ب) نمایش فضای حالت گیلبرت با ماتریس تابع تبدیل شامل قطب های حقیقی تکراری

برای سادگی بحث فرض می کنیم که ماتریس تابع تبدیل به صورت مربع ($m\times m$) بوده و سیستم تنها یک قطب مکرر با تعدد ۳ داشته باشد

در این حالت بسط کسرهای جزئی $G(s)$ به صورت زیر است

$$G(s)=\frac{1}{(s-\lambda)^3}M_1+\frac{1}{(s-\lambda)^2}M_2+\frac{1}{s-\lambda}M_3$$

نکته: چون قطب های تکراری داریم حتماً بلوک ها جردن را خواهیم داشت. تعیین تعداد بلوک های جردن و بُعد آن مسئلهٔ اصلی می باشد

برای مشخص نمودن وضعیت بلوک های جردن باید رتبهٔ ماتریس های M_1، M_2 و M_3 را یافت.

مراحل کار

توجه به اینکه ماتریس های M_1 تا M_3 دارای بُعد $m\times m$ می باشند بنابراین اگر

۱) رتبه ی ماتریس M_1 برابر r_1 باشد

یعنی می توان r_1 ردیف مستقل خطی از M_1 را پیدا کرد. این بردارهای ردیفی به صورت $\{b_{l_1}^T,\ldots,b_{lr_1}^T\}$ نشان داده می شوند

۲) رتبه ی ماتریس $\begin{bmatrix}M_1\\M_2\end{bmatrix}$ برابر r_2 باشد

در این حالت r_2 ردیف مستقل خطی از $\begin{bmatrix}M_1\\M_2\end{bmatrix}$ به صورت مستقل خطی وجود دارند

$$\{b_{l_1}^T,\ldots,b_{lr_1}^T,b_{l(r_1+1)}^T,\ldots,b_{lr_2}^T\}$$

۳) رتبه ی ماتریس $\begin{bmatrix}M_1\\M_2\\M_3\end{bmatrix}$ برابر r_3 باشد

بنابراین r_3 ردیف مستقل خطی از $\begin{bmatrix}M_1\\M_2\\M_3\end{bmatrix}$ به صورت مستقل خطی وجود دارند

$$\{b_{l_1}^T,\ldots,b_{lr_1}^T,b_{l(r_1+1)}^T,\ldots,b_{lr_2}^T,b_{l(r_2+1)},\ldots,b_{lr_3}\}$$

کاملاً واضح است که $r_1\le r_2\le r_3\le m$

۴) برای M_1، M_2 و M_3 پیشنهادهایی را ارائه می دهیم که به صورت حاصلضرب بردارهایی از C و B بیان می شوند

$$M_1 = [c_{11}\ \ c_{12}\ \ \dots\ \ c_{1l_1}] \begin{bmatrix} b_{l_1}\\ b_{l2}\\ \vdots \\ b_{lr_1}\end{bmatrix} = C^l_{r_1} B^l_{r_1}$$

$c_{11}=$ یک بردار ستونی

$b_{l_1}=$ یک بردار ردیفی

$\{b_{l_1} \dots\dots b_{lr_2}\}$ بردارهای مستقل خطی

مثال: اگر M_1 به صورت زیر باشد فرم تجزیه شده آن به صورت مقابل است.

$$M_1=\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1\ \ 1)+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(-1\ \ 1)$$

یک پیشنهاد:

برای یافتن $C^l_{r_1}$ که معمولاً به صورت سعی و خطا انتخاب می گردد استفاده از رابطه زیر است.

$$C^l_{r_1} = M_1 (B^l_{r_1})^T \left[B^l_{r_1}(B^l_{r_1})^T\right]^{-1}$$

۵) برای ماتریس های M_2، M_3 میتوان مطابق آنچه که برای M_1 بیان شد عمل نمود.

۶) تعیین بلوک های جردن

با توجه به آخرین رتبه محاسبه شده یعنی ← $r_3 = Rank\left\{\begin{bmatrix}M_1\\M_2\\M_3\end{bmatrix}\right\}$

- تعداد بلوک های جردن برابر r_3 است.
- اولین r_1 بلوک جردن، بُعدی برابر تعداد قطب متناظر با M_1 دارد
- دومین r_2-r_1 بلوک جردن، بُعدی برابر تعداد قطب متناظر با M_2 دارد
- سومین r_3-r_2 بلوک جردن، بُعدی برابر تعداد قطب متناظر با M_3 خواهد داشت

نکته مهم: تحقق بدست آمده کنترل پذیر است ولی لزوماً رویت پذیر نیست.

مثال: ماتریس تابع تبدیل زیر را درنظر گرفته و فضای حالت فرم گیلبرت آن را ارائه نمائید.

