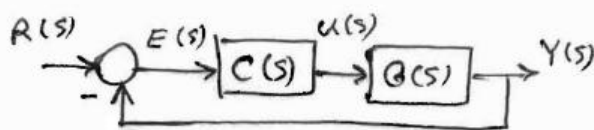


محدودیت های عملکردی در سیستم های چند متغیره

در طراحی سیستم های کنترلی خصوصاً سیستم های چند متغیره آشنایی با محدودیت های عملکردی سیستم در حوزه زمان و فرکانس بسیار حائز اهمیت است

محدودیت های عملکردی در حوزه زمان

نخست به بررسی چند تعریف می پردازیم
اگر به سیستم حلقه بسته شکل مقابل
با خصوصیات زیر



$$[G(s)]_{m \times m}$$

حذف صفر و قطب روی منحنی دهده (در بنده است صفحه 5) و سیستم حلقه باز کنترلی
پذیرناجی است.

ورودی مطابق بردار $r(t)$ اعمال کنیم

$$r(t) = [0 \dots 0 \quad \hat{r} \quad 0 \dots 0]^T$$

$$\hat{r} = \hat{r} \text{ (مبنای ورودی)}$$

\hat{r} = سایر ورودی ها

خطا

زمان استقرار سیستم عبارتست از

$$t_{si} = \max_{k \in \{1, \dots, m\}} \inf_{s > 0} \left\{ s : |y_k(t) - r_k(t)| \leq \varepsilon, t > s \right\}$$

زمان صعود (زمان خیز)

$$t_{ri} = \sup_{s > 0} \left\{ s : y_i(t) \leq \hat{r} t / s, t \in (0, s) \right\}$$

فراجهش (overshoot) در فوجی که به صورت y_i^0 نشان داده می شود

$$y_i^0 = \sup_{t > 0} \{ y_i(t) - r_i(t), 0 \}$$

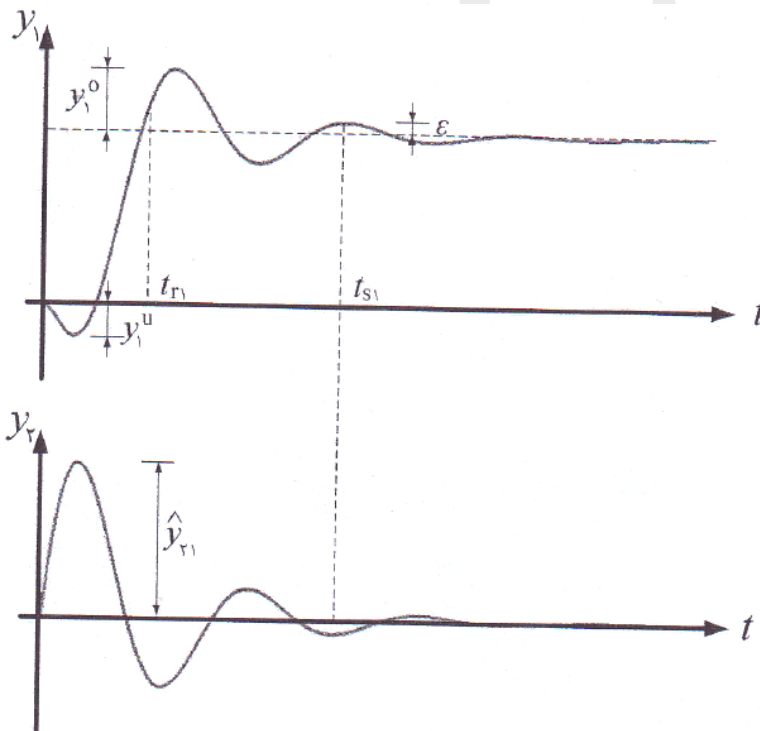
✓ خروجی در خروجی y_i^u نشان داده شده و عبارت از

$$y_i^u = \sup_{t \geq 0} \{-y_i(t), 0\}$$

✓ داخل از y_i به خروجی k که مخالف y_i است به صورت $\hat{y}_{ki} \geq 0$ نشان داده شده و عبارت از

$$\hat{y}_{ki} = \sup_{t \geq 0} \{|y_k(t)|\}$$

تعریف فوق در شکل زیر نشان داده شده اند.



