قطب و صفر در سیستم‌های چند متغیره

در سیستم های چند متغیره، تعیین صفرها و قطب ها به سادگی سیستم‌های SISO نیست. در این سیستم‌ها قطب ها و صفرها بردارهای متناظری دارند که بردار جهت نامیده می شوند.

همچنین نوع سیستم (System Type) در سیستم‌های چند متغیره به قطب و صفر سیستم وابسته است.

۱) تعیین قطب ها از روی فضای حالت

برای یک سیستم چند متغیره با نمایش فضای حالت مقابل، قطب‌های سیستم همان مقادیر ویژهٔ ماتریس A هستند که نه ارتباطی به تعداد ورودی ها و نه ارتباطی با تعداد خروجی ها دارد.

$$\dot{X} = AX + BU$$

$$Y = CX + DU$$

قطب های سیستم : $|SI - A| = 0$

۲) تعیین قطب ها از روی ماتریس P(S) [ماتریس سیستم]

در نمایش ماتریس رزنبراک داشتیم.

$$M(S) = \begin{pmatrix} P(s) & Q(s) \\ -R(s) & W(s) \end{pmatrix}$$

و در ماتریس تابع تبدیل سیستم رابطهٔ زیر برقرار بود.

$$G(s) = R(s)P^{-1}(s)Q(s) + W(s)$$

قطب ها همواره از مساوی صفر قراردادن عبارت مخرج تابع تبدیل سیستم بدست می‌آید که طبیعتاً می توان آنها را از عبارت مقابل تعیین کرد.

$$|P(s)| = 0$$

نکته مهم : مرتبه سیستم همچنان درجهٔ دترمینان P(s) است.

۳) تعیین قطب های سیستم MIMO از روی ماتریس تابع تبدیل سیستم

فرمت عمومی یک ماتریس تابع تبدیل را می توان به فرم زیر نوشت.

$$G(s) = \left[g_{ij}(s) \right] \qquad i = 1, \ldots\ldots, l \qquad j = 1, \ldots\ldots, m$$

$$g_{ij}(s) = \frac{n_{ij}(s)}{d_{ij}(s)}$$

m : تعداد ورودی ها و l : تعداد خروجی ها

قطب های سیستم عبارتند از: تمامی ریشه های عبارت های $d_{ij}(s)=0$

نکات مهم:

۱) تعیین تعداد قطب ها (مرتبهٔ سیستم) مرتبهٔ تکرار هر قطب به سادگی امکان پذیر نیست.

۲) تعداد و موقعیت قطب‌ها در تحلیل سیستم چند متغیره نقش مهمی را ایفا می‌کند.

مثال: برای ماتریس تابع تبدیل مقابل، قطب های سیستم را تعیین کنید.

$$G(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{S+1} & \frac{2}{S+1} \\ \frac{-1}{(S+1)(S+2)} & \frac{1}{(S+2)} \end{bmatrix}$$

$$d_{11}(s)=S+1=0 \Rightarrow S=-1 \qquad d_{12}(s)=S+1=0 \Rightarrow S=-1$$

$$d_{21}(s)=(S+1)(S+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} S=-1 \\ S=-2 \end{cases} \qquad d_{22}(s)=S+2=0 \Rightarrow S=-2$$

ملاحظه می‌گردد که قطب S=-1 ، سه بار و قطب S=-2 ، دو بار تکرار شده ، اما بعداً خواهیم دید که قطب‌های سیستم ۳ تا بوده و به صورت 1- ، 1- و 2- ظاهر خواهند شد.

تعریف چند جمله ای قطب (چند جمله ای مشخصه)

چند جمله‌ای قطب هر ماتریس تابع تبدیل به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

کوچکترین مخرج مشترک کلیهٔ کهادهای غیرصفر ماتریس G(s) را **چند جمله‌ای مشخصهٔ سیستم** یا **چند جمله‌ای قطب** سیستم تعریف می‌کنند.

مثال: برای ماتریس تابع تبدیل مقابل، چند جمله ای قطب را تعیین کنید.

$$G(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{S+1} & \frac{2}{S+1} \\ \frac{-1}{(S+1)(S+2)} & \frac{1}{(S+2)} \end{bmatrix}$$

کهادهای مرتبهٔ اول : $\frac{1}{S+1}\ ,\ \frac{2}{S+1}\ ,\ \frac{-1}{(S+1)(S+2)}\ ,\ \frac{1}{(S+2)}$

کهادهای مرتبهٔ دوم : $\det\left(G(s)\right)=\frac{S+3}{(S+1)^2(S+2)}$

کوچکترین مخرج مشترک بین کهادها : $(S+1)^2(S+2) \Rightarrow \Delta(s)=(S+1)^2(S+2)$

چند جمله ای قطب (مشخصه)

قطب های سیستم $\Delta(s)=0 \Rightarrow (S+1)^2(S+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} S=-1 \\ S=-1 \\ S=-2 \end{cases}$

نکته : ملاحظه گردید که قطبهای سیستم می‌توانند از مساوی صفر قرار گرفتن چند جمله‌ای مشخصه بدست آیند.