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)^2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

این سیستم با ۱ کله در $s=-1$ چهار قطب دارد. اما نیازی نیست که در فرم گسترده $G(s)$ از جمله $\frac{1}{(s+1)^4}$ و یا جمله $\frac{1}{(s+1)^3}$ استفاده شود چرا که در $G(s)$ حداکثر عبارت $\frac{1}{(s+1)^2}$ وجود دارد.

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)^2}M_1+\frac{1}{s+1}M_2$$

$$\Rightarrow M_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\qquad M_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

همانطور که ملاحظه می‌گردد، رتبه M_1 برابر ۲ می‌باشد

$$r_1=Rank\{M_1\}=2$$

با توجه به ساختار M_2 بنابراین

$$r_2=Rank\left\{\begin{bmatrix}M_1\\ M_2\end{bmatrix}\right\}=2$$

r_2 آخرین رتبه محاسبه شده خواهد بود. بنابراین طبق بند ۶ داریم

تعداد بلوک جردن $=r_2=2$

- از طرفی طبق همان بند ۶،

r_1 بلوک جردن یعنی اولین ۲ بلوک جردن تجزی برابر با تعداد قطب متناظر با M_1 یعنی ۲ دارد. (به فرم $G(s)$ دقت کنید)

همچنین دومین r_2-r_1 یعنی صفر بلوک جردن تجزی برابر با تعداد قطب متناظر M_2 (یعنی ۱) دارد.

بنابراین فرم کلی فضای حالت به قرار زیر است.

$$\dot{x}(t)=\left[\begin{array}{cc|cc}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{array}\right]x(t)+\left[\begin{array}{cc}0 & 0\\ 1 & 1\\ \hline 0 & 0\\ -1 & 1\end{array}\right]$$

$$y(t)=\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right]$$

توجه: ستون‌های دوم و چهارم ماتریس خروجی از صفر بودن M_2 ناشی شده است.
و ردیف‌های اول و سوم ماتریس ورودی براساس ساختار کانونیک فرم جردن نوشته شده است.

مثال : برای ماتریس تابع تیدیل زیر ، فضای حالت گیلبرت را ارائه دهید.

$$G(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{(s+1)^2} & \frac{1}{(s+2)} \\ \frac{1}{(s+1)} & \frac{1}{(s+2)}\end{bmatrix} \Rightarrow M(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{(s+1)^2(s+2)} & 0 \\ 0 & s\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow G(s)=\frac{1}{(s+1)^2}M_1+\frac{1}{(s+1)}M_2+\frac{1}{(s+2)}M$$

$$\Rightarrow G(s)=\frac{1}{(s+1)^2}\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}+\frac{1}{(s+1)}\begin{bmatrix}0 & 0 \\ 1 & 0\end{bmatrix}+\frac{1}{(s+2)}\begin{bmatrix}0 & 1 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow r(M_1)=1=r_1, \text{ and } M_1=\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} \text{ one Jordan block of order 2.}$$

$$\Rightarrow r(\begin{bmatrix}M_1 \\ M_2\end{bmatrix})=1=r_2, \text{ and } M_2=\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\ r_2-r_1=\text{zero Jordan block of order 1.}$$

$$\Rightarrow r(M)=1, \text{ and } M=\begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}x$$

مثال : برای ماتریس تابع تیدیل زیر ، فضای حالت گیلبرت را ارائه دهید

$$G(s)=\frac{1}{s^4}\begin{bmatrix} s^3-s^2+1 & 1 & -s^3+s^2-2 \\ 1.5s+1 & s+1 & -1.5s-2 \\ s^3-9s^2-s+1 & -s^2+1 & s^3-s-2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow G(s)=\frac{1}{s^4}M_1+\frac{1}{s^3}M_2+\frac{1}{s^2}M_3+\frac{1}{s}M_4$$

$$\Rightarrow G(s)=\frac{1}{s^4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}+\frac{1}{s^3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 1 & -1.5 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$+\frac{1}{s^2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -9 & -1 & 0 \end{bmatrix}+\frac{1}{s}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\Rightarrow r(M_1)=1=r_1,\ \text{and}\ M_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\ \text{one Jordan block of order 4.}$$

$$M_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 1 & -1.5 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\Rightarrow r(\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix})=2=r_2,\ \text{and}\ M_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

and $r_2-r_1=$ one Jordan block of order 3.

$$M_3=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -9 & -1 & 0 \end{bmatrix}\Rightarrow r(\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix})=3=r_3,\ \text{and}\ M_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

and $r_3-r_2=$ one Jordan block of order 2.

$$M_4=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\Rightarrow r(\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix})=3=r_4,\ \text{and}\ r_4-r_3=\text{zero Jordan block of order 1.}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & & & & \\ & 0 & 1 & 0 & & & & 0 & \\ & & 0 & 1 & & & & & \\ & & & 0 & & & & & \\ & & & & 0 & 1 & 0 & & \\ & & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & 0 & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 5 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} x$$

