تعاریف و مفاهیم پایه در پایداری

برای فضای حالت

$$\dot{X} = A_c\ x(t)$$

که ورودی مرجع آن صفر بوده و A_c ماتریس سیستم حلقه بسته است.

تعریف ۱: مبداء سیستم فوق را پایدار به مفهوم لیاپانوف گوییم اگر با انحراف سیستم از مبداء، کلیه حرکت های بعدی آن در یک همسایگی کوچک از مبداء باقی بماند

تعریف ۲: پایداری مجانبی

تعریف ۳: پایداری مجانبی فراگیر

ارتباط موقعیت مقادیر ویژه با پایداری سیستم های خطی

قضیه: مبداء فضای حالت سیستم فوق، پایدار است اگر و فقط اگر ماتریس A_c مقدار ویژه ای با قسمت حقیقی مثبت نداشته باشد و مقادیر ویژه با قسمت حقیقی صفر، دارای بلوک های جردن با مرتبه 1 باشد

قضیه: پایداری BIBO در سیستم های خطی، پایداری مجانبی مبداء فضای حالت را نتیجه می دهد، فقط اگر سیستم کنترل پذیر حالت و رویت پذیر باشد و یا آنکه کلیه مودهای کنترل ناپذیر و یا رویت ناپذیر قسمت حقیقی منفی داشته باشند

مفهوم پایداری داخلی

قبل از ورود به بحث پایداری داخلی، مروری بر تعریف پایداری نمائی داریم

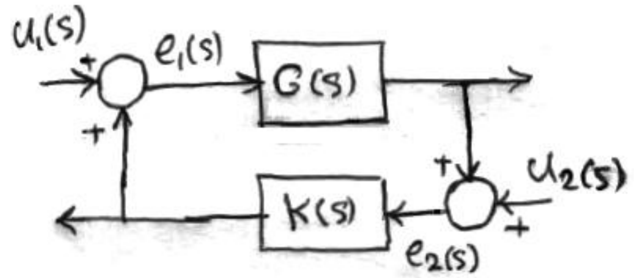
پایداری نهائی : در سیستم های چند متغیره، ماتریس تابع تبدیل گویای $G(s)$ را پایدار نهائی گویند، اگر و فقط اگر سره بوده و قطبی در سمت راست صفحه یا بر روی محور موهومی نداشته باشد.

نکته: یک سیستم ناسره، بدون قطب ناپایدار می تواند ناپایدار باشد.

مثال: سیستم $G(s)=s$ برای ورودی $\sin(t^2)$ پاسخ $2t(\cos t^2)$ را می دهد که نامحدود است.

تعریف پایداری داخلی

برای سیستمی با شکل مقابل



داریم:

$$\begin{bmatrix} e_1(s) \\ e_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} H_{11}(s) = [I - K(s)G(s)]^{-1} \\ H_{21}(s) = [I - G(s)K(s)]^{-1} G(s) \\ H_{12}(s) = H_{11}(s) K(s) \\ H_{22}(s) = (I - G(s)K(s))^{-1} G(s) K(s) \end{cases}$$

سیستم را پایدار داخلی internally stable می‌گوئیم اگر و فقط اگر ماتریس تابع تبدیل $H(s)$ پایدار نمائی باشد. این تعریف لازم می دارد که هر چهار جمله این تابع پایدار نمائی باشد

چند نکته

۱) اگر در سیستم حلقه بسته‌ای مطابق شکل قبل بین تابع تبدیل $G(s)$ و $K(s)$ حذف، قطب و صفری در نیم راست اتفاق بیفتد، منجر به ناپایداری داخلی می‌گردد.

۲) حذف قطب و صفر نیم راست در آزمون های پایداری مانند نایکوئیست که با حاصل $G(s)K(s)$ سروکار دارند مشکلی ایجاد نمی کند.

۳) اگر $G(s)$ و $K(s)$ خود ناپایدار باشند، جهت تشخیص پایداری داخلی، بررسی هر چهار تابع تبدیل در تعیین پایداری نمائی الزامی است لیکن تحت شرایطی پایداری نمائی تنها یک جمله می تواند پایداری داخلی را تضمین کند.

قضیه: اگر $K(s)$ پایدار نمائی باشد، سیستم پایدار داخلی است اگر و فقط اگر $H_{21}(s)$ پایدار نمائی باشد

اثبات: با توجه به فرضیات مسئله پس عبارت $I+K(s)H_{21}(s)$ پایدار نمائی است.

$$I+K(s)H_{21}(s)=I+K(s)\left[I-G(s)K(s)\right]^{-1}G(s)$$
$$=I+K(s)G(s)\left[I-G(s)K(s)\right]^{-1}$$
$$=\left[I-K(s)G(s)\right]^{-1}=H_{11}(s)$$

بنابراین
۱) اگر $K(s)$ و $H_{21}(s)$ پایدار نمائی باشد، حتماً $H_{11}(s)$ نیز پایدار نمائی است.
از طرفی داریم

$$H_{12}(s)=H_{11}(s)\,K(s)$$

لذا
۲) $H_{12}(s)$ نیز پایدار نمائی است. و سرانجام

۳)
$$H_{22}(s)=\left(I-G(s)K(s)\right)^{-1}$$
$$=I+H_{21}(s)\,K(s)$$

ولین حیله نیز پایدار نمائی است.

<u>قضیه:</u> اگر $K(s)$ پایدار نمائی باشد آنگاه $H_{21}(s)$ پایدار نمائی است اگر و فقط اگر

۱) $\det\left[I+G(s)K(s)\right]$ هیچ صفری حتی صفرهای در بی‌نهایت در نیم صفحه راست محور $j\omega$ نداشته باشد

۲) $\left[I-G(s)K(s)\right]^{-1}G(s)$ در هر قطب (شامل قطب در بی‌نهایت) در نیم راست صفحه s از $G(s)$ تحلیلی باشد

[یعنی، هر قطب نا پایدار $G(s)$، قطب ناپایداری از $\left[I-G(s)K(s)\right]^{-1}G(s)$ نباشد]