تعریف تابع حساسیت و مانژیس مکل حساسیت

تابع حساسیت عبارت از:

$$S(s) = (I + G(s)C(s))^{-1}$$

و مانژیس تابع مکل حساسیت که در حقیقت همان تابع تبدیل حلقه بسته سیستم است عبارت خواهد بود از:

$$T(s) = G(s)C(s)(I + G(s)C(s))^{-1}$$

$$T(s) + S(s) = I$$

می توان نشان داد که ←

تعریف بردار جهت قطب فروبی y_p
 اگر p قطب سیستم باشد آنگاه y_p بردار جهت قطب فروبی می گویند آنرا
 $G^{-1}(p)y_p = 0$

مفهوم بردار y_p

اندازه ی y_p نامین عضو y_p نشان می دهد که نامین مؤد سیستم، ماحیه لایزه در خروجی تأثیر نهاده است به عنوان مثال برای سیستم با سه خروجی اگر y_p به شکل زیر باشد

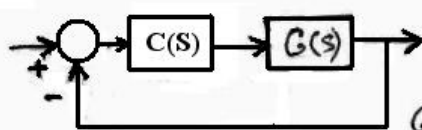
$$y_p = [1 \ 3 \ 2]^T$$

آنگاه خواهیم داشت دومین مؤد در پاسخ خروجی تأثیر بیشتری دارد

ارتباط بین ماتریس حساسیت و مکمل آن با بردارهای جهت صفر و قطب فروبی

$$S(p)y_p = 0 \quad \text{و} \quad y_z^T T(z) = 0 \quad \text{می توان نشان داد که}$$

$$y_z^T \int_0^\infty e^{-z^* t} y(t) dt = y_z^T Y(z) = y_z^T T(z) R(z) = 0 \quad \text{همچنین داریم}$$



فرضیه: برای سیستم حلقه بسته شکل مقابل

با شرایط اولیه صفر در $t=0$ حین آنکه $G(s)$ یک صفر در نیمه راست داشته و اولیه دار به بردار جهت صفر خروجی متناظر با آن صفر مثبت باشد آنگاه پاسخ به حلقه بسته سیستم

$$r(t) = [\hat{r} \ 0 \dots \dots \ 0]^T \quad \text{باز ورودی}$$

$$y_z, y_1^u + \sum_{k=2}^m |y_{zk}| y_k \geq \frac{1}{e^{2\epsilon t_1} - 1} \left[y_z(\hat{r} - \epsilon) - \epsilon \sum_{k=2}^m |y_{zk}| \right]$$

رابطه زیر را به آوردن می سازد

برای اثبات به مرجع شماره ۶ از فصل ۵ کتاب مراجعه شد.

نکته: اگر سطح استقرار ϵ کوچک باشد، از رابطه فوق خواهیم داشت.

$$y_{z1} y_1^u + \sum_{k=2}^m |y_{zk}| \hat{y}_{k1} \geq \frac{y_{z1} \hat{r}}{e^{z t_{s1}} - 1}$$

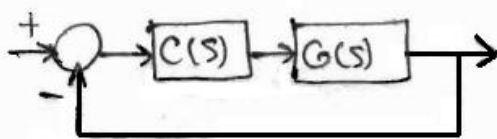
رابطه فوق در حقیقت بیانگر وجود یک کران پایین روی خروجی و حاصل جمع ناشی از تداخل هاست و اگر z (صفر انتقال) نزدیک مبدأ باشد این کران بزرگ خواهد شد.

از طرفی باز اگر یک کران مشخص را در نظر بگیریم تداخل کوچک باشد، هزینه آن را با یک خروجی بزرگ خواهیم پرداخت

نکته ۲:

برای سیستم های SISO وجود صفر در نیمه راست صفحه s حتماً متغیره یا سطح حلقه بسته خواهد شد، اما برای سیستم های چند متغیره با توجه به رابطه ناتوانی فوق الزاماً آنگونه نخواهد بود. تنها در حالتی که y_{zk} ها برای $k \neq 1$ صفر نباشند و y_{z1} غیر صفر باشد وجود خروجی حتمی است در غیر اینصورت احتمال وجود و عدم آن در پاسخ بلیه وجود دارد.

