جزوه دستنویس درس دینامیک

نوت برداری شده از کلاس درس دینامیک تدریس شده توسط مهندس ***حمید آبرفت***

دانشگاه آزاد اسلامی واحد همدان

گروه عمران

1387

با تشکر از آقای ابوالفضل اکبری برای در اختیار قرار دادن این جزوه

هشدار: این جزوه توسط مدرس درس مورد بازبینی قرار نگرفته است و ممکن است ایراداتی هم در آن وجود داشته باشد. استفاده از مطالب ارایه شده با مسئولیت فرد استفاده کننده خواهد بود.

دینامیک

سرفصل‌ها
- مقدمه
- سینماتیک ذرات مادی
- سینتیک ذرات مادی
- سینماتیک اجسام صلب
- سینتیک اجسام صلب
- ارتعاشات

* مقدمه
علم مکانیک: علم بررسی حالت سکون و حرکت اجسام

مکانیک
- استاتیک: بررسی حالت سکون و تعادل اجسام
- دینامیک: بررسی حالت حرکت اجسام
- سیالات: بررسی رفتار مایعات

دینامیک:
- سینماتیک: (هندسه حرکت) روابط بین زمان، جابه‌جایی، سرعت و شتاب را در یک حرکت بررسی می‌کند و جرم و نیرو را در نظر نمی‌گیرد.

- سینتیک: بررسی روابط زمان، سرعت، شتاب و جابه‌جایی با در

در نظر گرفتن جرم جسم و نیروهای وارد بر آن می باشد.

ذره (نقطه مادی): جسم صلبی که از حرکت دورانی حول مرکز ثقل خودش بتوان صرفنظر کرد، هر چند که ابعاد بزرگی داشته باشد.

جسم صلب: جسمی که نتوان از حرکت دورانی حول مرکز ثقلش صرفنظر کرد و این حرکت را بایستی در روابط حرکتی آن جسم وارد کرده و در نظر گرفت.

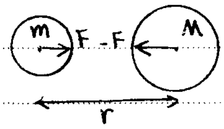
+ قوانین نیوتن

- قانون اول نیوتن:

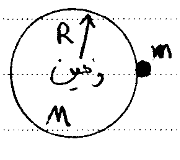
- قانون دوم نیوتن: $a \propto F \rightarrow F = ma$

- قانون سوم نیوتن:

- قانون جهانی گرانش (جاذبه عمومی):



$$F = G\frac{Mm}{r^2} \rightarrow G = 6.673 \times 10^{-11} \ m^3/kg\,s^2$$



$$F = G\frac{Mm}{R^2} = mg_0$$

$$(I) \quad g_0 = G\frac{M}{R^2} = 9.81 \ m/s^2 = 32.17 \ ft/s^2$$

$$(II) \quad g_h = \frac{GM}{(R+h)^2}$$

$$\left.\begin{aligned}(I)\quad & GM = g_0 R^2 \\ (II)\quad & GM = g_h (R+h)^2\end{aligned}\right\} \Rightarrow g_h = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2} = \frac{g_0}{(1+\frac{h}{R})^2}$$

$$g_h = \frac{9.81}{(1+\frac{h(m)}{6.37\times10^5})^2}$$

$$g = 9.780327(1+0.0052799\sin^2\gamma + 0.000023\sin^4\gamma + \dots)$$

$$a = 3.382\times10^{-2}\cos^2\gamma \ \ m/s^2$$

شتاب واقعی زمین : $g+a$

+ دیمانسیون

	SI	دیمانسیون
Length	طول	L
Math	جرم	M
Time	زمان	T
	نیرو	?

نیوتن = $Kg\times\frac{m}{s^2}$

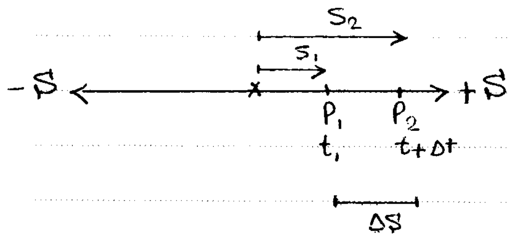
دیمانسیون نیرو = MLT^{-2}

دیمانسیون سرعت = LT^{-1}

تمرین : ۵ _ ۷ _ ۱۲

* سینماتیک ذرات

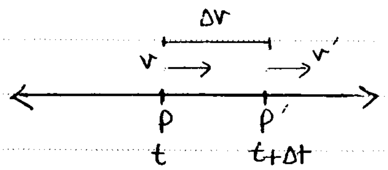
\- حرکت مستقیم الخط



سرعت متوسط: $v_{av} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

سرعت لحظه‌ای: $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$ I

$$\text{واحد سرعت} = \frac{\text{واحد مسافت}}{\text{واحد زمان}} : \; m/s \,,\; Km/s \ldots$$



شتاب متوسط $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

شتاب: نرخ تغییرات سرعت در واحد زمان

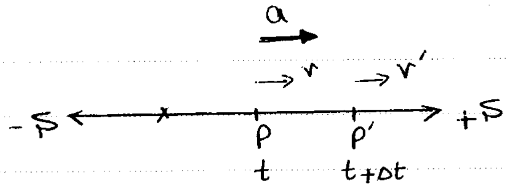
شتاب لحظه‌ای $a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s}$ II $\quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

$$\text{واحد شتاب} = \frac{\text{واحد سرعت}}{\text{واحد زمان}} = \frac{\text{واحد مسافت}}{\text{واحد زمان}} : \; \frac{m}{s^2} \ldots$$

$$a = \frac{dv}{dt} \times \frac{dx}{dx} = \frac{dv}{dx} \times \frac{dx}{dt} \Rightarrow v \frac{dv}{dx} = a$$

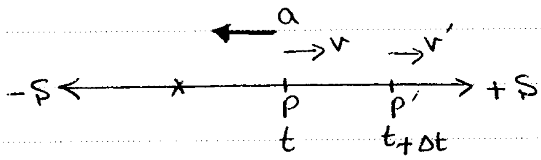
حالات مختلف شتاب و سرعت

حالت_۱



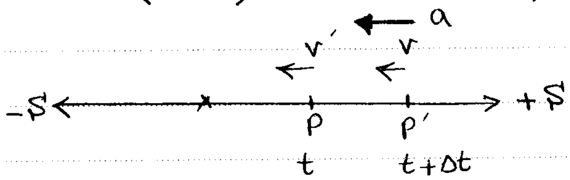
$v' > v \rightarrow \Delta v > 0 \quad , \quad v > 0 \quad , \quad a > 0$

حالت_۲



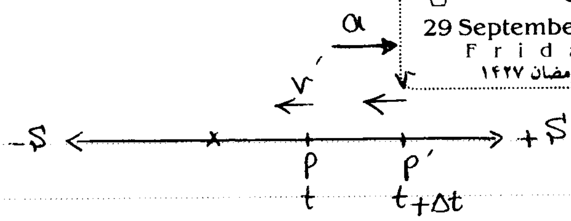
$v' < v \rightarrow \Delta v < 0 \quad , \quad v > 0 \quad , \quad a < 0$