The Plant
is
Controllable
but
Unobservable

کاهش مرتبه معادلات فضای حالت:

کاهش مرتبه فضای حالت در دو صورت قابل بحث است:

الف) کاهش مرتبه فضای حالت با معادلات غیر مینیمال

در این حالت، هدف از کاهش مرتبه، حذف قطب های کنترل ناپذیر و یا رویت ناپذیر جهت بدست آوردن یک نمایش کنترل پذیر و رویت پذیر می باشد. تحقق های ارائه شده در بخش قبل همگی غیر مینیمال هستند که می توان با شناسایی صفرهای دکوپله ورودی و خروجی نمایش کنترل پذیر و رویت پذیر را ارائه نمود.

ب) کاهش مرتبه فضای حالت کنترل پذیر و رویت پذیر یا مینیمال

محور اصلی کاهش مرتبه سیستم های مینیمال، تعیین حالت هایی از سیستم است که کمتر کنترل پذیر و یا رویت پذیر هستند و سپس حذف این حالت ها مد نظر می باشد.

این مورد از نظر کاربردی اهمیت ویژه ای دارد.

نظر به اهمیت مورد «ب» مطالعه قسمت اول را بعهده دانشجویان واگذار کرده و در ادامه تنها مورد «ب» را شرح خواهیم داد.

کاهش مرتبه معادلات فضای حالت مینیمال

معادلات فضای حالت و خروجی کنترل پذیر و رویت پذیر زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

بعد سیستم: l خروجی و m ورودی

تعداد متغیرهای حالت: برابر n

سیستم نامتغیر با زمان

فرض کنید هدف کاهش مرتبه سیستم از n به k باشد

یعنی هدف آن است که سیستم جدیدی با n متغیر حالت چنان نمایش داده شود که مشخصه های اصلی سیستم حفظ شده و خطای کاهش مرتبه حداقل باشد.

معادلات فوق را با تفکیک متغیرها میتوان به صورت زیر نشان داد.

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t)$$

$$y(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + Du(t)$$

بردار x_1 شامل k متغیر حالت مطلوبی که در کاهش مرتبه مدنظر است

بردار x_2 شامل $n-k$ متغیر حالت که باید حذف شوند.

برای حذف بردار x_2 دو روش پیشنهاد می‌گردد که عبارتند از

★روش برش   ★ روش مانده گذاری.

روش برش

با توجه به بحث قبل فضای حالت جدید دارای ضابطه زیر خواهد بود

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + B_1u(t)$$

$$y(t) = C_1x_1(t) + Du(t)$$

این سوال مطرح است که در عمل اثر کدامین متغیرهای حالت در پاسخ سیستم کم رنگ‌تر است و می‌توان آن‌ها را حذف نمود؟

پاسخ این است، متغیرهای حالتی که مقادیر ویژه متناظر آن‌ها (قطب‌های سیستم) که به اندازه‌ی کافی دور از مبدا و محور موهومی هستند قابلیت حذف را دارند.

به منظور انجام روش برش مراحل زیر را پی می‌گیریم

1) نمایش فضای حالت اولیه سیستم به صورت قطری جردن

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ \vdots \\ b_n^T \end{pmatrix} u(t)$$

با این فرض که $|\lambda_1|<|\lambda_2|<\dots<|\lambda_n|$ باشد.

$$y(t) = [c_1\ \ c_2\ \cdots\ c_n]\, x(t)$$

۲) در بابرش، n-k مود سریع سیستم (قطب‌های باندازه کافی دور از $j\omega$) را حذف کنیم داریم

$$\dot{x}_1(t)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_k\end{pmatrix}x_1(t)+\begin{pmatrix}b_1^T\\ b_2^T\\ \vdots\\ b_k^T\end{pmatrix}u$$

$$y(t)=[c_1 \;\; c_2 \;\; \dots \;\; c_k]\,x_1(t)$$

۳) تعیین خطای مدل سازی که با استفاده از برش بدست آمده است.

$$G(s)-G_r(s)=\sum_{i=k+1}^{n}\frac{c_i b_i^T}{s-\lambda_i}$$

$G(s)$: ماتریس تابع تبدیل سیستم اولیه

$G_r(s)$: ماتریس تابع تبدیل سیستم کاهش مرتبه یافته

$c_i b_i^T$: ماتریس مانده تابع تبدیل از قطب λ_i

نکته: مقدار خطا به موقعیت قطب و ماتریس مانده وابسته است.