فرضیه: سیستم حلقه بسته پایدار باشد اولیه صفر در $s=0$ نشان داده شده



در تکل مقابل با فرض آنکه $G(s)$ یک قطب پایدار p دارد و اولین درجه y_{p1} مثبت است، برای ورودی

$$r(t) = [\hat{r}_1 \dots \hat{r}_m]$$

یا سطح حلقه بسته ناتوانی زیر را می توان نوشت

$$y_{p1} y_1^0 + \sum_{k=2}^m |y_{pk}| \hat{y}_{k1} \geq \frac{\hat{r}_1 p t_{r1}}{p} y_{p1} - (e^{p t_{r1}} - 1) \sum_{k=2}^m |y_{pk}| \hat{y}_{k1}$$

برای اثبات به مرجع ۶ فصل ۵ مراجعه شود

بَلَكَةً: ناساوی فوق نشان می دهد که اگر $y_{pk} \gg y_{pi}$ باشد
 نقطه آثر P دور از مبدأ باشد و زمان حید طولانی باشد، پاسخ به فرجهش
 بزرگی خواهد داشت

مثال : تابع تبدیل فرآیند یک مخزن چهارگانه در زیر آورده شده است.

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{1.69}{1+76.75S} & \frac{1.69}{(1+76.75S)(1+52.3S)} \\ \frac{3.11}{(1+56.36S)(1+111.55S)} & \frac{1.97}{1+111.55S} \end{pmatrix}$$

صفرهای انتقال این سیستم عبارتند از $S = -0.051$ و $S = 0.014$ اگر جهت صفر خروجی را که با عامل فاز غیرمینیمم مربوط می گردد ($S = 0.014$) را محاسبه کنیم خواهیم داشت.

$$y_z = \begin{bmatrix} 0/64 \\ -0/77 \end{bmatrix}$$

برای این سیستم کنترل کننده ی PI دکوپله به صورت $k_i(1 + 1/\tau_i S)$ طراحی می کنیم

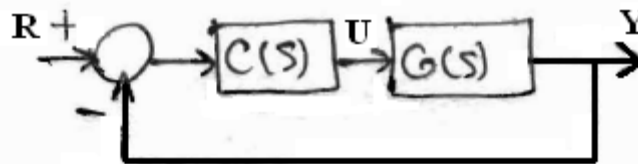
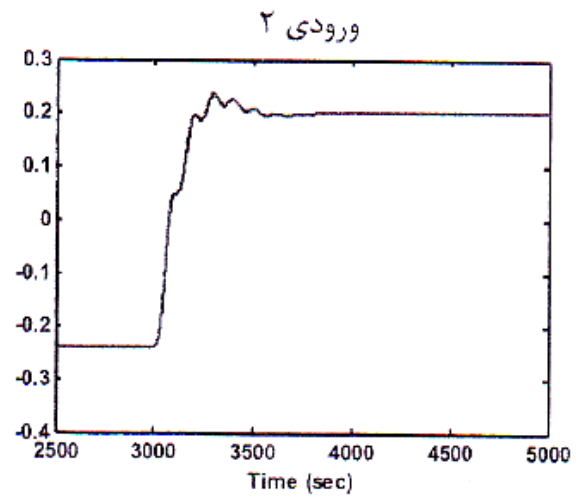
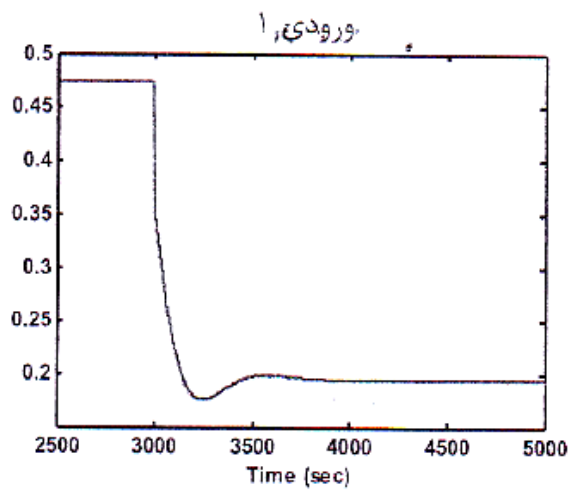
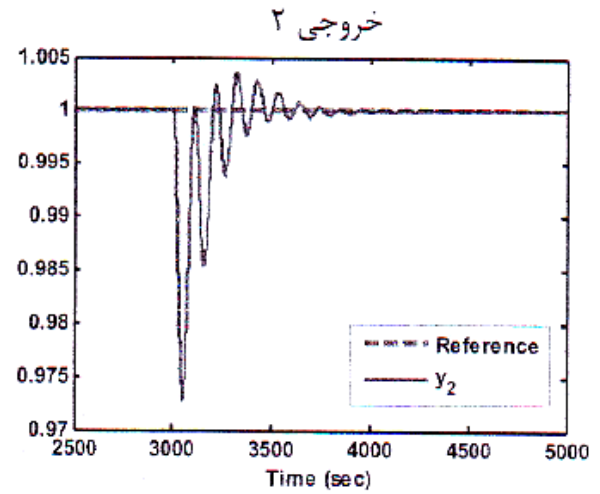
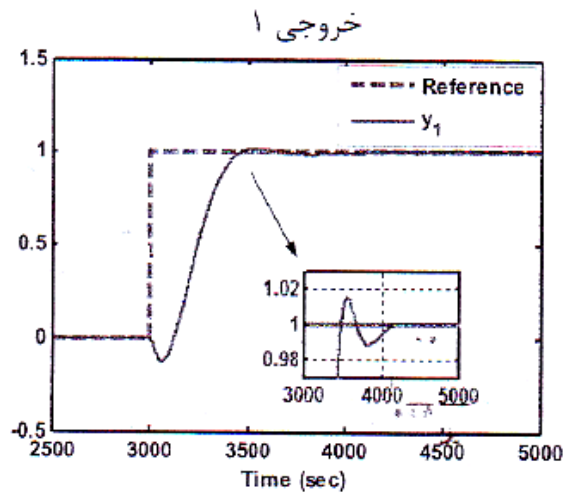
$$k_1 = -0/125, \tau_1 = 119, \quad k_2 = 0/01, \tau_2 = 0/05$$

