نحوه تعیین RGA

آرایه بهره نسبی ابزار مهمی در جفت یابی ورودی و خروجی می باشد.

ماتریس تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = [g_{ij}(s)] \qquad i,j = ۱,\ldots,m$$

$g_{ij}(s)$ بهره حلقه باز از jامین ورودی به iامین خروجی است.

$$U(s) = [u_۱(s) \quad \ldots \quad u_m(s)]^T$$

$$Y(s) = [y_۱(s) \quad \ldots \quad y_m(s)]^T$$

اگر بهره نسبی با رابطهٔ زیر تعریف گردد.

$$\lambda_{ij} = \frac{g_{ij}}{h_{ij}}$$

در رابطهٔ فوق g_{ij} و h_{ij} به صورت زیر تعریف می گردد.

g_{ij} عبارتست از بهره حالت ماندگار حلقه باز سیستم که بیان کنندهٔ نسبت خروجی iام به ورودی j ام است مشروط بر آنکه سایر ورودی ها صفرباشند. (یعنی سایر حلقه ها باز باشند) و

h_{ij} عبارتست از بهرهٔ خروجی حالت ماندگار iام نسبت به ورودی jام مشروط بر آنکه سایر حلقه های سیستم به طور محکم بسته باشد به جز حلقهٔ بین خروجی i ام و ورودی j ام

منظور از کنترل محکم آن است که در حلقه ، کنترل کننده ای گذاشته شده و اجازه تغییر مقدار خروجی آن حلقه را به خاطر اغتشاش یا تداخل نمی دهد. در این حالت خروجی y_k بازاء هر $k \neq i$ برابر صفر است. در حقیقت ورودی u_k بازاء هر $k \neq j$ به گونه ای تنظیم می گردد که خروجی y_k بازاء هر $k \neq i$ برابر صفر گردد.

بنابراین آرایه نسبی با ماتریس زیر توصیف می گردد.

$$\Lambda = [\lambda_{ij}] \qquad i,j = 1,\ldots,m$$

محاسبه h_{ij} *با توجه به تعریف فوق،* مشکل می باشد و بدنبال راه حلی برای آن خواهیم بود.

اگر Y=GU باشد پس داریم، $U=G^{-1}Y$. و با تعریف $G^{-1} = \hat{G} = [\hat{g}_{ij}]$ **می توان تغییرات کوچک ورودی j ام ناشی از تغییرات کوچک خروجی های متفاوت را به صورت زیر نوشت.**

$$\delta u_j = \sum_{k=1}^{m} \hat{g}_{jk} \delta y_k$$

اگر شرط کنترل محکم برقرار باشد، خواهیم داشت.

$$\delta u_j = \hat{g}_{ji}\delta y_i \Rightarrow \delta y_j = \frac{1}{\hat{g}_{ji}}\delta u_i \Rightarrow h_{ij} = \frac{1}{\hat{g}_{ji}} \Rightarrow\Rightarrow \lambda_{ij} = g_{ij}\hat{g}_{ji}$$

$$\Lambda(G) = G.*G^{-T}$$

در عبارت فوق *. ضرب عنصر به عنصر است.

نکات مهم :

۱) **RGA** بدست آمده در بالا، مربوط به حالت ماندگار است که با محاسبهٔ سادهٔ **G(0)** بدست می آید.

۲) **RGA** را می توان در سایر فرکانسها نیز بدست آورد.

$$\Lambda(G(j\omega)) = G(j\omega).*G(j\omega)^{-T}$$

چند مثال :

مثال ۱ ماتریس تابع تبدیل یک برج تقطیر به صورت زیر داده شده است

$$\begin{bmatrix} y_۱(s) \\ y_۲(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱۲/۸e^{-s}}{۱۶/۷s+۱} & \frac{-۱۸/۹e^{-s}}{۲۱s+۱} \\ \frac{۶/۶e^{-۷s}}{۱۰/۹s+۱} & \frac{-۱۹/۴e^{-s}}{۱۴/۴s+۱} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_۱(s) \\ u_۲(s) \end{bmatrix}$$

ماتریس حالت ماندگار G عبارت است از

$$G = \begin{bmatrix} ۱۲/۸ & -۱۸/۹ \\ ۶/۶ & -۱۹/۴ \end{bmatrix}$$

که می‌دهد

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} ۰/۱۵۷۰ & -۰/۱۵۲۹ \\ ۰/۰۵۳۴ & -۰/۱۰۳۶ \end{bmatrix}$$