مثال: قطب های سیستمی با ماتریس تابع تبدیل مقابل را بدست آورید.

$$G(s)=\begin{pmatrix} \frac{1}{S+1} & 0 & \frac{S-1}{(S+1)(S+2)} \\ \frac{-1}{S-1} & \frac{1}{S+2} & \frac{1}{S+2} \end{pmatrix}$$

کهادهای مرتبهٔ اول
$$\begin{cases} \frac{1}{S+1} \qquad \frac{S-1}{(S+1)(S+2)} \\ \frac{-1}{S-1} \qquad \frac{1}{S+2} \qquad \frac{1}{S+2} \end{cases}$$

کهادهای مرتبهٔ دوم
$$\begin{cases} \frac{1}{(S+1)(S+2)} \Leftarrow \text{ترکیب دو ستون اول} \\ \frac{2}{(S+1)(S+2)} \Leftarrow \text{ترکیب ستون اول و سوم} \\ \frac{-(S-1)}{(S+1)(S+2)^2} \Leftarrow \text{ترکیب ستون دوم و سوم} \end{cases}$$

$$\Delta(s)=(S+1)(S+2)^2(S-1) \rightarrow \begin{cases} S=-1 \\ S=-2 \\ S=-2 \\ S=+1 \end{cases}$$

چهار قطب

تعریف ماتریس چند جمله‌ای سیستم

ماتریس تابع تبدیل یک سیستم چند متغیره با G(s) نشان داده شده است. با تعیین کوچکترین مخرج مشترک بین *dij(s)* ها، می‌توان G(s) را به شکل زیر نیز نشان داد.

$$G(s)=\begin{pmatrix} \frac{n_{11}(s)}{d_{11}(s)} & \cdots & \cdots & \frac{n_{1l}(s)}{d_{1l}(s)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{n_{m1}(s)}{d_{m1}(s)} & \cdots & \cdots & \frac{n_{ml}(s)}{d_{ml}(s)} \end{pmatrix}$$

$$G(s)=\frac{1}{D(s)}\begin{pmatrix} p_{11}(s) & \cdots & \cdots & p_{1l}(s) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ p_{l1}(s) & \cdots & \cdots & p_{lm}(s) \end{pmatrix}$$

$$G(s)=\frac{1}{D(s)}P(s)$$

به ماتریس *P(s)* ماتریس چند جمله‌ای سیستم می گوییم. در P(s) هیچ عبارت کسری وجود ندارد.

تعریف دو ماتریس سیستم رزنبراک اکیداً معادل

همانگونه که قطب‌های سیستم در نمایش فضای حالت، تحت تبدیل همانندی تغییر نمی-کنند، قطب‌های سیستم و سایر مشخصه‌های آن، تحت اکیداً معادل بودن سیستمی (Strict system equivalence) نیز تغییر نمی‌کنند.

اگر M(s) ماتریس چند جمله‌ای یک سیستم چند متغیره باشد، آنگاه $M_1(s)$ را با M(s) اکیداً معادل می‌گوئیم اگر:

۱) دارای یک بُعد بوده و

۲) یک ماتریس تابع تبدیل مشابه را تشکیل دهند.

$$M(s)=\begin{pmatrix} P(s) & Q(s) \\ -R(s) & W(s) \end{pmatrix} \qquad M_1(s)=\begin{pmatrix} P_1(s) & Q_1(s) \\ -R_1(s) & W_1(s) \end{pmatrix}$$

ویژگی های $M_1(s)$ جهت معادل بودن با M(s)

اگر $M_1(s)$ معادل M(s) باشد، پس رابطهٔ زیر برقرار است.

$$\begin{pmatrix} F(s) & 0 \\ X(s) & I_l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P(s) & Q(s) \\ -R(s) & W(s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E(s) & Y(s) \\ 0 & I_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_1(s) & Q_1(s) \\ -R_1(s) & W_1(s) \end{pmatrix}$$

که F(s) و E(s) ماتریس‌های چند جمله‌ای تک مدولی با بعد $r\times r$ و X(s) و Y(s) نیز به ترتیب ماتریس‌های چند جمله‌ای با بُعد $l\times r$ و $r\times m$ هستند.

یادآوری ماتریس های تک مدولی :

اگر بزرکترین مقسوم علیه مشترک F(s) و E(s) ، ماتریس K(s) باشد که دترمینان آن غیرصفر و مستقل از S باشد،آنگاه F(s) و E(s) را تک مدولی یا unimodular می‌خوانند.