حالت_۳



$|v'| > |v| \rightarrow \Delta v < 0 \quad , \quad v < 0 \quad , \quad a < 0$

حالت_۴



$|v'| < |v| \rightarrow \Delta v > 0 \quad , \quad v < 0 \quad , \quad a > 0$

در حالت کلی

$av > 0 \rightarrow$ حرکت تند شونده

$av < 0 \rightarrow$ حرکت کند شونده

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)=\frac{d^2s}{dt^2}=\ddot{s} \quad \text{III}$$

$$\left.\begin{array}{l}(\text{I}) \rightarrow v=\dfrac{ds}{dt} \Rightarrow dt=\dfrac{ds}{v} \\ (\text{II}) \rightarrow a=\dfrac{dv}{dt} \Rightarrow dt=\dfrac{dv}{a}\end{array}\right\} \rightarrow \frac{ds}{v}=\frac{dv}{a}$$

$$\Rightarrow \boxed{v\,dv=a\,ds} \quad \text{IV}$$

رابطه مستقل از زمان

یا $\dot{s}\,d\dot{s}=\ddot{s}\,ds$

مثال: برای یک نقطه مادی که دارای حرکت در راستای مستقیم که با معادله $s=t^4-6t^2+1$ می‌باشد. تغییرات مسافت سرعت و شتاب را برحسب زمان رسم کنید. (s برحسب متر)

$$s=t^4-6t^2+1$$

$$v=\frac{ds}{dt}=4t^3-12t$$

$$a=\frac{dv}{dt}=12t^2-12$$

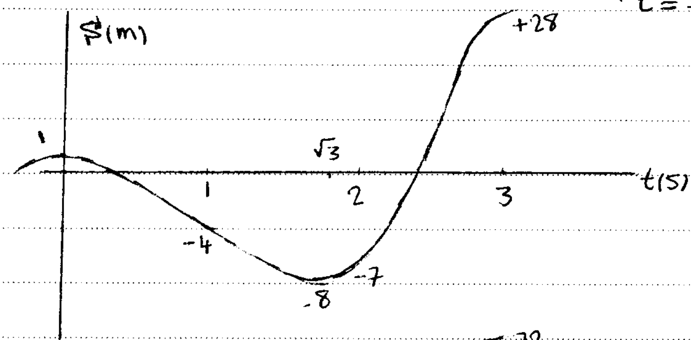
برای زمان های مختلف (به دلخواه) داریم:

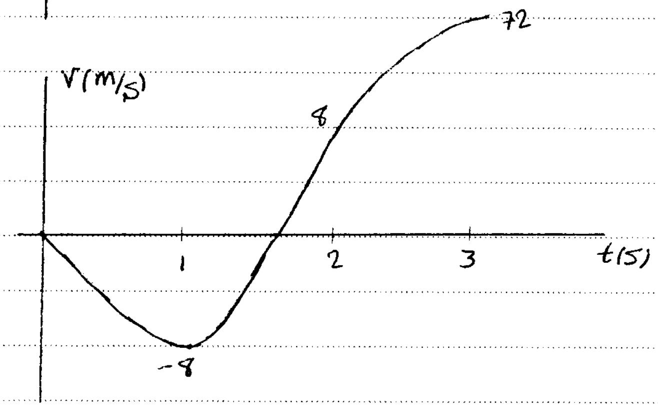
$t:\ 0 \quad 0.5 \quad 1 \quad 1.5 \quad 2 \quad 2.5 \quad 3$

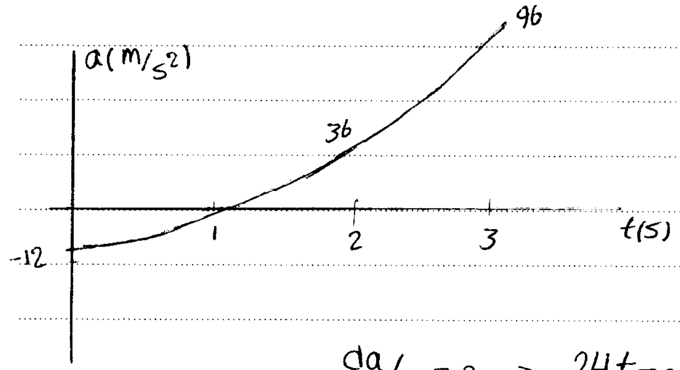
$$\frac{ds}{dt}=0 \rightarrow 4t^3-12t=0 \rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=\sqrt{3} \end{cases}$$

...ت خم منحنی با توجه به مشتق دوم (a) مشخص می‌گردد. برای رسم نمودار مکان و تشخیص خم منحنی از
نمودار (a) که مشتق دوم معادله مکان است کمک می‌گیریم، در فاصله ۰ تا ۲ ثانیه شتاب مثبت و در نتیجه خم
منحنی مکان رو به بالا می‌باشد (مثل حفره کاسه) در نتیجه عکس شتاب منفی و در نتیجه خم منحنی مکان رو به پایین
است. با توجه به آنکه سرعت مشتق مکان است در ... سرعت صفر شده است پس در این مکان نمودار
... max و min است.

$$\frac{dv}{dt}=0 \rightarrow 12t^2-12=0 \rightarrow \begin{cases} t=-1 \\ t=+1 \end{cases}$$







$$da/dt=0 \rightarrow 24t=0 \rightarrow t=0$$

حالات مختلف شتاب

الف - شتاب صفر

$$a=0 \Rightarrow a=\frac{dv}{dt}=0 \Rightarrow v=ct$$

$$v=\frac{ds}{dt}=ct \Rightarrow ds=vdt$$

$$\int_{S_0}^{S} ds=\int_0^t vdt$$

$$\Rightarrow S=vt+S_0 \quad (I)$$

ب - شتاب ثابت

$$a=ct \Rightarrow a=\frac{dv}{dt}=ct \Rightarrow dv=adt$$

$$\int_{v_0}^{v} dv=\int_0^t adt \Rightarrow v=at+v_0 \quad (II)$$

$$v=\frac{ds}{dt} \Rightarrow ds=vdt$$

$$\int_{S_0}^{S} ds=\int_0^t vdt$$

$$II \Rightarrow \int_0^S ds=\int_0^t (at+v_0)dt$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}at^2+v_0t+S_0$$

$$\int_{v_0}^{v} vdv=\int_{S_0}^{S} ads$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{2}v^2\right]_{v_0}^{v}=\left[aS\right]_{S_0}^{S}$$

$$\Rightarrow v^2-v_0^2=2a(S-S_0)$$

★ ج - شتاب تابعی از زمان

$$a=f(t) \Rightarrow a=\frac{dv}{dt}=f(t)$$

$$dv=f(t)dt$$

$$\int_{v_0}^{v} dv=\int_0^t f(t)dt$$

$$\Rightarrow V - V_0 = \int_0^t f(t)\,dt \rightarrow V = \underbrace{\int_0^t f(t)\,dt + V_0}_{h(t)}$$

$$V = \frac{ds}{dt} \rightarrow ds = V dt$$

$$\rightarrow ds = h(t)dt$$

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t h(t)dt$$

$$s - s_0 = \int_0^t h(t)dt \rightarrow s = \underbrace{\int_0^t h(t)dt + s_0}_{g(t)}$$

د- شتاب تابعی از مسافت

$$a = f(s) \xrightarrow{v\,dv = a\,ds} \int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{s_0}^{s} f(s)ds$$

$$\left[\frac{1}{2}v^2\right]_{v_0}^{v} = \int_{s_0}^{s} f(s)ds$$

$$v^2 - v_0^2 = 2\int_{s_0}^{s} f(s)ds$$

$$\rightarrow v^2 = 2\int_{s_0}^{s} f(s)ds + v_0^2$$

فرض می‌گیریم: $v = K(s)$

$$v = \frac{ds}{dt} \rightarrow K(s) = \frac{ds}{dt}$$

$$\Rightarrow dt = \frac{ds}{K(s)}$$

$$\int_0^t dt = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{K(s)} \rightarrow t = \underbrace{\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{K(s)}}_{g(s)} \rightarrow s = g^{-1}(t)$$

$$v = K(g^{-1}(t)) \rightarrow a = f(g^{-1}(t))$$

هـ - شتاب تابعی از سرعت

$$a=f(v) \Rightarrow a=\frac{dv}{dt}=f(v) \Rightarrow \int_0^t dt = \overbrace{\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{f(v)}}^{t=u(v)} \Rightarrow v=u^{-1}(t)$$

$$v\,dv=f(v)\,ds \Rightarrow ds=\frac{v\,dv}{f(v)} \Rightarrow \int_{s_0}^{s} ds=\int_{v_0}^{v}\frac{v\,dv}{f(v)}$$

$$\Rightarrow s-s_0=\int_{v_0}^{v}\frac{v\,dv}{f(v)} \Rightarrow s=\int_{v_0}^{v}\frac{v\,dv}{f(v)}+s_0=P(v)$$

$$\Rightarrow s=P(u^{-1}(t))$$

مثال: توپی با سرعت $30\,m/s$ از لبه یک ساختمان به ارتفاع $70m$ به طور عمود به بالا پرتاب می‌شود.

الف- سرعت و ارتفاع توپ را از زمین در لحظه‌ای مانند t تعیین کنید.