نکته: خطای بین دو سیستم زمانی قابل قبول است که بازاء محدوده وسیعی از تغییرات فرکانس ورودی، ماکزیمم اندازه اختلاف بین ماتریس تابع تبدیل اصلی و کاهش مرتبه یافته از مقدار مشخصی بیشتر نشود

معیار مناسبی برای خطا به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$\|G(s)-G_r(s)\|_\infty \leq \sum_{i=k+1}^{n}\frac{\bar{\sigma}(c_i b_i^T)}{|Re(\lambda_i)|}$$

$\bar{\sigma}(\cdot)$: عبارتست از بزرگترین مقدار استثنایی یک ماتریس

تعریف: مقادیر استثنایی هر ماتریس عبارتست از ریشه مقادیر ویژه حاصلضرب آن ماتریس در مزدوجش. مقادیر استثنایی عدد حقیقی هستند

اگر مقادیر ویژه عبارت $(c_i b_i^T)(c_i b_i^T)^T$ محاسبه شده و جذر آن گرفته شود، مقادیر استثنایی بدست خواهند آمد.

نتیجه: برای مطمئن بودن از مناسب بودن تقریب، تنها حذف قطب های سریع کافی نبوده، و باید به مقدار بزرگترین مقدار استثنایی ماتریس مانده آن قطب نیز توجه کرد.

تعریف مقادیر استثنایی هانکل: (Hankel singular value)

جذر مقادیر ویژه حاصلضرب ماتریس کنترل پذیری و رویت پذیری را مقادیر استثنایی هانکل گفته و اندازه آن معرف انرژی حالت های سیستم است.

نحوه استفاده از مقادیر استثنایی هانکل در روش برش

پس از استخراج مقادیر استثنایی هانکل یک سیستم، آن ها را به ترتیب نزولی مرتب نموده و برحسب نیاز، تعداد متغیرهای حالت دلخواه را انتخاب می کنیم. متغیر حالتی که مقدار استثنایی هانکل آن بزرگتر است حفظ می شود.

پس از بدست آوردن فضای حالت جدید، پاسخ های سیستم را مورد بررسی قرار می دهیم (هم پاسخ زمانی و هم پاسخ فرکانسی سیستم اصلی و کاهش مرتبه یافته را مورد مقایسه قرار می دهیم

مثال : سیستم توربین گازی با ۱۲ متغیر حالت ، دو ورودی و دو خروجی را در نظر بگیرید. مقادیر استثنایی هانکل این سیستم در جدول زیر آمده است. با روش برش تعداد متغیرهای حالت را به ۵ کاهش دهید.
می توان نشان داد که میزان خطا در این تحقق، برابر ۳/۶ است.

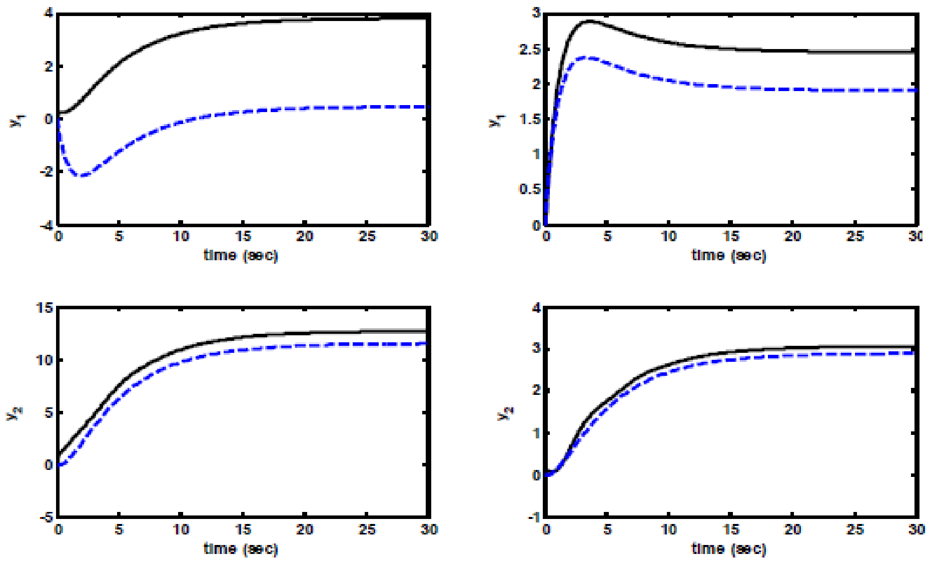
جدول مقادیر استثنایی هانکل

۱) ۷/۱۸۳۳e+۰	۵) ۴/۶۳۳۱e-۱	۹) ۵/۶۵۹۶e-۴
۲) ۱/۴۹۰۴e+۰	۶) ۲/۳۶۸۳e-۱	۱۰) ۲/۰۶۰۸e-۵
۳) ۹/۲۷۹۰e-۱	۷) ۱/۶۱۳۲e-۱	۱۱) ۱/۴۱۲۴e-۶
۴) ۵/۸۷۵۵e-۱	۸) ۹/۳۵۸۲e-۲	۱۲) ۳/۳۳۴۳e-۸