از رابطهٔ فوق می‌توان نشان داد:

$$\begin{pmatrix} P_1(s) & Q_1(s) \\ -R_1(s) & W_1(s) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} FPE & F(PY+Q) \\ -(R-XP)N & XPY-RY+XQ+W \end{pmatrix}$$

اگر ماتریس تابع تبدیل حاصل از $M_1(s)$ بخواهد با ماتریس تابع تبدیل حاصل از M(s) یکسان گردد، باید روابط زیر برقرار باشند.

$$G_1(s)=R_1P_1^{-1}Q_1+W_1=(R-XP)EE^{-1}P^{-1}F^{-1}F(PY+Q)$$
$$+XPY-RY+XQ+W\equiv G(s)=RP^{-1}Q+W$$
$$G_1(s)=(R-XP)E(E^{-1}P^{-1}F^{-1})F(PY+Q)+XPY-RY+XQ+W$$
$$P_1\equiv FPE$$
$$R_1\equiv (R-XP)E$$
$$Q_1\equiv F(PY+Q)$$
$$W_1\equiv XPY-RY+XQ+W$$

نکته مهم : با توجه به تک مدولی بودن F و E می‌توان نشان داد که دترمینان P(s) و $P_1(s)$ دارای یک رتبه هستند.

تعیین قطب‌های سیستم چند متغیره از روی فرم Smith-Mc Milan

نخست به بررسی فرم اسمیت خواهیم پرداخت.

قضیه : اگر ماتریس چند جمله‌ای سیستم $(P(s))$ با بعد $l\times m$ در اختیار باشد، آنگاه چنانچه رتبه(rank) ماتریس چندجمله‌ای $P(s)$ بازاء کلیه Sها برابر r $(r\leq l, r\leq m)$ باشد، حتماً می‌توان ماتریس $P(s)$ را به شکل معادل زیر در آورد.

$$S(s)=\left(\begin{array}{ccc|c} \varepsilon_1(s) & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ & & \varepsilon_r(s) & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} r \\ \left.\vphantom{a}\right\} l-r \end{array}$$

$$\qquad\qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{r}\ \underbrace{\quad}_{m-r}$$

به ماتریس $S(s)$ که به کمک عملیات سطری ستونی بر روی $P(s)$ و به منظور بدست آوردن یک ماتریس اکیداً معادل با $P(s)$ حاصل شده، اصطلاحاً فرم اسمیتِ ماتریس $P(s)$ می‌گویند.

نکته : $P(s)$ در اینجا با ماتریس سیستم $P(s)$ در شکل رزنبراک متفاوت است.

برای اثبات قضیهٔ فوق به کتاب درسی، صفحهٔ ۷۳ مراجعه شود.

ویژگی های ماتریس اسمیت:

الف) ویژگی اول

$$\varepsilon_i(s)=\frac{D_i(s)}{D_{i-1}(s)} \qquad i=1,\dots\dots,r$$

$$D_0(s)=1$$

$D_i(s)=$ بزرگترین مقسوم علیه مشترکِ کلیهٔ کهادهای $i\times i$ ماتریس $P(s)$

نکته مهم: بزرگترین مقسوم علیه مشترک باید حتماً تکین باشد (ضریب بالاترین توان S ، یک باشد)

ب) ویژگی دوم

$\varepsilon_{i+1}(s)$ بر $\varepsilon_i(s)$ *بخش پذیر است.* $\quad i=1,\dots\dots,r-1$

نتیجه‌گیری : بسادگی می‌توان با ویژگی‌های بدست آمده برای ماتریس Smith، بدون استفاده از عملیات مقدماتی سطری / ستونی آنرا تشکیل داد.

مثال : با توجه به ماتریس سیستم چند جمله ای شکل مقابل، فرم اسمیت آنرا استخراج کنید.

$$P(s)=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ S^2+S-4 & 2S^2-S-8 \\ S^2-4 & 2S^2-8 \end{pmatrix}$$

برای این ماتریس داریم :

$$D_0(s)=1$$

$$D_1(s) = \text{بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک} \left\{ 2s^2 - s - 8, s^2 + s - 4, -1, 1 \right\} = 1$$

$$D_2(s) = \text{بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک} \left\{ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ s^2 + s - 4 & 2s^2 - s - 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ s^2 - 4 & 2s^2 - 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} s^2 + s - 4 & 2s^2 - s - 8 \\ s^2 - 4 & 2s^2 - 8 \end{vmatrix} \right\} = (s+2)(s-2)$$

بنابراین

$$\varepsilon_1(s) = 1, \quad \varepsilon_2(s) = (s+2)(s-2)$$

و لذا فرم اسمیت $P(s)$ عبارتست از:

$$S(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (s+2)(s-2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بحث فوق، مقدمات لازم جهت استخراج فرم Simth-Mc milan را مهیا نموده است.

در نهایت با استفاده از فرم Simth-Mc milan ، می توان قطب‌های سیستم را شناسایی کرد.