ب- توپ حداکثر تا چه ارتفاعی بالا می‌رود و سرعت در بالاترین نقطه چه‌قدر است.

ج- کل زمانی که طول می‌کشد که توپ به زمین برسد چه‌قدر است.

د- سرعت توپ در لحظه‌ای که به زمین می‌رسد چه مقدار است.

نکته: شیب خط مماس بر منحنی مسافت-زمان در هر نقطه برابر است با مقدار سرعت در آن نقطه.

نکته: شیب خط مماس بر منحنی سرعت-زمان در هر نقطه برابر است با شتاب در آن نقطه.

هـ- سرعت توپ را برحسب فاصله آن از زمین بیان کنید.

مثال: اگر تغییر در شتاب ثقل برای فواصل زیاد از سطح زمین در نظر بگیریم برد گلوله ای که به طرف بالا در امتداد قائم از سطح زمین با سرعت های اولیه زیر پرتاب شود چه مقدار خواهد بود.

الف - $300\ m/s$

ب - $3000\ m/s$

ج - $11180\ m/s$

در ضمن اگر شتاب ثقل در همه جا یکسان در نظر گرفته شود مسئله را دوباره حل کنید.

$\uparrow +s$ $\quad \downarrow g_0 = -9.81$

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R+s)^2} = -9.81 \frac{R^2}{(R+s)^2}$$

$$a = f(s)$$

$$v\,dv = a\,ds \Rightarrow \int_{v_0}^{0} v\,dv = \int_0^h -g_0 \frac{R^2}{(R+s)^2}\,ds$$

$$\left[\frac{1}{2}v^2\right]_{v_0}^{0} = -g_0 R^2 \int_0^h \frac{ds}{(R+s)^2}$$

$$0 \cancel{-} \frac{1}{2}v_0^2 = \cancel{-} g_0 R^2 \left[\frac{-1}{R+s}\right]_0^h \Rightarrow \frac{v_0^2}{2g_0R^2} = \frac{-1}{R+h} + \frac{1}{R}$$

$$\frac{1}{R+h} = \frac{1}{R} - \frac{V_0^2}{2g_0R^2} = \frac{2g_0R - V_0^2}{2g_0R^2} \Rightarrow \boxed{h = \frac{2g_0R^2}{2g_0R - V_0^2} - R}$$

$g_0 = 9.81\ m/s^2$

$R = 6.371 \times 10^6 m$

$V_0 = 300\ m/s \Rightarrow h = 4587m$

$V_0 = 3000\ m/s \Rightarrow h = 494300\ m$

$V_0 = 11180\ m/s \Rightarrow h \to \infty$

$g = g_0 = -9.81 m/s^2$

$$V^2 - V_0^2 = 2a(S - S_0)$$

$$0 - V_0^2 = -2 \times 9.81\,(h - 0)$$

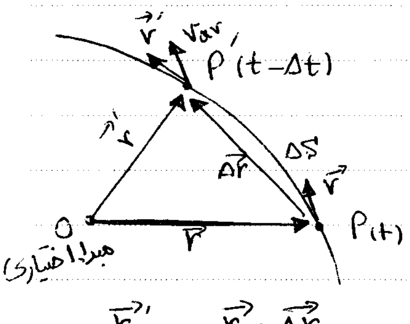
$$\Rightarrow h = \frac{V_0^2}{2g} = \frac{V_0^2}{19.62}$$

$V_0 = 300\ m/s \Rightarrow h = 4587\ m$

$V_0 = 3000\ m/s \Rightarrow h = 458715m$

$V_0 = 11180\ m/s \Rightarrow h = 6370663m$

+ حرکت منحنی الخط در صفحه



$\vec{r}' = \vec{r} + \Delta\vec{r}$

$\vec{V}_{ar} = \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ نسبت برداری

بردار $\vec{v}$ $\vec{a}$ $\vec{s}$

مقدار $\begin{cases} |\vec{v}| & |\vec{a}| & |\vec{s}| \\ v & a & s \end{cases}$

u_{ar} سرعت متوسط $= \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ نسبت اسکالر

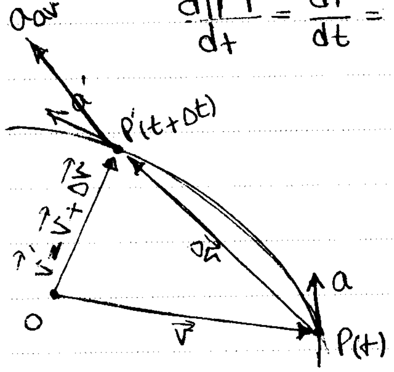
لحظه‌ای $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$

تندی لحظه‌ای : $u = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \dot{s}$

لحظه‌ای $u = |\vec{v}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = |\dot{\vec{r}}| = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$

نکته : اندازه مشتق بردار موقعیت با مشتق اندازه بردار موقعیت نباید اشتباه گرفته شود زیرا اولی مشتق یک بردار است ولی دومی مشتق یک اسکالر می باشد.

$$\frac{d|\vec{r}|}{dt} = \frac{dr}{dt} = \dot{r}$$



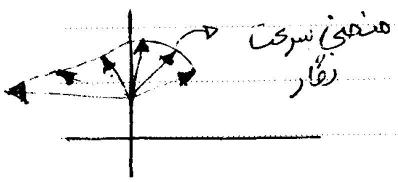
$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

لحظه‌ای $a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dot{\vec{v}}$

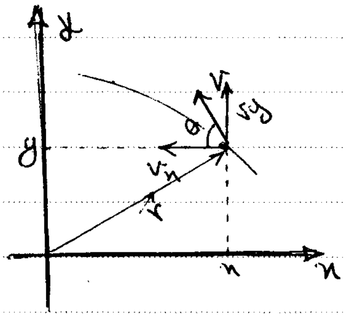
$$\Delta\vec{v} = \vec{v}' - \vec{v}$$

نکته : Δv و a همیشه در جهت تقعر منحنی هستند.

نکته : بردار شتاب دارای راستای خاصی نیست ولی مؤلفه عمود بر مسیر آن همیشه به سمت مرکز منحنی است.



شیب منحنی در هر نقطه برابر است با شتاب



★ + حرکت منحنی الخط در مختصات دکارتی $(x - y)$

$v_x = v\cos\theta$

$v_y = v\sin\theta$

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ $\quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ $\quad \begin{cases} v_x = \dot{x} \\ v_y = \dot{y} \end{cases}$

$\vec{v} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j}) = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow \vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}$ $\quad \begin{cases} a_x = \ddot{x} \\ a_y = \ddot{y} \end{cases}$

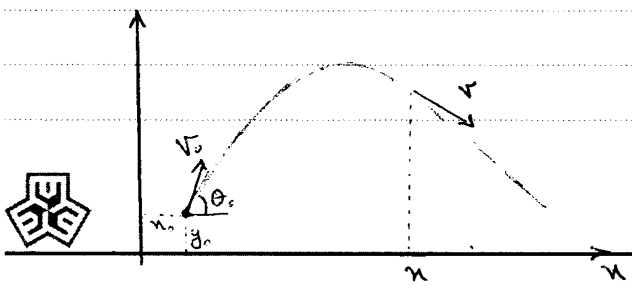
$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad \theta = tg^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$

تمرین : ۲_۷ ، ۲_۱۲ ، ۲_۸۵ ، ۲_۹۵

نکته : حرکت در دستگاه دکارتی از دو حرکت مستقیم الخط مستقل در دو راستای x و y تشکیل می شود.