هدف ردیابی پله ی واحد در هر دو کانال است. نتایج در شکل زیر آمده است. اگر ناساوی (۵-۳-۵) را در نظر بگیریم، داریم

$$0/64 y_1^u + 0/77 \hat{y}_{r1} \geq \frac{1}{e^{0/014 \times 440} - 1} [0/64 \times 0/98 - 0/02 \times 0/77]$$

$$y_1^u \geq -1/2 \hat{y}_{r1} + 0/0015$$

با توجه به نتایج به دست آمده داریم $\hat{y}_{r1} = 0/027$ و $y_1^u = 0/13$. با توجه به ناساوی فوق، دیده می شود که می توان به عملکرد بهتری از دید فروجهش و تداخل دست یافت.



محدودیت های عملکردی در حوزه فرکانس

هدف عمومی از طراحی سیستم های حلقه بسته آن است که علاوه بر حفظ پایداری حلقه بسته، عملکرد سیستم در مقابل ورودی های مرجع، اغتشاش و نویز بهبود یابد.

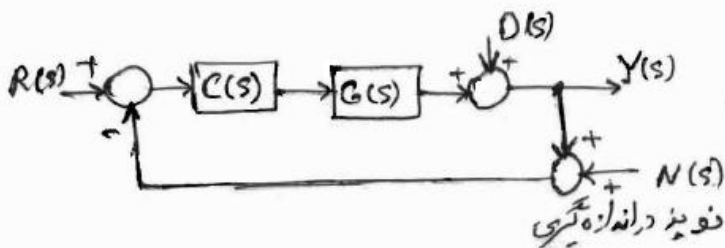
آزاد سیستم حلقه باز خود را به آسانی هدف اصلی طراحی و استفاده از فیدبک بهبود عملکرد سیستم حلقه بسته خواهد بود.

نکته: حفظ توانمان پایداری حلقه بسته و بهبود عملکرد سیستم، کاری دشوار است، چرا که به عنوان مثال افزایش بهره سیستم علی رغم بهبود عملکرد سیستم منجر به نا پایداری نیز خواهد شد. بهره بالا همچنین فشار اشیاع محرک ها و تقویت نویز را نیز به همراه خواهد داشت.