- **پاسخ های خروجی:**

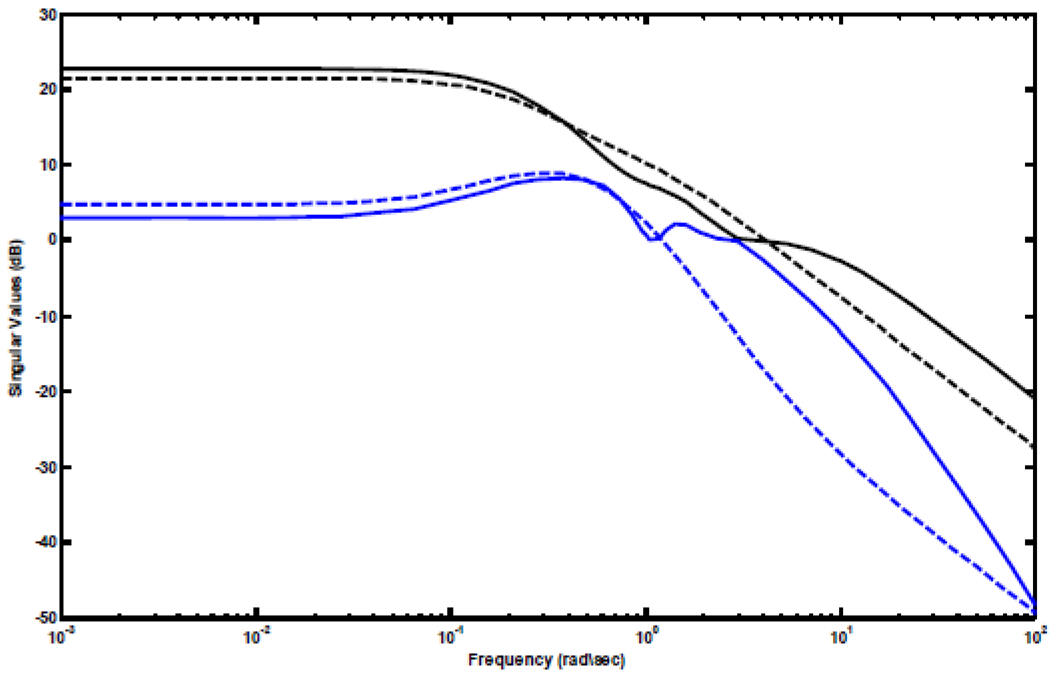
منحنی های توپر : پاسخ اصلی و منحنی های خط چین پاسخ تقریبی

الف : ورودی $[1\ \ 0]^T$
ب : ورودی $[0\ \ 1]^T$



(ب) (الف)

منحنی مقادیر استثنایی سیستم اصلی و کاهش مرتبه یافته



چون سیستم دو ورودی / دو خوجی است، ۲ مقدار استثنایی مورد بررسی قرار می گیرد.

ملاحظه می گردد که در فرکانسهای پایین اختلاف زیاد است . اما برای فرکانسهای بالا اختلاف کمتر می باشد از نقطه نظر ریاضی با توجه به فضای حالت سیستم اصلی و کاهش مرتبه یافته می توان نشان داد که :

$$G(\infty) = G_r(\infty)$$

روش مانده گذاری

در روش پیش به طور کامل اثر متغیرهای حالت x_2 حذف شده اما در این روش با توجه به سریع بودن متغیرهای x_2 و ذکر این نکته که در حالت ماندگار این متغیرها تغییراتی ندارند پس $\dot{x}_2(t)$ صفر است

بنابراین طبق بحث های بخش قبل

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t) = 0$$

با فرض معکوس پذیر بودن A_{22} و حل معادله فوق برای $x_2(t)$

$$\dot{x}_1(t) = \left(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)x_1(t) + \left(B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2\right)u(t)$$

$$y(t) = \left(C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21}\right)x_1(t) + \left(D - C_2A_{22}^{-1}B_2\right)u(t)$$

بنابراین ماتریس تابع تبدیل کاهش مرتبه یافته در حالت ماندگار عبارتست از

$$G_r(0) = -\left(C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21}\right)\left(A_{12} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)^{-1}\left(B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2\right)$$
$$+ D - C_2A_{22}^{-1}B_2$$

از طرفی برای ماتریس تابع تبدیل اصلی سیستم در حالت ماندگار داریم

$$G(0) = -\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} + D$$

می توان نشان داد که

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} M^{-1} & -M^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}M^{-1} & A_{22}^{-1}A_{21}M^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