+ حرکت آزاد پرتابه



راستای x ⇐ حرکت یکنواخت

$$v_x = cte \Rightarrow v_{0x} = v_x = v_0 \cos\theta_0$$

$$x = v_x t + x_0$$

$$\Rightarrow \boxed{x = v_0 \cos\theta_0 \, t + x_0} \quad \mathrm{I}$$

راستای y ⇐ حرکت شتاب ثابت

$$\begin{cases} a_y = g = \ddot{y} = -9.81 \, m/s^2 \\ v_y = \dot{y} = -gt + v_{0y} = -gt + v_0 \sin\theta_0 \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0y} t + y_0 = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\theta_0 + y_0 \\ v_y^2 - v_{0y}^2 = -2g(y - y_0) \end{cases}$$

با فرض اینکه $x_0 = y_0 = 0 \Rightarrow x = v_0 \cos\theta_0 \, t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\theta_0}$

$$y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\theta_0} + v_0 \sin\theta_0 \frac{x}{v_0 \cos\theta_0}$$

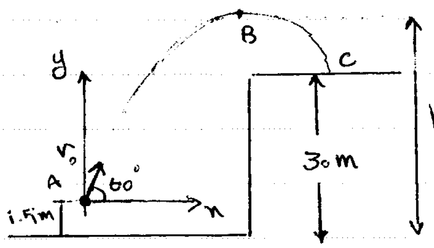
$$\Rightarrow y = \frac{-g \sec^2\theta_0}{2 v_0^2} x^2 + \operatorname{tg}\theta_0 \, x$$

مثال: توپی از نقطه‌ای به ارتفاع $1.5m$ از سطح زمین به بالای ساختمانی به ارتفاع $3m$ پرتاب می‌شود اگر سرعت اولیه توپ $40 m/s$ و زاویه آن با افق 60° باشد معین کنید.

چهارشنبه ۱۹
11 October 2006
Wednesday
۱۷ رمضان ۱۴۲۷

الف - حداکثر ارتفاعی را که توپ بالا می‌رود:

ب - برد یا فاصله افقی توپ از جایی که پرتاب می‌شود تا جایی که به بام برخورد می‌کند:



$\theta_0 = 60$

$v_0 = 40\ m/s$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{0x} = 40\cos 60° = 20\ m/s \\ v_{0y} = 40\sin 60° = 34.64\ m/s \end{cases}$$

$$B \begin{cases} v_{Bx} = v_{0x} = 20\ m/s \\ v_{By} = 0 \end{cases} \qquad y_B = h - 1.5\,m$$

$$v_{By}^2 - v_{0y}^2 = -2g(y - y_0)$$

$$0 - 34.64^2 = -2 \times 9.81\,(h - 1.5 - 0)$$

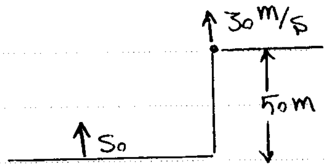
$$\Rightarrow \underline{h = 62.66\,m}$$

$$y = \frac{-g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta_0} + x\,tg\,\theta_0 = \frac{-9.81 x^2}{2 \times 40^2 \times \cos^2 60} + tg\,60\,x$$

$$C \rightarrow y_C = 30 - 1.5 = 28.5$$

$$\Rightarrow y = y_C \Rightarrow \underline{x = 122.23\,m}$$

حل مثال جلسه قبل :



$S_0 = 50\,m$

$V_0 = 30\,m/s$

$a = g = -9.81\,m/s^2$

الف : $V = at + V_0$

$\to V = -9.81t + 30$

$S = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + S_0$

$\to S = 4.905t^2 + 30t + 50$

ب : روش اول

در اوج : $V = 0$

$\to V^2 - V_0^2 = 2a(S - S_0)$

$0 - 30^2 = -2(9.81)(S_{max} - 50)$

$\to S_{max} = 95.9\,m$

روش دوم

$\frac{dS}{dt} = 0 \to -9.81t + 30 = 0 \to t = 3.06$

$S = S_{max} = 95.9\,m$

ج : روی زمین $S = 0 \to -4.905t^2 + 30t + 50 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} t = -1.36\,s & \text{غ ق ق} \\ t = \underline{7.48}\,s & \text{ق ق} \end{cases}$

روش اول

ب: $V = -9.81t + 30$

$V = (-9.81 \times 7.4) + 30 \rightarrow V = -43.38\ m/s$

روش دوم

$V^2 - V_0^2 = 2a(S - S_0)$

$V^2 - 30^2 = -2 \times 9.81\,(0 - 50)$

$V^2 = (43.38)^2$

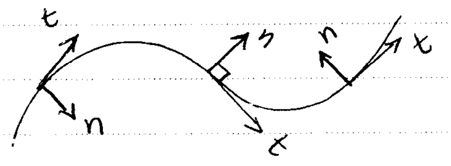
$V = -43.38\ m/s$

چون V در خلاف جهت S است.

هـ: $V^2 - 30^2 = -2 \times 9.81\,(S - 50)$

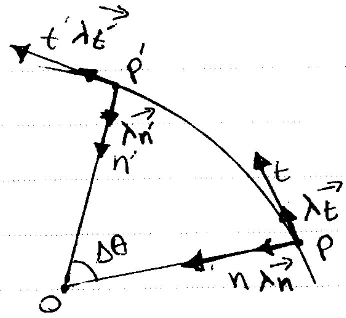
$\rightarrow V = \pm\sqrt{-19.62S + 1881}$

+ حرکت منحنی الخط در مختصات مماسی ـ عمودی (n-t):



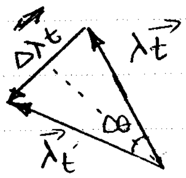
در این نوع حرکت محور مماسی t همیشه مماس بر مسیر و در جهت حرکت ذره می باشد و محور عمودی n همواره عمود بر مسیر و به سمت مرکز انحنا فرض می شود.

مولفه شتاب در دو راستای مماسی و عمودی وجود دارد که مولفه عمودی آن همواره مثبت می باشد ولی سرعت فقط دارای مولفه مماسی می باشد.



λ_t : بردار یکه امتداد مماسی

λ_n : بردار یکه امتداد عمودی (قائم)



مقدار $\Delta\lambda_t = \underset{1}{\lambda_t}\sin\frac{\Delta\theta}{2} + \underset{1}{\lambda_t'}\sin\frac{\Delta\theta}{2}$

$$\boxed{\Delta\lambda_t = 2\sin\frac{\Delta\theta}{2}}$$

$$\frac{\Delta\lambda_t}{\Delta\theta} = \frac{2\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta\theta}$$

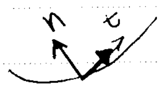
$$\rightarrow \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta\lambda_t}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} = 1 \qquad \mathrm{I}$$

$\theta < 6^\circ \rightarrow \sin\theta \simeq tg\,\theta \cong \theta$ رادیان

مقدار $\boxed{\frac{d\lambda_t}{d\theta} = 1}$ $\rightarrow$ $\boxed{\frac{d\vec{\lambda_t}}{d\theta} = \vec{\lambda_n}}$ II

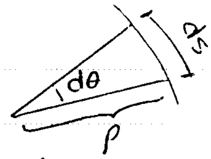
سمت چپ رابطه II حاصل مشتق گیری از بردار λ_t ها با شرط بین یک بردارهای ما است و قبلاً ثابت شد که مقدار آن برابر یک است لذا حاصل باید یک بردار یکه باشد و این بردار یکه با توجه به شکلها رسم شد به صورت بردار λ_n به دست می آید.

$\boxed{\vec{V} = V.\vec{\lambda_t}}$ III $\quad V_t = V$
$V_n = 0$



$$\vec{v} = v\,\vec{\lambda_t} = \frac{ds}{dt}\,\vec{\lambda_t} = \frac{\rho\, d\theta}{dt}\,\vec{\lambda_t} = \rho\dot{\theta}\,\vec{\lambda_t}$$

سرعت



$$v\,\vec{\lambda_t} = \rho\dot{\theta}\,\vec{\lambda_t}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \rho\dot{\theta}} \quad \text{IV}$$

$$ds = \rho\, d\theta$$

$$\rightarrow \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v\,\vec{\lambda_t}\right) = \frac{dv}{dt}\,\vec{\lambda_t} + v\,\frac{d\vec{\lambda_t}}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{\lambda_t}}{dt} = \frac{d\vec{\lambda_t}}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{\lambda_t}}{d\theta}}_{\vec{\lambda_n}} \times \underbrace{\frac{d\theta}{ds}}_{1/\rho} \times \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v} = \frac{v}{\rho}\,\vec{\lambda_n}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = \underbrace{\frac{dv}{dt}\,\vec{\lambda_t}}_{a_t} + \underbrace{\frac{v^2}{\rho}\,\vec{\lambda_n}}_{a_n}} \quad \text{V}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\rho^2\,\dot{\theta}^2}{\rho} = \rho\dot{\theta}^2 = v\dot{\theta}$$

در مختصات مماسی - عمودی

۱- بردار سرعت تنها دارای مولفه مماسی می باشد که مقدار آن برابر است با تندی را اندازه

سرعت ذره) و همواره مثبت می باشد.