و لذا RGA به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\Lambda(G) = \begin{bmatrix} ۲/۰۰۹۴ & -۱/۰۰۹۴ \\ -۱/۰۰۹۴ & ۲/۰۰۹۴ \end{bmatrix}$$

در مثال بعدی ویژگی خاص درایه های **RGA** را برای سیستم های 2×2 مورد بررسی قرار می دهیم

مثال ۲ سیستم چندمتغیره با دو ورودی و دو خروجی زیر را در نظر بگیرید

$$y_1(s) = g_{11}(s)u_1(s) + g_{12}(s)u_2(s)$$
$$y_2(s) = g_{21}(s)u_1(s) + g_{22}(s)u_2(s)$$

تابع تبدیل بین $y_1(s)$ و $u_1(s)$ با $u_2(s) = 0$، یا به عبارت دیگر بدون کنترل روی $y_2(s)$، برابر $g_{11}(s)$ است. همچنین اگر $y_2(s)$ تحت کنترل محکم باشد، یعنی $y_2(s) = 0$، داریم

$$u_2(s) = -\left[\frac{g_{21}(s)}{g_{22}(s)}\right]u_1(s)$$

و لذا

$$\begin{aligned} y_1(s) &= g_{11}(s)u_1(s) - \left[g_{12}(s)\frac{g_{21}(s)}{g_{22}(s)}\right]u_1(s) \\ &= g_{11}(s)\left[1 - \frac{g_{12}(s)g_{21}(s)}{g_{11}(s)g_{22}(s)}\right]u_1(s) \\ &= h_{11}(s)u_1(s) \end{aligned}$$

بنابراین درآیه RGA(۱,۱) برابر است با

$$\lambda_{11} = \frac{g_{11}}{h_{11}} = \frac{1}{1 - \dfrac{g_{12}g_{21}}{g_{11}g_{22}}}$$

توجه کنید که

$$h_{12} = g_{12}\left[1 - \frac{g_{11}g_{22}}{g_{12}g_{21}}\right]$$

و

$$\lambda_{12} = \frac{1}{1 - \frac{g_{11}g_{22}}{g_{12}g_{21}}} = 1 - \lambda_{11}$$

هم‌چنین

$$h_{22} = g_{22}\left[1 - \frac{g_{12}g_{21}}{g_{11}g_{22}}\right]$$

و لذا

$$\lambda_{22} = \lambda_{11}$$

و به طور مشابه

$$\lambda_{21} = 1 - \lambda_{22}$$

بنابر این با تعریف $\lambda_{11} = \lambda$، داریم

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & \lambda \end{bmatrix}$$

بررسی ویژگی‌های سیستم‌های چندمتغیره دو ورودی و دو خروجی برای مقادیر متفاوت λ

حالت اول: اگر $\lambda = 1$، در این حالت بهره‌های حلقه باز و حلقه بسته یکی هستند و تداخل‌ها بر بهره بین u_1 و y_1 هیچ تأثیری ندارند. این بدان معنی است که حلقه‌ها دکوپله هستند و لذا برای کنترل y_1 بهترین ورودی u_1 و برای کنترل y_2 بهترین ورودی u_2 است.

حالت دوم: اگر $\lambda = 0$، در این حالت $g_{11} = 0$ است و برای کنترل خروجی اول تنها می‌توان با ورودی دوم عمل کرد. همچنین ورودی اول را باید برای کنترل خروجی دوم به کار گرفت.

حالت سوم: اگر $1 > \lambda > 0$، می‌توان نتیجه گرفت که بستن حلقه دوم، بهره بین u_1 و y_1 را افزایش می‌دهد و بسته به مقدار λ، اندازه تداخل تغییر می‌کند.

حالت چهارم: اگر $\lambda > 1$، می‌توان نتیجه گرفت که تداخل قابل توجهی در سیستم است. زیرا بستن حلقه دوم، بهره بین u_1 و y_1 را کاهش می‌دهد و میزان این کاهش برای مقادیر بزرگ λ کم‌تر می‌شود و لذا تداخل بیش‌تر می‌شود.