معرفی صورت Smith-McMilan به منظور تعیین قطب‌های سیستم

اگر $G(s)$ ماتریس تابع تبدیل سیستم با بُعد $l\times m$ و از رتبهٔ r باشد، آنگاه می‌توان $G(s)$ را با یکسری عملیات مقدماتی سطری/ستونی به یک ماتریس گویای قطری به صورت زیر تبدیل نمود که به آن فرم اسمیت مک میلان می‌گویند.

در ماتریس روبرو، $\varepsilon_i(s)$ و $\psi_i(s)$ دارای خاص زیرند.

۱) نسبت به هم اولند.

۲) $\varepsilon_{i+1}(s)$ بر $\varepsilon_i(s)$ بخش پذیر است.

$$i=1,\ldots\ldots,r-1$$

۳) $\varphi_i(s)$ بر $\varphi_{i+1}(s)$ بخش پذیر است.

$$i=1,\ldots\ldots,r-1$$

$$M(s)=\begin{array}{cl}\left(\begin{array}{cccc|c} \dfrac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \dfrac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \}\,r \\ \}\,l\text{-}r \end{array} \\ \begin{array}{cc} \qquad\qquad r \qquad\qquad & m\text{-}r \end{array} & \end{array}$$

نکته : از آنجائیکه که همواره می‌توان، طی عملیات مقدماتی سطری/ ستونی فرم Smith-Mcmilan را ارائه نمود، لذا حتماً ماتریس‌های $L^{-1}(s)$ و $R^{-1}(s)$ تک مدولی برای تبدیل $G(s)$ به $M(s)$ وجود خواهند داشت، به نحوی که:

$$M(s)=L^{-1}(s)G(s)R^{-1}(s)\Rightarrow G(s)=L(s)M(s)R(s)$$

اگر یک MFD راست از $M(s)$ ارائه گردد، داریم :

$$M(s)=N'(s)D'^{-1}(s)$$

که‌باتوجه به فرم ظاهری $M(s)$، برای دو عامل فوق ماتریس های زیر بدست خواهند آمد.

$$N'(s)=\begin{array}{cl}\left(\begin{array}{ccc|c} \varepsilon_1(s) & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ & & \varepsilon_r(s) & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \}\,r \\ \}\,l\text{-}r \end{array} \\ \begin{array}{cc} \qquad r \qquad & m\text{-}r \end{array} & \end{array} \qquad D'(s)=\begin{array}{cl}\left(\begin{array}{ccc|c} \psi_1(s) & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ & & \psi_r(s) & \\ \hline & 0 & & I \end{array}\right) & \begin{array}{l} \}\,r \\ \}\,m\text{-}r \end{array} \\ \begin{array}{cc} \qquad r \qquad & m\text{-}r \end{array} & \end{array}$$

در رابطهٔ فوق I ، معرف ماتریس واحد است.

با جایگزینی ماتریسهای تعریف شده در رابطهٔ $G(s)$ داریم

$$G(s)=L(s)M(s)R(s)$$
$$=L(s)N'(s)D'^{-1}(s)R(s)$$
$$=\left[L(s)N'(s)\right]\left[R^{-1}(s)D'(s)\right]^{-1}$$
$$G(s)=N(s)D^{-1}(s)$$

که :

$$N(s)=L(s)N'(s) \quad ; \quad D(s)=R^{-1}(s)D'(s)$$

عبارت فوق در حقیقت یک MFD راست است و صحتی بر ادعای ارائه شده در نمایش G(s) می باشد. بنابراین ، حتماً می‌توان برای G(s) ، شکلی مطابق فرم اسمیت – مک میلان پیدا نمود.

مثال : برای ماتریس تابع تبدیل شکل مقابل، فرم Smith-Mcmilan را استخراج کنید.

$$G(s)=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{S^2+3S+2} & \dfrac{-1}{S^2+3S+2} \\ \dfrac{S^2+S-4}{S^2+3S+2} & \dfrac{2S^2-S-8}{S^2+3S+2} \\ \dfrac{S-2}{S+1} & \dfrac{2S-4}{S+1} \end{pmatrix}$$

نخست G(s) را به صورت، ضرب یک عبارت کسری در یک ماتریس چند جمله‌ای می- نویسیم.

$$G(s)=\frac{1}{S^2+3S+2}P(s)$$

پس می توان G(s) را به شکل مقابل نوشت

$$G(s)=\frac{1}{S^2+3S+2}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ S^2+S-4 & 2S^2-S-8 \\ S^2-4 & 2S^2-8 \end{pmatrix}}_{P(s)}$$

در مثالهای قبل فرم smith ، P(s) فوق بدست آمده بود که داشتیم:

$$S(s)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (S+2)(S-2)\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow M(s)=\begin{pmatrix}\frac{1}{(S+2)(S-2)} & 0\\ 0 & \frac{S-2}{S+1}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

مثال : برای ماتریس تابع تبدیل شکل مقابل، فرم Smith-Mcmilan را استخراج کنید.

$$G(s)=\frac{1}{(S+1)(S+3)}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2(S+1)^2\end{pmatrix}$$

$$G(s)=\frac{1}{d(s)}P(s) \qquad ; \qquad P(s)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2(S+1)^2\end{pmatrix}$$

نخست : تعیین فرم اسمیت P(s)

الف)بزرگترین مقسوم علیه مشترک کهادهای 1×1 همان یک است.