مشخصه های عملکردی مهم در سیستم های کنترل

- ۱- تضعیف اغتشاش
- ۲- رد بانی ورودی های مرجع
- ۳- کاهش اثر نویز اندازه گیری

پدرسی تضعیف اغتشاش



با توجه به بلوک دیگرام نقل مقابل هدف از تضعیف اغتشاش، کاهش یا حذف اثر $d(t)$ بر خروجی $y(t)$ است.

یکی از روش های کاهش یا حذف اثر اغتشاش، استفاده از کنشل میس خور است. اما ساده ترین روش، استفاده از همان چیران ساز $C(s)$ است.

$$Y(s) = (I + G(s)C(s))^{-1} D(s) = S(s) D(s)$$

داریم

یعنی $S(s)$ (ماتریس حساسیت) عمداً همان تابع تبدیل خروجی ناشی از اغتشاش است. بنابراین با فرض تضعیف اغتشاش در خروجی باید شرط زیر برقرار باشد

$$\gamma \leq \sigma(S(s))$$

که γ یک عدد مثبت کوچک است. در این حالت داریم

$$\|Y(s)\| \leq \gamma \|D(s)\|$$

ردیابی ورودی مرجع

در مسأله ردیابی، طراحی $C(s)$ باید به گونه ای باشد که خروجی $Y(s)$ ورودی های مرجع $R(s)$ را با کمترین خطا ردیابی کند. یعنی

$$R(s) - Y(s) = (I + G(s)C(s))^{-1} R(s) = S(s)R(s)$$

$$\gamma \leq \sigma(S(s))$$

و با فرض

$$\|R(s) - Y(s)\| \leq \gamma \|R(s)\|$$

خواهیم داشت

که با کوچک کردن γ هدف کنش لی مورد نظر برآورده می گردد

بررسی کاهش اثر نویز اندازه گیری

در سیستم های واقعی همواره عملیات اندازه گیری همراه با نویز است و فیدبک نباید نویز را تقویت کند. یکی از اهداف کنش لی کاهش اثر نویز است.

تابع تبدیل از $N(s)$ به $Y(s)$ عبارتست از:

$$Y(s) = G(s)C(s)(I + G(s)C(s))^{-1}N(s) = G(s)C(s)S(s)\tilde{N}(s)$$

$$\gamma \leq \sigma(G(s)C(s)S(s))$$

با فرض

$$\|Y(s)\| \leq \gamma \|N(s)\|$$

داریم

بنابراین کاهش γ متناسبی روی کاهش مقدار Y ناشی از نویز دارد.

نکته: بسیار مهم

از قبل داشتیم

$$S(s) + T(s) = I$$

$$S(s) + G(s)C(s)(I + G(s)C(s))^{-1} = I$$

پس خواهیم داشت

$$\Rightarrow \boxed{S(s) + G(s)C(s)S(s) = I} *$$

رابطه فوق در حقیقت نوعی محدودیت عملکردی است
چونکه قبلاً دیده شد برای ردیابی مناسب ورودی مد رجحان باید

$$\bar{\sigma}(S(j\omega)) \leq \gamma$$

و همچنین برای کاهش اثر نویز اندازه گیری باید

$$\bar{\sigma}(G(j\omega)C(j\omega)S(j\omega)) \leq \gamma$$

برقرار باشد. معنی مطلوب آنست که هر دو مقدار استثنایی کوچکتری از γ
گرفته و این غیر ممکن است چراکه اگر یکی را از γ کوچکتر کنیم دیگری
برای برقراری رابطه بالا باید بزرگتر از γ گردد.

لااقل می توان گفت که این کار در نظام فرکانس ها امکان پذیر نیست.

نتیجه: با توجه به نکته فوق تلاش می گردد که در یک ناحیه فرکانسی
مثل $[\omega_0, \omega_\infty]$ مقدار $\bar{\sigma}(S(j\omega))$ را کوچک کرده و برای ناحیه

$[\omega_\infty, \omega_0]$ مقدار $\bar{\sigma}(G(j\omega)C(j\omega)S(j\omega))$ را کوچک گردد.