حالت پنجم: اگر $\lambda < 0$، می‌توان نتیجه گرفت که با بستن حلقه دوم بهره بین u_1 و y_1 تغییر علامت می‌دهد. این موضوع می‌تواند موجب مشکلات کنترلی شود. لذا از ورودی اول نباید برای کنترل خروجی اول استفاده کرد. توجه کنید که درآیه $RGA(1,2)$ مثبت است و لذا خروجی اول را باید با ورودی دوم و خروجی دوم را باید با ورودی اول کنترل نمود.

مثال ۳ ماتریس تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{0/1s+1} & \dfrac{1}{s+1} \\ \dfrac{2}{s+1} & \dfrac{1}{0/5s+1} \end{bmatrix}$$

با اعمال ورودی $\mathbf{u} = [1 \quad 0]^T$، مقدار حالت ماندگار خروجی اول یک است، $y_1 = 1$ و لذا $g_{11}(0) = 1$. توجه کنید که با $u_2(s) = -2\frac{0/5s+1}{s+1}u_1(s)$، حلقه دوم تحت کنترل محکم خواهد بود و $y_2(s) = 0$. با جایگزینی $u_2(s)$ در حلقه اول به دست می‌آوریم

$$y_1(s) = \left[\frac{1}{0/1s+1} + \frac{1}{s+1}\frac{-2(0/5s+1)}{s+1}\right]u_1(s)$$

و مقدار حالت ماندگار y_1 برای ورودی پله واحد $u_1 = ۱$ ،۱- است، لذا $h_{11}(0) = -۱$ و $\lambda_{11} = -۱$ بنابر این RGAی سیستم به صورت زیر است

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

با توجه به حالت پنجم در مثال ۷-۲، باید از u_2 برای کنترل y_1 و از u_1 برای کنترل y_2 استفاده کرد.

خواص مختلف آرایه نسبی

خاصیت ۱ با توجه به این که $GG^{-1} = I$، می‌توان نشان داد که مجموع عناصر در هر ردیف و هر ستون RGA برابر ۱ است.

خاصیت ۲ جایگشت ردیف‌ها و ستون‌ها در ماتریس تابع تبدیل سیستم به همان جایگشت در RGA منجر می‌گردد.

خاصیت ۳ RGA به مقیاس‌دهی ورودی و خروجی وابسته نیست.

خاصیت ۴ *RGA* برای ماتریس‌های تابع تبدیل قطری و بالا یا پایین مثلثی ماتریس واحد است. همچنین برای سیستم‌های چندمتغیره ۲ × ۲ و ۳ × ۳، از $\Lambda(G) = I$ می‌توان نتیجه گرفت که سیستم در حالت ۲ × ۲ حتماً مثلثی است و در حالت ۳ × ۳ *عمدتاً مثلثی* است. سیستم‌های چندمتغیره عمدتاً مثلثی، سیستم‌هایی است که با جایگشت‌های ستونی یا ردیفی می‌توان آن‌ها را مثلثی کرد. توجه کنید که این موضوع برای حالت کلی $m \times m$ لزوماً صادق نیست.

خاصیت ۵ عناصر RGA را می‌توان از رابطه‌ی زیر به دست آورد

$$\lambda_{ij} = (-۱)^{i+j} \frac{g_{ij} \det(G^{ij})}{\det(G)}$$

که در آن G^{ij} از G با حذف ستون و ردیف مناسب به‌دست امده است.

خاصیت ۶ می‌توان نشان داد که آشفتگی‌های نسبی در عناصر G و عناصر معکوس G به صورت زیر به هم مرتبط هستند

$$\frac{d\hat{g}_{ji}}{\hat{g}_{ji}} = -\lambda_{ij}\frac{dg_{ij}}{g_{ij}}$$

توجه کنید که اگر λ_{ij} بزرگ باشد، تغییر در g_{ij} به تغییرات نسبی بزرگ‌تری در $\hat{g}_{ji}$ منجر می‌گردد که نامطلوب است.

خاصیت ۷ اگر یک عنصر ماتریس تابع تبدیل از g_{ij} به $g_{ij}(۱-\frac{۱}{\lambda_{ij}})$ تغییر کند، ماتریس تابع تبدیل آشفته شده، ویژه خواهد شد.

خاصیت ۸ در صورتی که از معکوس تابع تبدیل در طراحی کنترل‌کننده استفاده کنیم، با بزرگ بودن عناصر RGA حساسیت بسیار شدید خواهیم داشت.