ب) و برای کهادهای 2×2 ، بزرگترین مقسوم علیه مشترک همان دترمینان P(s) ، یعنی $(S+1)^2$ می باشد.

نکته مهم: قبلاً مطرح کرده بودیم که بزرگترین مقسوم علیه مشترک باید تکین باشد، یعنی ضریب بالاترین توان S باید ۱ باشد. به همین دلیل ضریب ۲ در عبارت $(S+1)^2$ حذف شده است.

در نهایت فرم اسمیت- مک میلان به صورت زیر در خواهد آمد.

$$M(s)=\begin{pmatrix}\frac{1}{(S+1)(S+3)} & 0\\ 0 & \frac{S+1}{S+3}\end{pmatrix}$$

مثال : برای ماتریس تابع تبدیل شکل مقابل، فرم Smith-Mcmilan را استخراج کنید.

$$G(s)=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{S+1} & 0 & \dfrac{S-1}{(S+1)(S+2)} \\ 0 & \dfrac{1}{S+1} & \dfrac{1}{(S+2)(S-1)} \end{pmatrix}$$

G(s) را می توان به فرم زیر نوشت.

$$G(s)=\frac{1}{(S+1)(S+2)(S-1)}\begin{pmatrix} (S+2)(S-1) & 0 & (S-1)^2 \\ 0 & (S+2)(S-1) & (S+1) \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{d(s)}P(s)$$

استخراج فرم اسمیت P(s)

بزرگترین مقسوم علیه مشترک کهادهای ۱×۱ مربط به P(s) ، یک است.

و کهادهای ۲×۲ آن عبارتند از :

$$\begin{vmatrix} (S+2)(S-1) & 0 \\ 0 & (S+2)(S-1) \end{vmatrix}=(S+2)^2(S-1)^2$$

$$\begin{vmatrix} (S+2)(S-1) & (S-1)^2 \\ 0 & (S+1) \end{vmatrix}=(S+1)(S-1)(S+2)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & (S-1)^2 \\ (S+2)(S-1) & (S+1) \end{vmatrix}=-(S+2)(S-1)^3$$

همانگونه که ملاحظه می‌گردد، بزرگترین مقسوم علیه مشترک کهادهای ۲×۲ عبارتست از : $(S+2)(S-1)$

بنابراین فرم اسمیت – مک میلان به صورت زیر در می آید.

$$M(s)=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{(S+1)(S+2)(S-1)} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{S+1} & 0 \end{pmatrix}$$

تعیین دقیق قطب ها از صورت اسمیت – مک میلان

با توجه به فرم ظاهری ماتریس Smith-Mc Milan نشان خواهیم داد که چند جمله-ای قطب سیستم که از روی آن قطب‌های سیستم تعیین خواهد شد، عبارت است از :

$$\Delta(s)=\psi_1(s)\psi_2(s)\cdots\cdots\psi_r(s)$$

برای یافتن عبارت فوق، از مفهوم عمومی قطب در سیستم استفاده می‌گردد.

برای هر سیستم خطی داریم $Y(s)=G(s)U(s)$ با توجه به ارتباط بین G(s) و فرم اسمیت- مک میلان $G(s)=L(s)M(s)R(s)$ و یادآوری تعریف ماتریس‌های L(s) و R(s) که :

L(s) و M(s) : ماتریس‌های چند جمله‌ای تک مدولی (این دو ماتریس نسبت به هم اولند) به‌گونه‌ای که بازاء S های محدود هرگز اندازهٔ آنها بی‌نهایت نخواهد شد.

اگر رابطهٔ G(s) را در معادلهٔ خروجی قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$Y(s)=L(s)M(s)R(s)U(s)$$

یادآوری بحث پایداری : در هر سیستم خطی پایدار اگر $\|U(s)\|$ محدود باشد، آنگاه $\|Y(s)\|$ نیز محدود خواهد بود.

حال اگر سیستمی خطی، بازاء ورودی محدودی ناپایدار گردد، بنابراین عبارت $L(s)M(s)R(s)$ باید بی نهایت شده باشد.

اندازهٔ L(s) و R(s) بخاطر تک مدولی بودنشان هرگز بی نهایت نخواهد شد، بنابراین اندازهٔM(s) باید بی نهایت شده باشد. با توجه به فرم ظاهری M(s) ، تنها در حالتی می تواند بی‌نهایت گردد که عبارت زیر صفر شود.

$$\Delta(s)=\psi_1(s)\psi_2(s)\cdots\cdots\psi_r(s)$$

بنابراین قطبهای سیستم توسط چند جمله ای قطب سیستم $\Delta(s)$ بدست خواهد آمد.