که می توان اثبات کرد $G_r(0) = G(0)$

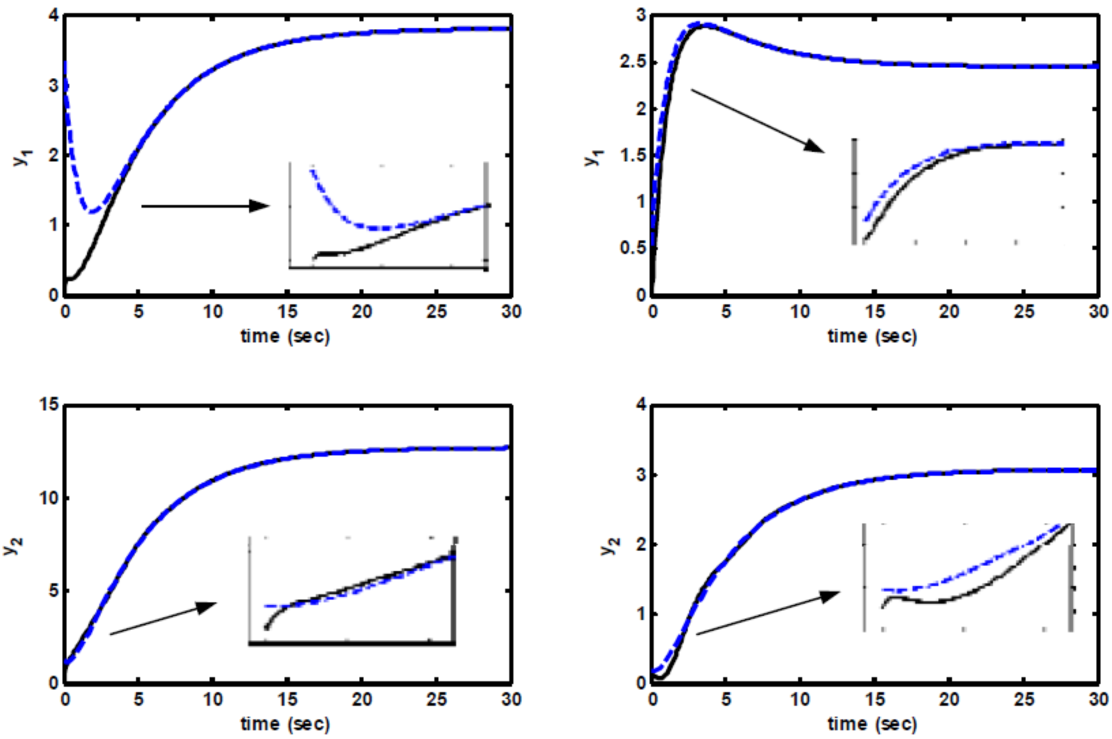
واین یعنی آنکه رفتار حالت ماندگار سیستم کاهش یافته همانند سیستم اصلی خواهد بود

رفتار حالت گذرا

با توجه به اینکه $G_r(\infty) = D - C_2 A_{22}^{-1} B_2$ و $G(\infty) = D$

بنابراین رفتار حالت گذرا در سیستم اصلی و کاهش مرتبه یافته متفاوت است

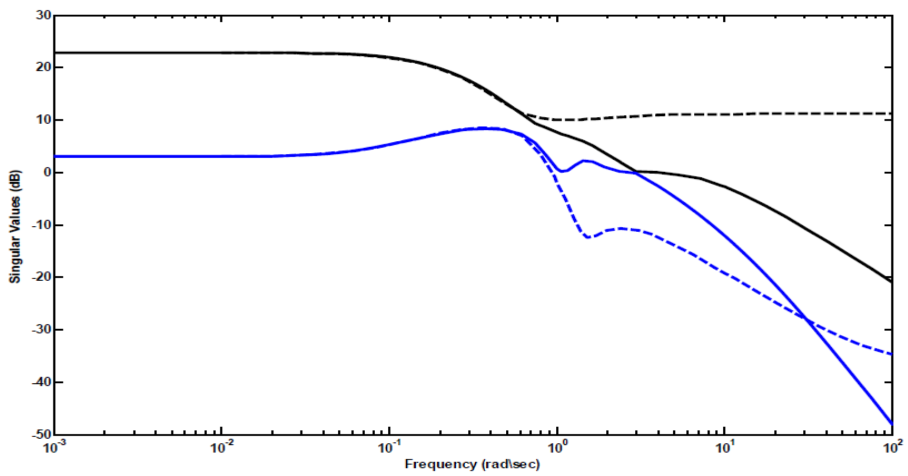
مثال: توربین گازی ۲x۲ با ۱۲ متغیر حالت و کاهش مرتبه به روش مانده گذاری. پاسخ های خروجی:



الف   الف : ورودی $[1\ \ 0]^T$ ب

ب : ورودی $[0\ \ 1]^T$

مقادیر استثنایی



چون سیستم دو ورودی / دو خوجی است، ۲ مقدار استثنایی مورد بررسی قرار می گیرد.