بدین ترتیب با حفظ پایداری سیستم شرایط فوق بنیز برقرار شده است و در ناحیه
 $[\omega_0, \omega_\infty]$ نسبتاً عملکرد مطلوبی را برای سیستم خواهیم داشت
اما باید متذکر شد که تغییر سریع مقادیر استثنایی در فرکانس ω_0
تقریباً امکان ناپذیر است چراکه منجر به ناپایداری سیستم می گردد.

به عنوان نمونه قبلاً در سیستمهای SISO داشتیم که جهت حفظ پایداری سیستم حلقه بسته بهتر
است، شیب دیاگرام اندازه بد در اطراف فرکانس ω_0 (فرکانسی که اندازه تابع تبدیل حلقه سیستم
برابر صفر db می شود) کمتر از -20 db/decade نباشد. که در این حالت تغییرات فاز زیاد شده و منجر
به منفی شدن P_M و در نهایت ناپایداری سیستم می گردد.

بیان فوق در مورد سیستم های چند متغیره به شکل زیر درستی آید.

قضیه: برای سیستمی با ماتریس تابع تبدیل حلقه باز $G(s)C(s)$ که $m \times m$ می باشد و فرض کنید که هر درایه از این ماتریس دارای درجه بندی حداقل ۲ باشد. اگر $S(s)$ یابد و باشد آن گاه داریم

$$\int_0^{\infty} \log |\det(S(j\omega))| d\omega = \pi \sum_i \operatorname{Re}(p_i)$$

$$\sum_j \int_0^{\infty} \log \sigma_j(S(j\omega)) d\omega = \pi \sum_i \operatorname{Re}(p_i)$$

$$\int_0^{\infty} \log \underline{\sigma}(S(j\omega)) d\omega \leq \frac{\pi}{n} \sum_i \operatorname{Re}(p_i)$$

$$\int_0^{\infty} \log \bar{\sigma}(S(j\omega)) d\omega \geq \frac{\pi}{n} \sum_i \operatorname{Re}(p_i)$$

مثال. معادلات خطی سازی شده یک راکتور ناپایدار در زیر داده شده است

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1/38 & -0/2077 & 6/715 & -5/676 \\ -0/5814 & -4/29 & 0 & 0/675 \\ 1/067 & 4/273 & -6/654 & 5/893 \\ 0/048 & 4/273 & 1/243 & -2/104 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5/679 & 0 \\ 1/136 & -3/146 \\ 1/136 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

مقادیر ویژه ماتریس A سیستم عبارتند از $1/99$ و $0/064$ ، $-5/057$ ، $-8/67$ دو هدف کنترلی در این سیستم پایداری سازی حلقه بسته و بهبود ردیابی ورودی مرجع هستند برای دستیابی به خطای حالت ماندگار صفر در ردیابی ورودی پله باید داشته باشیم $\bar{\sigma}(S(0)) = 0$ و برای سرعت مناسب در پاسخ حلقه بسته باید $\bar{\sigma}(S(j\omega)) \leq \epsilon$ برای $\omega \in [0, \omega_B]$ باشد، که در آن ϵ به حد کافی کوچک و ω_B به حد کافی بزرگ است

مقادیر استثنایی سیستم جبران نشده در شکل زیر ترسیم شده است. با توجه به شکل داریم.