مثال : برای ماتریس تابع تبدیل مقابل، چند جمله ای قطب را با استفاده از فرم S-M بدست آورید.

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix} s+2 & 2(s+2) \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}$$

کاملاً مشخص است که ماتریس چندجمله ای به شکل روبرو در خواهد آمد.

$$P(s)=\begin{bmatrix} s+۲ & ۲(s+۲) \\ -۱ & s+۱ \end{bmatrix}$$

فرم اسمیت

$$S(s)=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & (s+۲)(s+۳) \end{bmatrix}$$

و صورت S-M نیز به شکل روبرو در خواهد آمد.

$$M(s)=\begin{bmatrix} \frac{۱}{(s+۱)(s+۲)} & ۰ \\ ۰ & \frac{s+۳}{s+۱} \end{bmatrix}$$

لذا چند جمله ای قطب عبارت خواهد بود از

$$\Delta(s)=(S+1)^2(S+2)$$

به کمک برنامه MATLAB ارائه شده در کتاب می‌توان براحتی فرم اسمیت – مک-میلان سیستم را بدست آورد.

مفهوم نوع در سیستم های چند متغیره

نوع در سیستم های خطی به دو فرم اسکالر و برداری مطرح می‌گردد.

الف) نوع اسکالر

یادآوری نوع در سیستم‌های SISO

اگر تابع تبدیل حلقه باز سیستمی با فیدبک منفی واحد را به فرم

$$g(s)=\frac{K.n(s)}{s^i\, d(s)}$$

درآوریم آنگاه i را نوع سیستم می‌خوانیم

نکته: $n(s)$ نباید ریشه‌ای در $s=0$ داشته باشد

اگر $y_d(t)$ را ورودی مرجع تعریف کرده باشیم آن‌گاه خطای ماندگار

$$e_{ss}(t)=\lim_{t\to\infty} e(t)=\lim_{t\to\infty}[y_d(t)-y(t)]$$

با فرض پایدار بودن سیستم حلقه بسته، آن‌گاه خطای ماندگار سیستم بازای تمام ورودی‌هایی که به صورت $y_d(t)=\sum_{j=1}^{i-1} a_j t^j$ باشد، مساوی صفر خواهد بود. (i همان نوع سیستم است)

تعیین نوع سیستم از روی ماتریس تابع تبدیل سیستم MIMO $(m\times m)$

نخست به تعریف ماتریس بهرهٔ dc ناویژه پرداخته خواهد شد و سپس کاربرد آن در تعیین نوع سیستم مورد بررسی قرار خواهیم داد.

ماتریس تابع تبدیل $G(s)$ مربع و با بُعد m، دارای بهرهٔ dc ناویژه است اگر

$$\lim_{s\to 0}\Delta(s)|G(s)|\neq 0$$

که $\Delta(s)$: چندجمله‌ای مشخصه (چندجمله‌ای قطب) ماتریس $G(s)$ است.

نکتهٔ مهم: در شرط ناویژه بودن بهرهٔ dc، مقدار بی‌نهایت قابل قبول نیست.

مثال: برای ماتریس تابع تبدیل مقابل تعیین کنید که بهرهٔ dc آن ناویژه هست یا خیر؟

$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)}\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ s & s+1 \end{bmatrix}$$

حل: نخست چندجمله‌ای قطب آن را از روی فرم Smith _Mcmilan استخراج می‌کنیم.

$$P(s)=\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ s & s+1 \end{bmatrix}\longrightarrow S(s)=\begin{bmatrix} 1 & \\ & (s+1)^2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow M(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)} & 0 \\ 0 & \frac{s+1}{s} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} s=0 \\ s=0 \\ s=-1 \end{cases}$$ قطب ها

$$\Delta(s) = s^2(s+1)$$ چند جمله‌ای قطب یا مشخصه

تشخیص ناویژه بودن بهرهٔ dc

$$\lim_{s\to 0} \Delta(s)|G(s)| = s^2(s+1)\begin{vmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s} \end{vmatrix} = s^2(s+1)\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

$$\rightarrow \lim_{s\to 0} \Delta(s)|G(s)| = \lim_{s\to 0} s+1 = 1 \neq 0$$

بنابراین بهره dc سیستم ناویژه است.

نکته: گین dc های مفهوم $s\to 0$ را دارد.

تعریف نوع اسکالر برای یک سیستم چند متغیره

سیستم چندمتغیره با فیدبک منفی واحد با m ورودی و m خروجی را از نوع l می‌گویند، اگر l بزرگ‌ترین عدد صحیح غیر منفی باشد که بتوان برای آن، ماتریس تابع تبدیل حلقه (حلقه باز) را به صورت زیر نوشت.

$$G(s) = \frac{1}{s^l} G'(s)$$

نکته: $G'(s)$ هیچ صفری در مبدأ ندارد

$G'(s)$ باید دارای بهره DC ناویژه باشد

مثال: برای ماتریس تابع تبدیل شکل مقابل نوع اسکالر سیستم را تشخیص دهید.