۲- بردار شتاب دو مولفه عمودی و مماسی دارد که مولفه مماسی آن می تواند مثبت منفی یا صفر باشد ولی مولفه عمودی آن همواره مثبت است.

۳- در نقطه عطف منحنی مقدار ρ بینهایت می شود لذا $\frac{v^2}{\rho}$ برابر صفر می شود و شتاب عمودی در نقطه عطف صفر می شود.

برای مولفه مماسی حرکت

$$V = V_t$$

برای حالت خاص:

$$V_t = V = \dot{S} \qquad a = \dot{V} = \ddot{S} = \underline{cte}$$

حالت خاص

$$V_t = a_t \cdot t + V_{0t}$$

$$S_t = \frac{1}{2} a_t t^2 + V_{0t}\, t + S_{0t}$$

$$V_t^2 - V_{0t}^2 = 2a_t\,(S_t - S_{0t})$$

در حالت کلی:

$$a_t = \frac{dV_t}{dt}$$

$$V_t\, dV_t = a_t\, dS_t$$

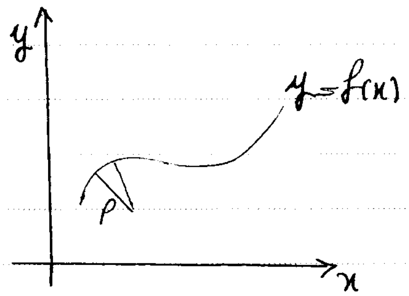
$$ds = \rho d\theta$$

$$V_t = V = \frac{ds}{dt} = \frac{\rho d\theta}{d\theta} = \rho\dot{\theta} \quad \rightarrow \quad V_t = \rho\dot{\theta}$$

$$a_t = \frac{dv_t}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho\dot{\theta}) = \dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} \rightarrow \boxed{a_t = \dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}}$$

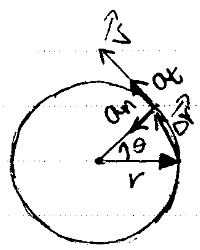
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \rho\dot{\theta}^2 \qquad v_n = 0$$

$$\rightarrow a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$



$$\rho = \left| \frac{(1+y'^2)^{1.5}}{y''} \right|$$

حالت خاص ـ حرکت دایره‌ای

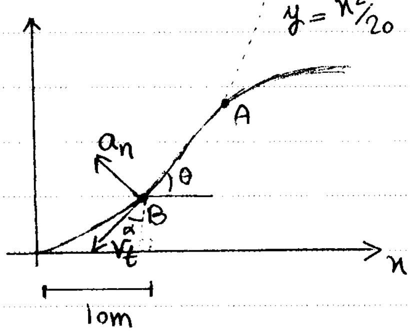


$$\rho = r = cte \quad \begin{cases} v_t = \rho\dot{\theta} = r\dot{\theta} \\ v_n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_t = r\ddot{\theta} \\ a_n = r\dot{\theta}^2 \end{cases} \rightarrow a = r\sqrt{\ddot{\theta}^2 + \dot{\theta}^4}$$

$$v_t = cte \rightarrow \begin{cases} a_t = 0 \\ a_n = \frac{v^2}{\rho} \end{cases}$$

مثال: اسکی بازی با اندازه سرعت ثابت $6\ m/s$ از نقطه A شروع به حرکت کرده و مسیر سهمی شکلی را که با معادله $y=\frac{x^2}{20}$ بیان می‌شود طی می‌کند سرعت و شتاب اسکی باز را در لحظه‌ای که به نقطه B می‌رسد به دست آورید.



مقدار $V = V_t = 6\ m/s$

$$y=\frac{x^2}{20}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{20}=\frac{x}{10}$$

ضریب زاویه مماس در نقطه B $= \left|\frac{dy}{dx}\right|_{x=10} = \left|\frac{x}{10}\right|_{x=10} = \left|\frac{10}{10}\right| = 1$

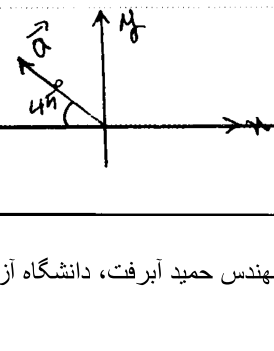
$$\theta_B = 45^\circ$$

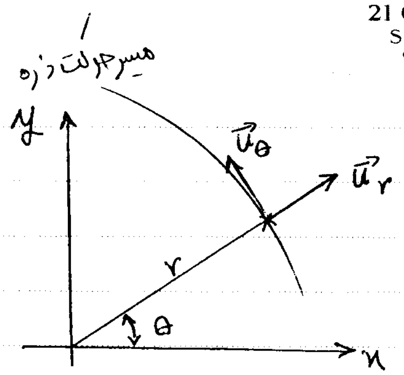
$$V_t = cte \Rightarrow \begin{cases} a_t = 0 \\ a_n = \frac{v^2}{\rho} \end{cases}$$

$$\rho_B = \left|\frac{(1+y'^2)^{1.5}}{y''}\right|_{x=10} = \left|\frac{\left[1+\left(\frac{x}{10}\right)^2\right]^{1.5}}{\frac{1}{10}}\right|_{x=10}$$

$$= 10 \times \left[1+\left(\frac{10}{10}\right)^2\right]^{1.5} = 10 \times 2^{1.5} = 28.28\ m$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{6^2}{28.28} = 1.27\ m/s^2 \Rightarrow \begin{cases} \vec{V_B} = v\vec{\lambda_t} = 6\vec{\lambda_t} \\ \vec{a_B} = 1.27\vec{\lambda_n} \end{cases}$$





+ حرکت منحنی الخط در مختصات قطبی

$$\vec{r} = r\,\vec{u}_r$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\,\vec{u}_r)$$

$$= \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{\dot{r}}\,\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \end{cases}$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j} = -\vec{u}_r \qquad \boxed{\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_r}$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\,\vec{u}_r$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} = \vec{u}_\theta \qquad \boxed{\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \vec{u}_\theta}$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \vec{u}_\theta\cdot\dot{\theta} = \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$

$$\boxed{\vec{V} = \dot{r}\,\vec{u_r} + r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}}$$

$$\begin{cases} V_r = \dot{r} \\ V_\theta = r\dot{\theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad V = \sqrt{\dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\,\vec{u_r} + r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta})$$

$$= \frac{d\dot{r}}{dt}\vec{u_r} + \dot{r}\frac{d\vec{u_r}}{dt} + \frac{dr}{dt}\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\vec{u_\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\vec{u_\theta}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u_\theta}}{dt} = \frac{d\vec{u_\theta}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dr} = -\vec{u_r}\cdot\dot{\theta}$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\,\vec{u_r} + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + r\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta} - r\dot{\theta}^2\,\vec{u_r}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta})^2\,\vec{u_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\vec{u_\theta}$$

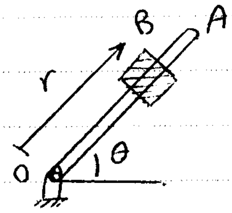
$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \qquad \Rightarrow a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$$

برای حرکت دایره‌ای :

$$\begin{cases} V_r = \dot{r} = 0 \\ V_\theta = r\dot{\theta} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_r = -r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = r\ddot{\theta} \end{cases} \qquad |\bar{a}_r = -a_n|$$

$$a_\theta = \frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$$

مثال : میله‌ای به طول 3ft حول نقطه O در صفحه قائم حرکت دورانی داشته و حرکت آن بوسیله‌ی رابطه $\theta=0.15t^2$ معین می‌گردد که در آن t برحسب ثانیه و θ برحسب رادیان می‌باشد. روی این میله وزنه B حرکت می‌کند که موقعیت آن با رابطه $r=3-0.4t^2$ معین می‌گردد در این رابطه t برحسب ثانیه و r برحسب فوت می‌باشد. معین کنید سرعت و شتاب کلی وزنه B را پس از اینکه بازوی OA به اندازه 30° دوران نماید.