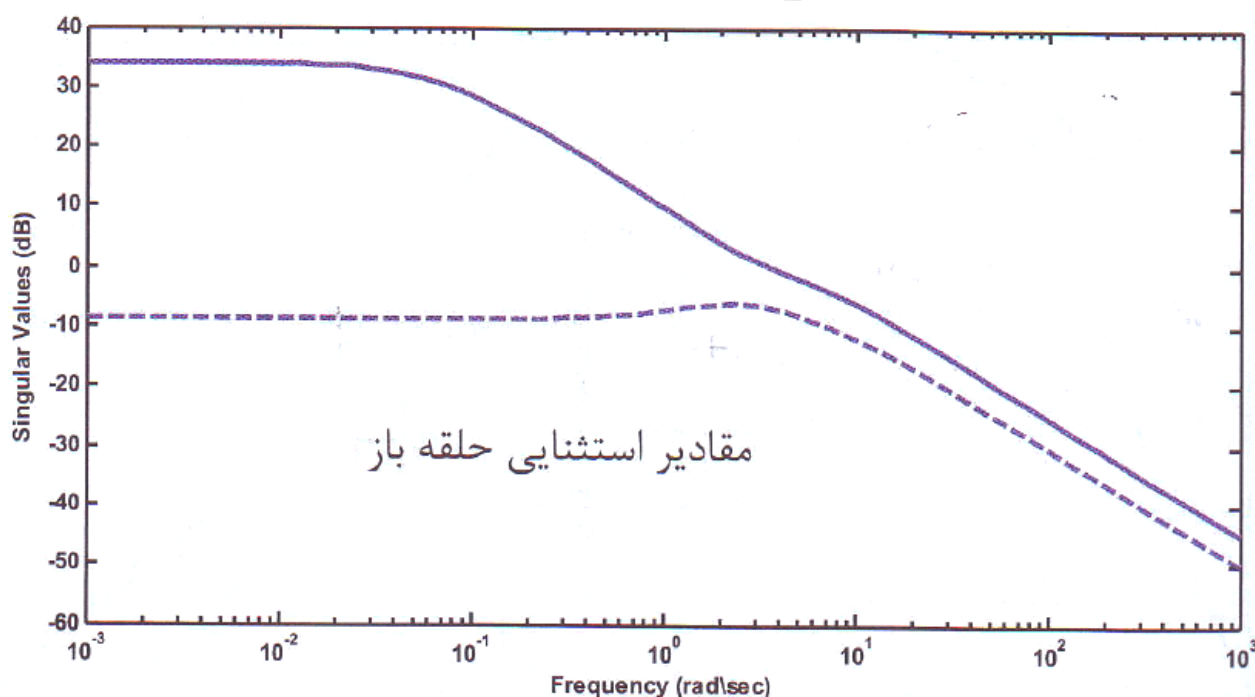
$$\overline{\sigma}(S(j10^{-2})) \geq 10/14 \text{ و } \underline{\sigma}(S(j10^{-2})) \leq 0/4$$

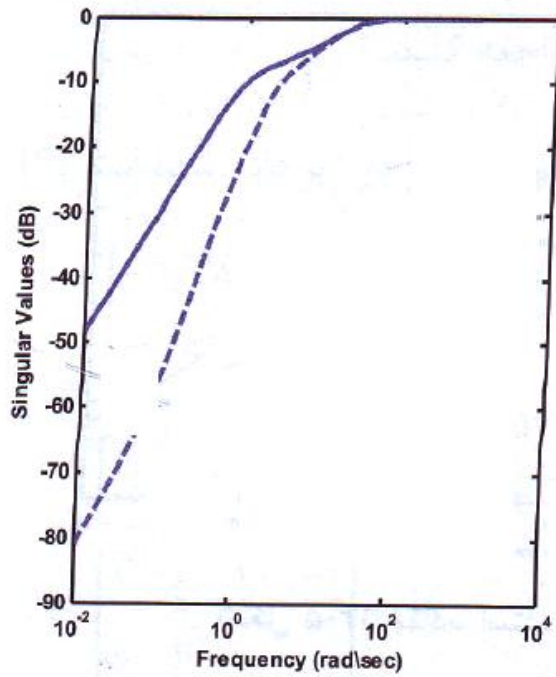
ماتریس های ضرایب تناسبی و انتگرالی کنترل کننده PI در [5] برای دستیابی به