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ s & s+1 \end{bmatrix}$$

حل: $G(s)$ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$G(s)=\frac{1}{s}\times\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{s}{s+1} & 1\end{bmatrix} \Longrightarrow \text{اگر } G'(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{s}{s+1} & 1\end{bmatrix}\rightarrow G(s)=\frac{1}{s}G'(s)$$

ظاهراً سیستم از نوع یک است. اما باید ناویژه بودن بهرهٔ dc، $G'(s)$ مورد آزمایش قرار گیرد.

$$\Delta'(s):\begin{cases}1 \text{ و } \frac{s}{s+1} \text{ و } 1 & \text{کهادهای } 1\times1\\ 1 & \text{کهاد } 2\times2\end{cases} \Longrightarrow \boxed{\Delta'(s)\equiv \text{کوچکترین مضرب مشترک عوامل مختلف}}$$

$$\rightarrow \Delta'(s)=s+1 \qquad \text{چندجمله‌ای قطب}$$

تعیین ناویژه بودن

$$\lim_{s\to0}\Delta'(s)|G'(s)|=\lim_{s\to0}(s+1)\times1=1\neq0$$

بنابراین ناویژه بودن مورد قبول است و سیستم از نوع یک تشخیص داده می‌شود.

سوال : آیا امکان وجود نداشت که از ابتدا $G(s)$ به صورتی نوشته شود که با نوع ۲ تشخیص داده شود؟ به مراحل زیر دقت کنید.

$$G(s)=\frac{1}{s^2}\begin{bmatrix}s & 0\\ \frac{s^2}{s+1} & s\end{bmatrix}\longrightarrow G'(s)=\begin{bmatrix}s & 0\\ \frac{s^2}{s+1} & s\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \Delta'(s)=(s+1) \quad \text{و} \quad |G'(s)|=s^2$$

$$\lim_{s\to0}\Delta'(s)|G'(s)|=\lim_{s\to0}(s+1)s^2=0$$

بنابراین در این وضعیت $G'(s)$ دارای بهرهٔ dc ناویژه نشد لذا نوع ۲ برای $G'(s)$ قابل قبول نیست.

سوال: نشان دهید که یک سیستم با m ورودی و m خروجی با فیدبک منفی واحد پایدار و از نوع اسکالر l، تمام ورودی های مرجع به صورت $y_d(t)=\frac{Z_0 t^k}{k!}$ را با خطای حالت ماندگار صفر ردیابی می کند.
$0\le k<l$ و Z_0 یک بردار دلخواه ثابت m بعدی است

حل:
$$Y_d(s)=\frac{Z_0}{s^{k+1}}$$

$$E(s)=Y_d(s)-Y(s)$$

$$E(s)=Y_d(s)-(I+G(s))^{-1}G(s)\,Y_d(s)$$

$$E(s)=(I+G(s))^{-1}\frac{Z_0}{s^{k+1}}$$

چون سیستم از نوع l است، بنابراین می توان نوشت

$$E(s)=s^{l}\,s^{-k-1}\left(Is^{l}+G'(s)\right)^{-1}Z_0$$
$$=s^{l-k-1}\left(Is^{l}+G'(s)\right)^{-1}Z_0$$

چون k همواره و حداقل یک واحد کوچکتر از l است، لذا

$$l-k\geq 1$$
$$\rightarrow \lim s\,E(s)=\lim s^{l-k}\left(Is^{l}+G'(s)\right)^{-1}Z_0=0$$

و این یعنی آنکه

$$\lim_{t\to\infty} e(t)=0$$

تذکر: در رابطهٔ فوق، $e(t)$ یک بردار m بعدی است.

نکته: برای سیستم های چند متغیره خطی، با استفاده از اصل جمع آثار، می توان نشان داد که سیستم با فیدبک منفی واحد پایدار از نوع l تمام ورودی های زیر را بدون خطا ردیابی می کند

$$y_d(t)=\sum_{k=0}^{l-1} Z_k t^k$$

Z_k: یک بردار ثابت m بعدی است.