نحوه انتخاب مرتبه‌ی مدل دینامیکی کاهش یافته

این سوال مطرح است که چه تعداد از حالت های سیستم قابلیت حذف شدن را دارند تا آنکه مطمئن باشیم

۱) پاسخ گذرای سیستم اصلی و سیستم کاهش مرتبه یافته بسیار به هم نزدیک باشد

۲) رفتار ماندگاری سیستم اصلی و سیستم کاهش مرتبه یافته بسیار به هم نزدیک باشد که این کار با تخمین SVD توابع امکان پذیر خواهد بود.

میزان یا درجه کنترل پذیری و رویت پذیری سیستم‌ها نیز می تواند معیاری مناسب در تعیین حذف حالت های کم اثرتر سیستم، محسوب گردد

روش تحقق بالانس شده در تعیین مرتبه مدل دینامیکی کاهش یافته

اگر فضای حالت می نیمال یک سیستم به شکل روبرو باشد

$$\dot{x} = AX + Bu$$

$$y = CX + Du$$

آنگاه این تحقق را بالانس شده گویند اگر گرامیان کنترل پذیری و رویت پذیری آن قطری و مساوی باشند

$$P = Q = diag\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$$

گرامیان کنترل پذیری و $\quad P = \int_0^\infty e^{At} B B^T e^{A^T t}\, dt$

گرامیان کنترل پذیری و $\quad Q = \int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{At}\, dt$

دو گرامیان فوق در معادلات لیاپانوف زیر صدق می کنند

$$AP + PA^T + BB^T = 0 \quad و \quad A^T Q + QA + C^T C = 0$$

روش کار

با استفاده از تبدیل های همانندی مخصوصی می توان فضای حالت می نیمال را به صورتی تبدیل کرد که گرامیان های کنترل پذیری و رویت پذیری با هم مساوی و به صورت قطری درآیند (تحقیق به عهده دانشجویان)

اگر $\sigma_1 \ldots \sigma_n$ به طور نزولی مرتب گردند و فرض کنیم که
$\sigma_k >> \sigma_{k+1}$
باشد آنگاه می توان گفت که k متغیر حالت را می توان حفظ نمود و n-k متغیر را حذف نمود و k مرتبه مناسب سیستم کاهش مرتبه یافته است.

✓ اگر کاهش مرتبه را با روش برش انجام داده (k به صورت فوق انتخاب شده) معادلات حالت جدید را «برش بالانس شده» سیستم اصلی می نامند.

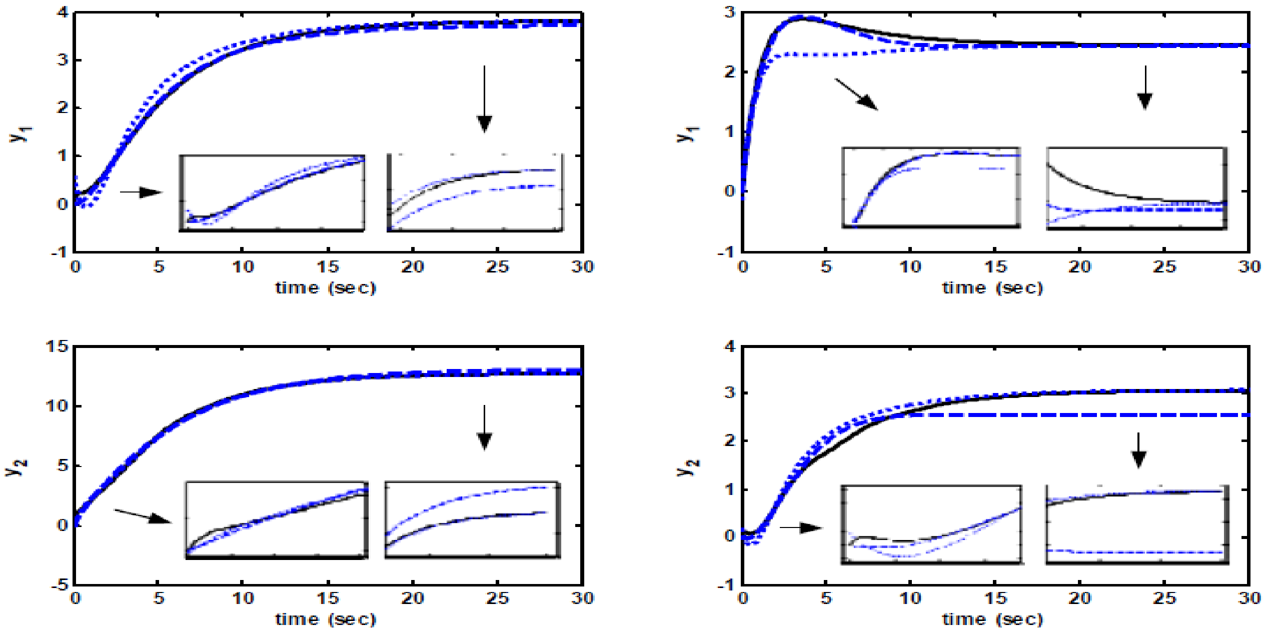
✓ اگر کاهش مرتبه به روش مانده گذاری انجام پذیرد (k به صورت فوق انتخاب شده) معادلات حالت جدید را «مانده گذاری بالانس شده» سیستم اصلی می نامند.