$\theta=0$

$t=0 \Rightarrow r=3-0.4\times 0=3ft$

مسیر حرکت $A \to O$

$v_r=\dot r \qquad v_\theta=r\dot\theta \qquad a_r=\ddot r-r\dot\theta^2 \qquad a_\theta=r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta$

$\theta=30^\circ=\frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{\pi}{6}=0.15t^2 \rightarrow t=1.868\ sec$

$r=3-0.4\times 1.868^2=1.604\ ft$

$\dot r=\frac{dr}{dt}=-0.8t=-0.8\times 1.868=-1.494\ ft/sec$

$\ddot r=-0.8$

$\dot\theta=0.3t=0.3\times 1.868=0.560\ rad/sec$

$\ddot\theta=0.3\ rad/s^2$

$v_r=\dot r=-1.494\ ft/s$

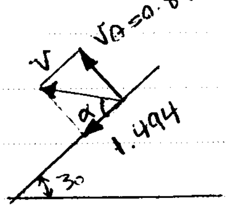
$v_\theta=r\dot\theta=1.604\times 0.56=0.898\ \frac{ft.rad}{s}$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -0.8 - 1.604 \times 0.560^2 = -1.303 \ ft/s^2$$

$$a_\theta = 1.604 \times 0.3 + 2(-1.494)(0.56) = -1.192 \ ft/s^2$$

$$\vec{v} = V_r \cdot \vec{u_r} + V_\theta \vec{u_\theta} = -1.494 \vec{u_r} + 0.898 \vec{u_\theta}$$

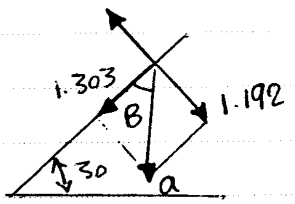
$$\vec{a} = a_r \vec{u_r} + a_\theta \vec{u_\theta} = -1.303 \vec{u_r} + 1.192 \vec{u_\theta}$$



$$V = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2} = \sqrt{0.898^2 + 1.494^2}$$

$$\rightarrow V = 1.743 \ ft/s$$

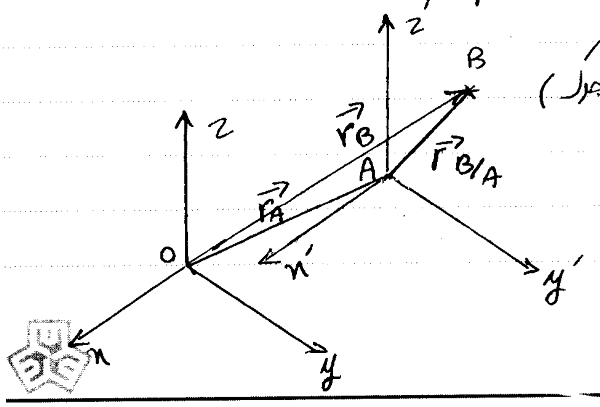
$$\alpha = \text{Arctg} \frac{0.898}{1.494} = 31^\circ$$



$$a = \sqrt{1.303^2 + 1.192^2} = 1.766 \ ft/s^2$$

$$\beta = \text{Arctg} \frac{1.192}{1.303} = 42^\circ 45'$$

+ حرکت نسبی (حرکت نسبت به سیستم متحرک)



O_{xyz} سیستم مختصات ثابت

$A_{x'y'z'}$ سیستم مختصات متحرک

نکته: در سیستم حرکت نسبی محورهای x'، y' و z' همواره موازی محورهای x، y و z هستند.

$\vec{r}_A$ = بردار موقعیت مبدأ دستگاه متحرک نسبت به سیستم ثابت
$\vec{r}_B$ = بردار موقعیت نقطه مورد نظر متحرک نسبت به سیستم ثابت

$\vec{r}_{B/A}$ = بردار موقعیت نقطه مورد نظر متحرک نسبت به سیستم متحرک (بردار موقعیت نسبی)

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A} \Rightarrow \boxed{\vec{r}_{B/A} = \vec{r}_B - \vec{r}_A}$$

$$\xRightarrow{\text{مشتق}} \dot{\vec{r}}_{B/A} = \dot{\vec{r}}_B - \dot{\vec{r}}_A \rightarrow \boxed{\vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A}$$

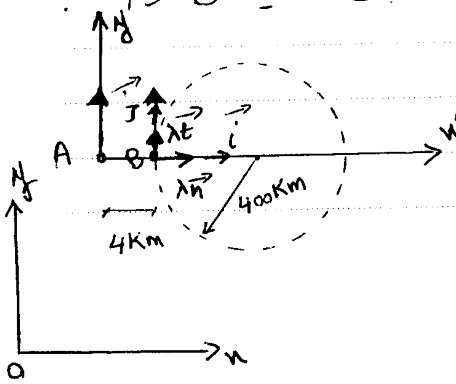
$$\xrightarrow{\text{مشتق}} \dot{\vec{v}}_{B/A} = \dot{\vec{v}}_B - \dot{\vec{v}}_A \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_B - \vec{a}_A}$$

$$\vec{r}_{A/B} = \vec{r}_A - \vec{r}_B \rightarrow \vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B \rightarrow \vec{a}_{A/B} = \vec{a}_A - \vec{a}_B$$

$$\vec{r}_{B/A} = -\vec{r}_{A/B}$$
$$\vec{v}_{B/A} = -\vec{v}_{A/B}$$
$$\vec{a}_{B/A} = -\vec{a}_{A/B}$$

نکته: اگر سیستم یا دستگاه متحرک با سرعت ثابت حرکت کند شتاب حرکت اش صفر و شتاب نقطه مورد نظر برابر است با شتاب محاسبه شده از دستگاه ثابت.

مثال: دو هواپیما در صفحه افقی و در تراز یکسان حرکت می کنند A در مسیر مستقیم و B در مسیر دایره ای. هواپیمای A در لحظه نشان داده شده سرعت $700\,Km/h$ و شتاب $50\,Km/s^2$ دارد، و B سرعت $600\,Km/h$ داشته و سرعت خود را با نرخ $100\,Km/h/s$ کاهش می دهد، سرعت و شتاب B را آنگونه که توسط خلبان A دیده می شود محاسبه کنید.



$$\vec{V}_A = 700\vec{j}$$
$$\vec{V}_B = 600\vec{j}$$

$$\vec{V}_{B/A} = \vec{V}_B - \vec{V}_A = 600\vec{j} - 700\vec{j} = -100\vec{j}$$

دستگاه $n-t$

$$\cancel{\vec{a}_B = (a_B)_n \vec{\lambda}_n + (a_B)_t \vec{\lambda}_t}$$

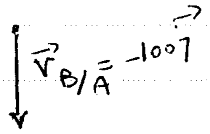
$$\Rightarrow (a_B)_n = \frac{V_B^2}{\rho} = \frac{600^2}{400} = 900\ Km/h^2$$

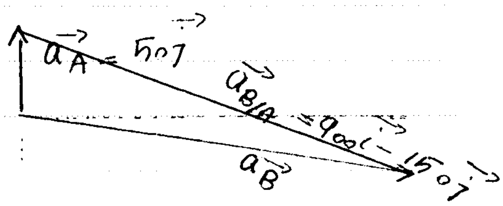
$$\Rightarrow (a_B)_t = -100\ Km/h^2$$

$$\Rightarrow \vec{a}_B = 900\vec{\lambda}_n - 100\vec{\lambda}_t \qquad \left.\begin{matrix}\vec{\lambda}_n = \vec{i}\\ \vec{\lambda}_t = \vec{j}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{a}_B = 900\vec{i} - 100\vec{j}$$

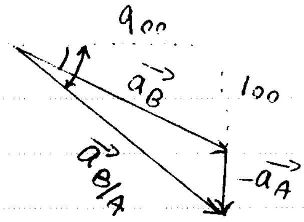
$$\vec{a}_A = 50\vec{j}$$

$$\vec a_{B/A} = \vec a_B - \vec a_A = (900\vec i - 100\vec j) - 50\vec j$$
$$= 900\vec i - 150\vec j$$