مثال: ماتریس تابع تبدیل حلقه باز سیستمی با فیدبک واحد به صورت مقابل است. نوع آن را تشخیص و پاسخ حلقه بسته آن را بدست آورید

$$G(S)=\frac{1}{S}\begin{bmatrix}\frac{6}{1+0.2S} & \frac{-60}{1+0.05S}\\ \frac{-3}{1+0.4S} & \frac{160}{1+0.05S}\end{bmatrix}$$

اگر صورت اسمیت مک میلان $G'(S)$ را استخراج کنیم

$$G(S)=\frac{1}{S}G'(S)$$

$$G'(S)=\begin{bmatrix}\frac{6}{1+0.2S} & \frac{-60}{1+0.05S}\\ \frac{-3}{1+0.4S} & \frac{160}{1+0.05S}\end{bmatrix}$$

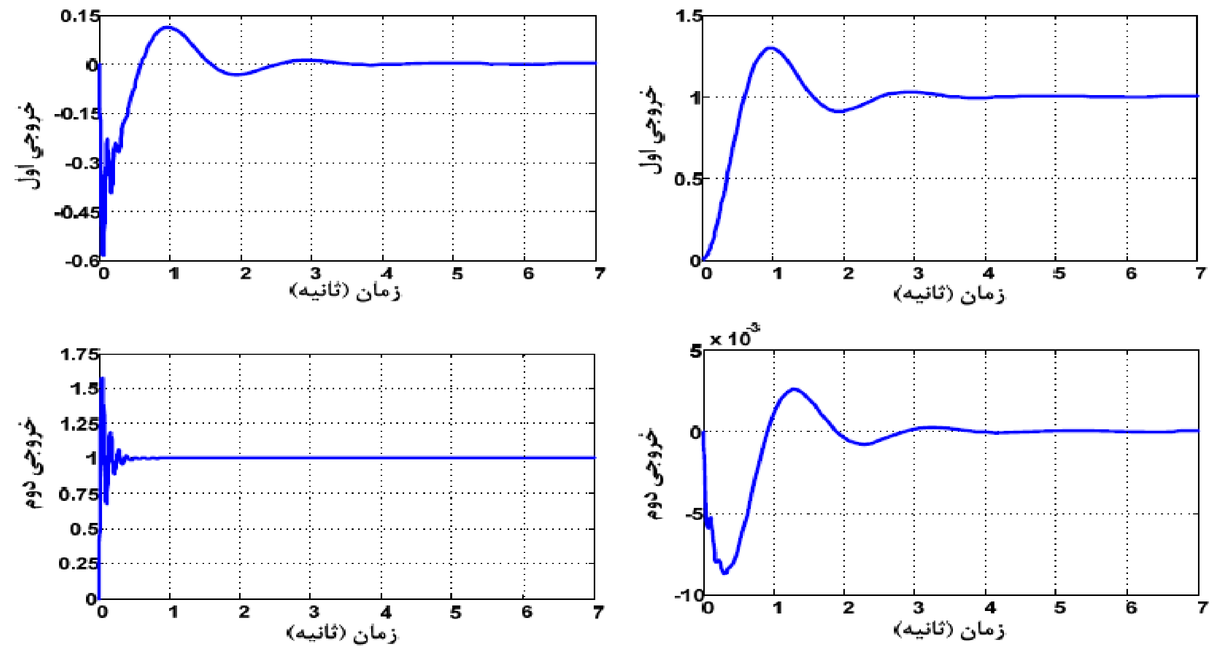
قطبهای ۰ ، ۰ ، 2.5- و 20- بدست می آید

ناویژه بودن گین dc ماتریس تابع تبدیل $G'(S)$ را بررسی می کنیم

$$\lim_{s\to 0}\Delta'(s)\,|G'(s)|=780\neq 0$$

بنابراین سیستم از نوع اسکالر یک تشخیص داده می شود و قاعدتاً باید خطای سیستم حلقه بسته در حالت ماندگار صفر گردد.

شکل های زیر پاسخ حلقه بسته سیستم را نشان می دهد.



(ب) (الف)

الف) ورودی $[1\ 0]^T$ و ب) ورودی $[0\ 1]^T$

تذکر: نوع اسکالر سیستم‌ها را می‌توان با یک حدس اولیه نیز تشخیص داد. البته این حدس باید حتماً مورد آزمایش قرار گیرد.

مثال: برای سیستمی با تابع تبدیل مقابل نوع اسکالر را تشخیص دهید

$$G(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

حل: برای تشخیص نوع کافی است در هر ستون $G(s)$ بالاترین توان s در مبدأ (قطب در مبدأ) را یافته و آنرا به عنوان نوع سیستم معرفی کنیم.
البته با رعایت این نکته که حتماً اندازه بالاترین توان s (قطب در مبداء) باید در تمام ستون‌ها یکسان باشد

در مثال فوق: در ستون اول بالاترین توان s در مبداء یک است
در ستون دوم، هم بالاترین توان s در مبداء یک است
بنابراین احتمالاً نوع اسکالر سیستم فوق، برابر یک می‌باشد.

نکته بسیار مهم: اگر نوع بدست آمده برای هر ستون از ماتریس تابع تبدیل باهم متفاوت باشد، تعیین نوع اسکالر برای سیستم منتفی شده و باید نوع برداری را تعیین کرد.

پایان قسمت اول از فصل سوم