✓ نشان داده شده است (در مرجع [8] فصل چهارم) که خطای کاهش مرتبه در هر دو روش فوق دارای کران مشابه بوده و عبارتست از:

$$\|G(s)-G_r(s)\|_\infty < 2(\sigma_{k+1}+\cdots+\sigma_n)$$

می باشد.

مثال : سیستم مثال قبل را می خواهیم با دو روش برش بالانس شده و مانده گذاری بالانس شده، کاهش مرتبه داده و نتایج را با هم مقایسه کنیم. تعداد متغیرهای حالت حفظ شده برابر ۳ میباشد.



(ب) (الف)

الف : ورودی $[1\ \ 0]^T$

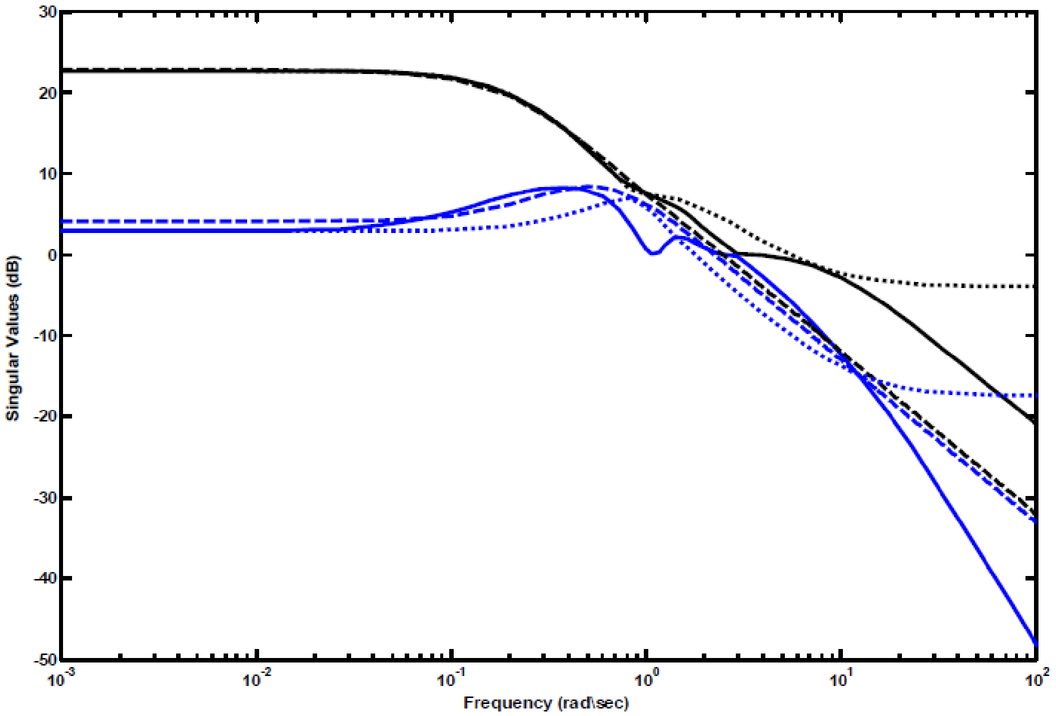
ب : ورودی $[0\ \ 1]^T$

پاسخ پله سیستم اصلی : خطوط آبی پر

پاسخ پله سیستم کاهش مرتبه یافته به روش برش بالانس شده : خطوط آبی خط چین

پاسخ پله سیستم کاهش مرتبه یافته به روش مانده گذاری بالانس شده : خطوط آبی نقطه چین

مقادیر استثنایی سیستم اصلی و سیستم های کاهش مرتبه یافته



(ب) (الف)

چون سیستم دو ورودی / دو خوجی است، ۲ مقدار استثنایی مورد بررسی قرار می گیرد.

خطای بدست آمده در روش برش برابر ۱/۱۷۴ و در روش مانده گذاری برابر ۱/۲۰۱ شده است