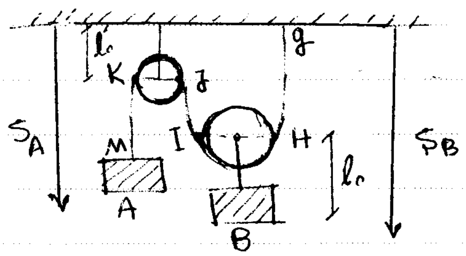




$$\vec a_{B/A} = \vec a_B + (-\vec a_A)$$



★ حرکات وابسته ذرات متصل بهم



مثال : L طول نخ طناب $L = cte$

$$L = gH + \widehat{HI} + IJ + \widehat{JK} + KM = cte$$

طول $\widehat{HI}, \widehat{JK} = cte$

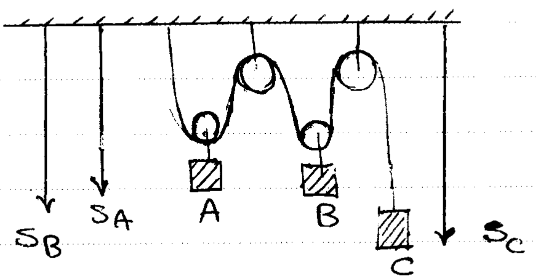
A حرکت قرقره ثابت ← ضریب یک

B قرقره متحرک ← ضریب دو $\Rightarrow gH + IJ + KM = cte$

$$\Rightarrow (S_B - \underbrace{\cancel{l_0}}_{\text{ثابت}}) + (S_B - \underbrace{\cancel{l_0}}_{\text{ثابت}} - \underbrace{\cancel{l_0}}_{\text{ثابت}}) + (S_A - \underbrace{\cancel{l_0}}_{\text{ثابت}}) = cte$$

$$\boxed{2S_B + S_A = cte} \rightarrow 2\Delta S_B + \Delta S_A = 0$$

در مثال فوق سیستم یک درجه آزادی می باشد که تنها یکی از حرکات مستقل و دیگری وابسته به آن است.



$$2S_A + 2S_B + S_C = cte$$

مشتق

$$2V_A + 2V_B + V_C = 0$$

مشتق

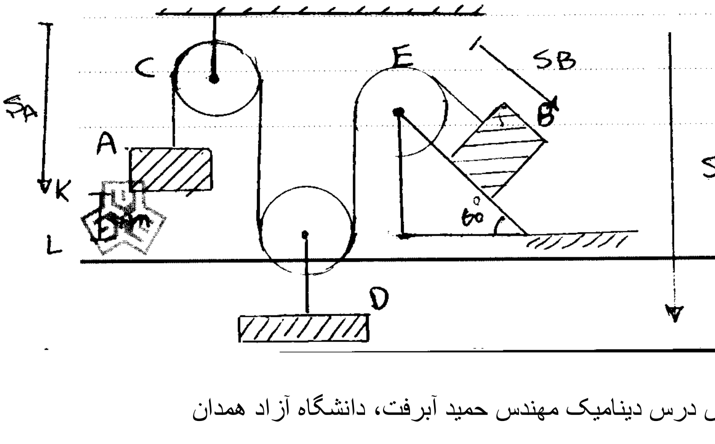
$$2a_A + 2a_B + a_C = 0$$

$$2\Delta S_A + 2\Delta S_B + \Delta S_C = 0$$

سیستم دو درجه آزادی

$$2(S_A - S_{A_0}) + 2(S_B - S_{B_0}) + (S_C - S_{C_0}) = 0$$

مثال: قرقره D با سرعت ثابت $1.2\,m/s$ به سمت پایین در حرکت است در مبدا حرکت وزنه A با شتاب ثابت و بدون سرعت اولیه به طرف پایین در حرکت است و وقتی از نقطه L می گذرد سرعتش $6\,m/s$ می باشد تغییر مکان وزنه B و سرعت و شتاب آنرا در لحظه ای که A از L می گذرد محاسبه کنید.



$S_A + 2S_D + S_B = cte$

بررسی وزنه A

$a_A = cte$

$V_{A_0} = 0$

$V_A = 6\,m/s$

$S_A - S_{A_0} = 4m$

$V_A^2 - \cancel{V_{A_0}^2} = 2a_A(S_A - S_{A_0})$

$6^2 = 2a_A \times 4 \rightarrow a_A = 4.5\,m/s^2$

$V_A = a_A t + \cancel{V_{A_0}} \rightarrow 6 = 4.5t \rightarrow t = 1.33\,sec$

بررسی وزنه D

$a_D = 0$

$V_D = 1.5\,m/s$

$S_D - S_{D_0} = V_D t = 1.5 \times 1.33 = 2\,m$

$(S_A - S_{A_0}) + 2(S_D - S_{D_0}) + (S_B - S_{B_0}) = 0$

$\rightarrow 4 + 2\times 2 + (S_B - S_{B_0}) = 0 \Rightarrow \Delta S_B = S_B - S_{B_0} = -8m$

$V_A + 2V_D + V_B = 0 \rightarrow 6 + 2\times 1.5 + V_B = 0 \Rightarrow V_B = -9\,m/s$

$a_A + 2a_D + a_B = 0 \rightarrow 4.5 + 0 + a_B = 0 \Rightarrow a_B = -4.5\,m/s^2$

* سینتیک ذرات

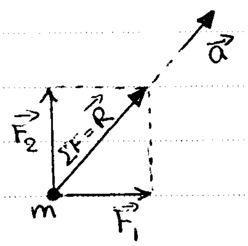
سینماتیک + اثر نیروهای وارد بر جسم + اثر نیروهای ناشی از حرکت + اثر جرم جسم ← سینتیک

← ۱- روابط مربوط به نیرو - جرم - شتاب

۲- روابط مربوط به کار - انرژی

۳- روابط مربوط به ضربه و اندازه حرکت

+ روابط مربوط به نیرو، جرم و شتاب



$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\frac{\Sigma \vec{F}}{a} = m = cte \rightarrow \frac{\vec{F_1}}{\vec{a_1}} = \frac{\vec{F_2}}{\vec{a_2}} = \dots = m$$

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = d/_{dt}\,(m\vec{v}) = \frac{d}{dt}\vec{L} = \dot{\vec{L}}$$

تکانه یا اندازه حرکت : $\vec{L} = m\vec{v}$

تعاریف

- یک نیوتن: نیرویی است که به جرم $1Kg$ شتاب $1\,m/s^2$ را می‌دهد. $1N = 1Kg\,m/s^2$
- یک کیلوگرم نیرو: نیرویی که به جرم $1Kg$ شتاب $9.8\,m/s^2$ را می‌دهد. $1Kgf = 9.8N$

یک slug : جرمی است که نیروی 1lb به آن شتاب $1\ ft/s^2$ را می‌دهد. $1slug = 1lb \cdot s^2/ft$

یک lbm : جرمی است که نیروی 1lb به آن شتاب $32.17\ ft/s^2$ را می‌دهد.

$$1slug = 32.17\ lbm$$
$$1lb = 4.448N$$
$$1slug = 14.594\ Kg$$

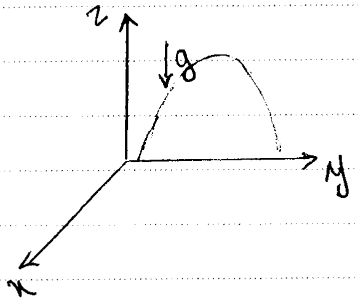
اگر $m = 1slug \rightarrow W = 32.17\ lbf$

معادلات حرکت

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$
$$\rightarrow \sum(F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{K}) = m(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{K})$$

$$\begin{cases} \sum \vec{F_x} = m\vec{a_x} = m\ddot{x} \\ \sum \vec{F_y} = m\vec{a_y} = m\ddot{y} \\ \sum \vec{F_z} = m\vec{a_z} = m\ddot{z} \end{cases}$$

مثال :

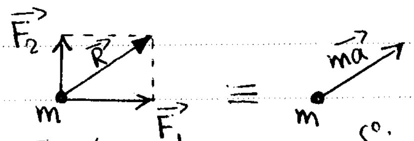


سرعت ثابت
شتاب = 0

$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$
$$\sum F_z = W = -mg = m\ddot{z}$$