اهداف عملکردی به صورت زیر طراحی شده است

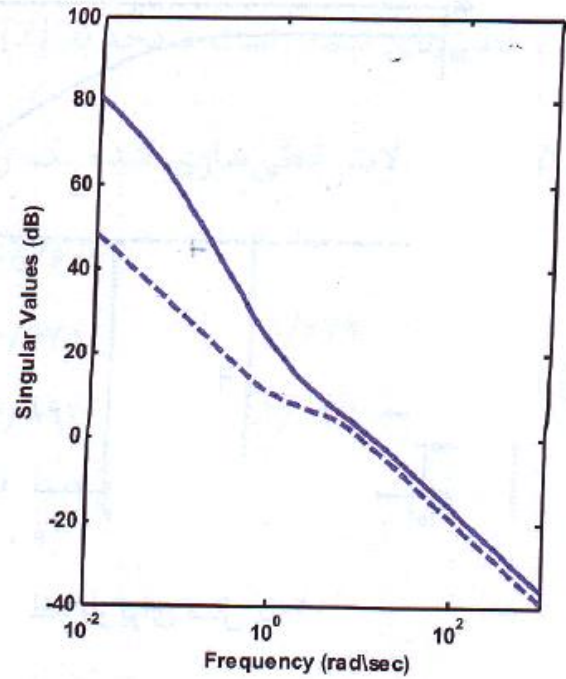
$$K_p = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_i = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$$

شکل های (الف) و (ب) به ترتیب مقادیر استثنایی تابع بهره حلقه جبران شده و تابع حساسیت سیستم را نشان می دهد. همان طور که از شکل های زیر مشاهده می شود، سیستم ملزومه ی ردیابی را به خوبی برآورده کرده است. شکل های (الف) و (ب) صفحه بعد نیز پاسخ زمانی سیستم حلقه بسته را نشان می دهد. همان طور که در این شکل ها مشخص است ردیابی در حالت ماندگار به خوبی انجام شده است.



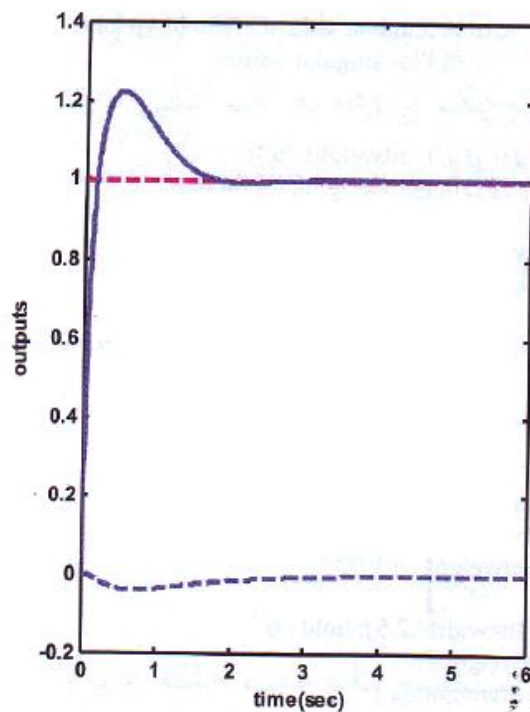


(ب)

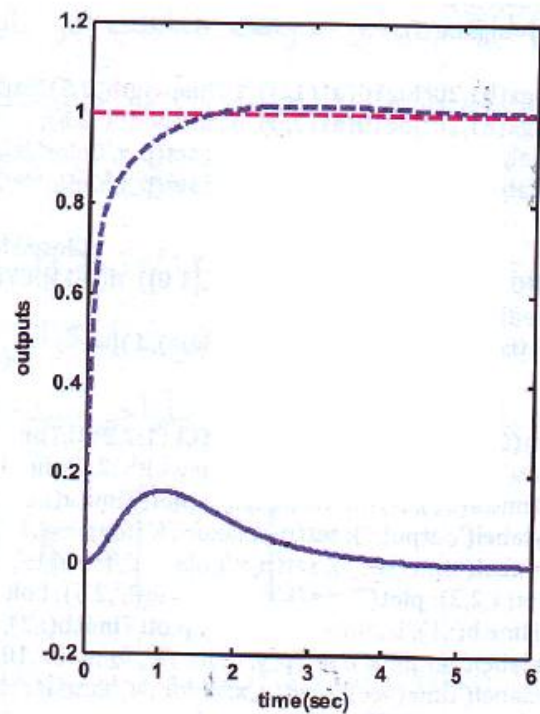


(الف)

شکل مقادیر استثنایی ، (الف) تابع بهره حلقه (ب) تابع حساسیت



(ب)



(الف)

پاسخ پله سیستم حلقه بسته در مثال (الف) ورودی $[1 \ 0]^T$ (ب) ورودی $[0 \ 1]^T$ خروجی اول به صورت توپر و خروجی دوم به صورت خطچین نمایش داده شده است.