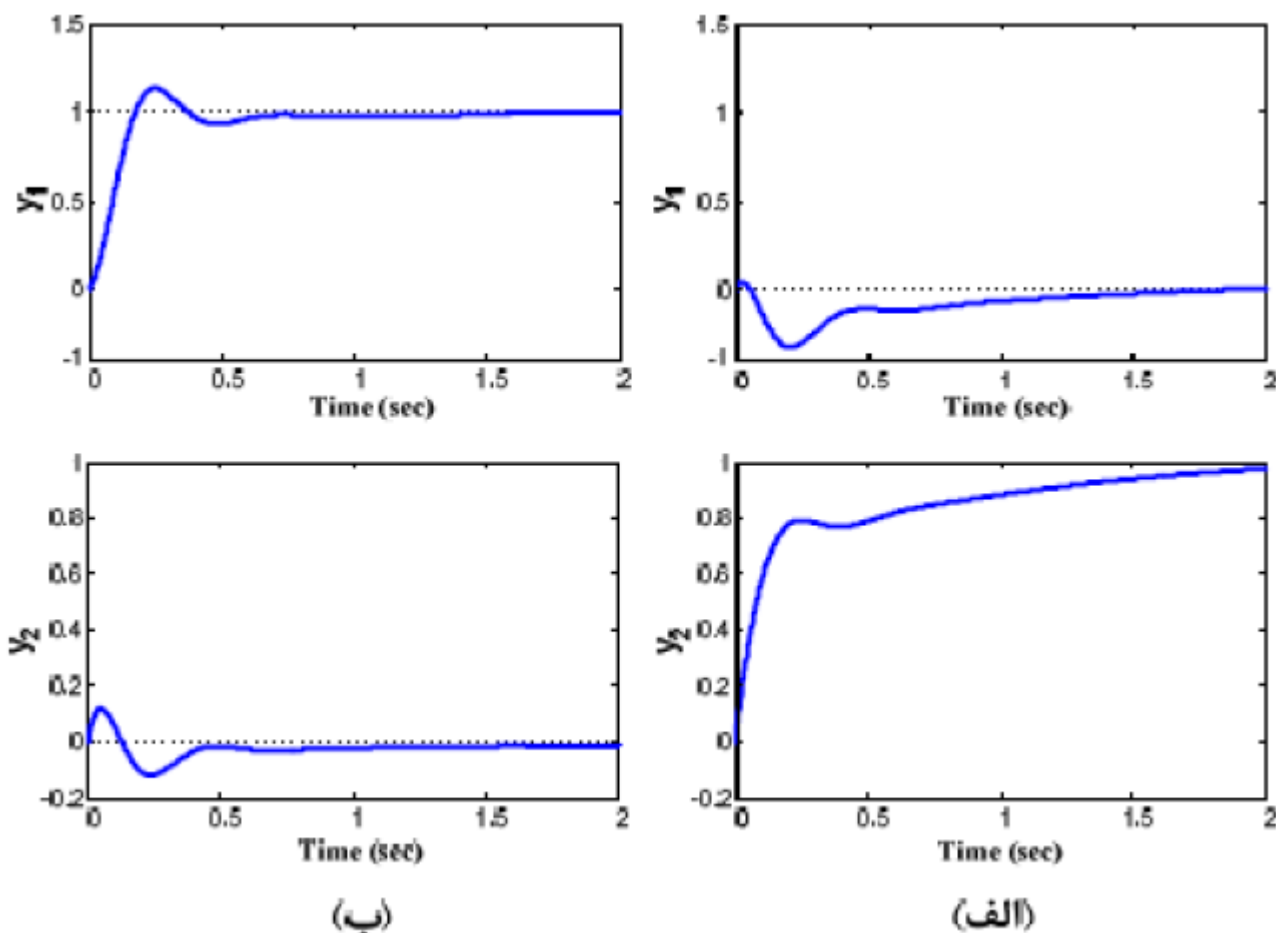
که از عملیات ردیفی روی $G(s)$ به دست آمده است. آرایه نایکوئیست سیستم جبران شده $G(j\omega)C_p$ برای همان بازه فرکانسی در شکل بعد رسم شده است. ملاحظه می گردد که با این پیش جبران سازی سیستم غالب قطری شده است. لذا می توان برای



هر کدام از حلقه ها از یک کنترل کننده PI مستقل استفاده کرد. ماتریس تابع تبدیل کنترل کننده قطری به صورت زیر است.

$$K(s) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} + \frac{1}{s} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}$$

پاسخ های سیستم حلقه بسته به ورودی های $[1 \ 0]^T$ و $[0 \ 1]^T$ در شکل زیر نشان داده شده است.



پایان فصل هفتم