خاصیت ۹ می‌توان نشان داد که

$$\frac{d\lambda_{ij}}{\lambda_{ij}} = \left(۱-\lambda_{ij}\right)\frac{dg_{ij}}{g_{ij}}$$

خاصیت ۱۰ اگر ماتریس تابع تبدیل $G(s)$ سیستم چندمتغیره پایدار، صفر و قطبی در $s=۰$ نداشته باشد، و $\lambda_{ij}(\infty)$ و $\lambda_{ij}(۰)$ هم علامت نباشند، آنگاه یکی از موارد زیر درست است: $g_{ij}(s)$ یک صفر در نیمه راست صفحه دارد، $G(s)$ یک صفر انتقال در نیمه راست صفحه دارد یا $G^{ij}(s)$ یک صفر انتقال در نیمه‌ی راست صفحه دارد.

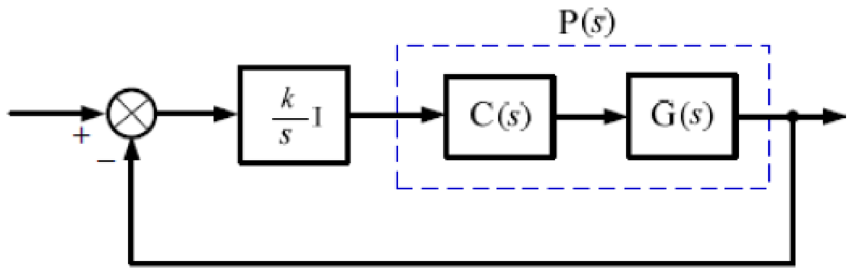
ملاحظات پیکربندی در طراحی سیستم های کنترل غیرمتمرکز

یکی از مشکلات عمده در طراحی سیستم های کنترل غیر متمرکز تداخل است که در ازای بروز اغتشاش بین حلقه مختلف، عملکرد حلقه بستهٔ سیستم مختل می گردد

می توان از RGA علاوه بر انتخاب جفت های ورودی و خروجی ، در ارزیابی پایداری حلقه بسته سیستم های کنترلی چند متغیره نیز استفاده کرد.

با توجه به کاربرد ویژه کنترل کننده های انتگرالی، می توان گفت که اگر در یک سیستم کنترل از کنترل کننده های انتگرالی استفاده شده باشد به طور خودکار شرط کنترل محکم که در بحث RGA فرض شده بود در حالت ماندگار برقرار است.

یک ساختار کنترل انتگرالی در شکل زیر نشان داده شده است.



تعریف سیستم پایدارپذیر انتگرالی

دستگاه P(S) را پایدارپذیر انتگرالی گویند اگر یک K>0 وجود داشته باشد که سیستم حلقه بسته نشان داده شده در شکل فوق را پایدار کرده و خطای حالت ماندگار آن برای تمام ورودی‌های ثابت صفر باشد.

شرط لازم جهت پایداری حلقه بسته سیستم فوق

شرط لازم برای تامین پایداری حلقه بستهٔ سیستم فوق آنست که اولاً ماتریس تابع تبدیل P(S) گویا، پایدار و سره بوده و در ضمن det[P(0)]>0

نکته : شرط فوق کفایت نمی کند و امکان دارد این شرط برقرار باشد اما سیستم حلق بسته ناپایدار باشد.

البته در مورد سیستم های SISO کفایت نیز دارد

مثال ماتریس تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$P(s) = \frac{۱}{s+۱}\begin{bmatrix} \pm ۲ & ۱ \\ ۱ & \pm ۲ \end{bmatrix}$$

در هر دو حالت $\det[P(۰)] = ۳$ و شرط لازم پایداری را دارند. معادله مشخصه حلقه بسته برای سیستم نشان داده در بلوک دیاگرام شکل فوق برای ۲+ عبارت است از

$$s^۴ + ۲s^۳ + \left(۱ + ۴k\right) s^۲ + ۴ks + ۳k^۲ = ۰$$

که برای $k > ۰$ پایدار است. در حالی که برای ۲- معادله‌ی مشخصه حلقه بسته عبارت است از

$$s^۴ + ۲s^۳ + \left(۱ - ۴k\right) s^۲ - ۴ks + ۳k^۲ = ۰$$

که برای $k > ۰$ ناپایدار است.