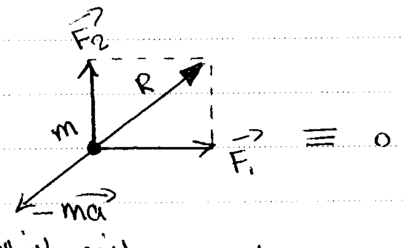
$$\boxed{\ddot{z} = a_z = -g}$$

تعادل دینامیکی



دیاگرام آزاد جسم

دیاگرام جنبشی (سینتیک)



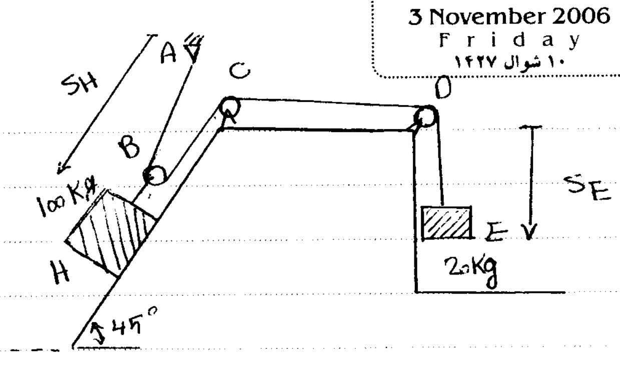
(نیروی اینرسی)

$$\sum \vec{F} - m\vec{a} = 0$$

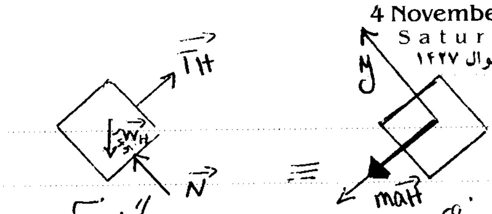
$$\rightarrow \sum \vec{F} = m\vec{a}$$

نیروی اینرسی: تمایل جسم یا ذره برای مقاومت در برابر حرکت

مثال: جعبه 100 کیلوگرمی H مطابق شکل از حالت سکون رها شده و روی سطح شیب دار بدون اصطکاک پایین می‌آید اگر از وزن قرقره‌ها و طناب صرف نظر شود و قرقره اصطکاک نداشته باشد سرعت وزنه 20 کیلوگرمی پس از 2 ثانیه چقدر است.



جسم H :

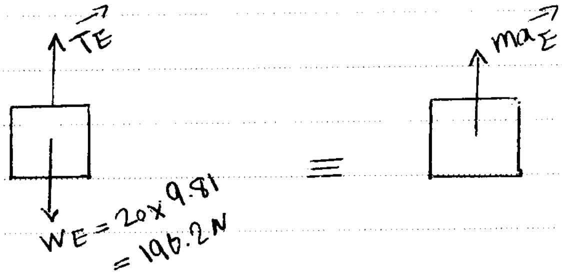


دیاگرام آزاد جسم   دیاگرام جنبشی

$$W_H = 100 \times 9.81 = 981\,N$$

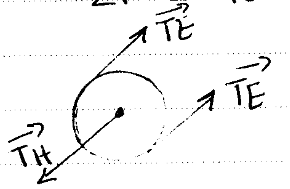
$$\sum \vec{F_x} = m\vec{a_x} \rightarrow 981 \sin 45^\circ - T_H = 100\, a_H \qquad \mathrm{I}$$

جسم E :



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow T_E - 196.2 = 20\, a_E \qquad \mathrm{II}$$

قرقره B



$$\sum F = 0 \rightarrow T_H - 2T_E = 0$$

$$\rightarrow T_H = 2T_E \qquad \mathrm{III}$$

$$2S_H + S_E = cte$$

$$\rightarrow 2a_H + a_E = 0 \rightarrow 2a_H = a_E \qquad \mathrm{IV}$$

حرکت در خلاف جهت S_E

$$\mathrm{I} \rightarrow 981 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - T_H = 1000\, a_H$$

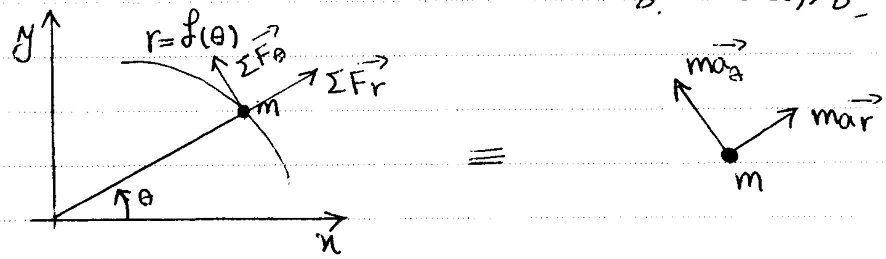
$$\text{II} \rightarrow \quad \frac{T_H}{2} - 196.2 = 40a_H$$

$$\rightarrow T_H = 526\,N \qquad T_E = 263\,N$$

$$a_H = 1.67\,m/s^2 \qquad a_E = 3.35\,m/s^2$$

$$V_{E_0} = 0 \quad \rightarrow V_E = a_E t = 3.35 \times 2 = \underline{6.7}\,m/s$$

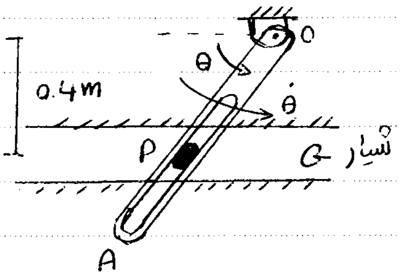
تعادل دینامیکی در مختصات قطبی

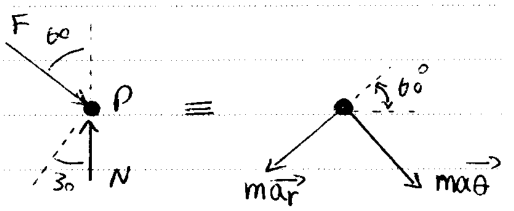


$$\sum \vec{F_r} = m\vec{a_r} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{u_r}$$

$$\sum \vec{F_\theta} = m\vec{a_\theta} = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\vec{u_\theta}$$

مثال: استوانه 2Kg در محور مرکزی خود دارای زائده P است که داخل شیار بازوی OA قرار گرفته است اگر بازو در صفحه افقی و با سرعت $\dot{\theta} = 0.5$ رادیان بر ثانیه دوران کند نیرویی که بازو به زائده در لحظه $\theta = 60^\circ$ وارد می سازد چه مقدار است (از اصطکاک صرف نظر کرده و فرض کنید که استوانه آزادانه در شیار افقی G حرکت می کند)





$$\dot{\theta} = 0.5 \ rad/s \rightarrow \ddot{\theta} = 0$$

$$r = \frac{0.4}{\sin\theta} \rightarrow \dot{r} = \frac{-0.4\cos\theta}{\sin^2\theta}\dot{\theta}$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{-0.4(-\sin\theta)\sin^2\theta - 2\cos\theta\sin\theta(-0.4\cos\theta)}{\sin^4\theta}(\dot{\theta})^2$$

$$\theta = 60^\circ \rightarrow r = 0.462 \ m \quad , \dot{r} = -0.133 \ m/s \quad \ddot{r} = 0.192 \ m/s^2$$

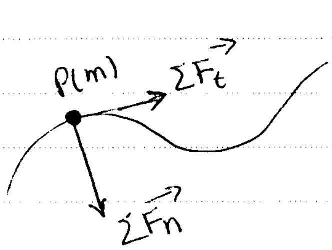
$$\sum \vec{F_r} = m\vec{a_r}$$

$$-N\cos 30^\circ = 2(0.192 - 0.462 \times 0.5^2) \rightarrow N = -0.177 N$$

$$\sum \vec{F_\theta} = m\vec{a_\theta}$$

$$F - N\sin 30^\circ = 2 \times 2(-0.133)(0.5) \rightarrow F = -0.334 N$$

تعادل دینامیکی در مختصات مماسی - عمودی

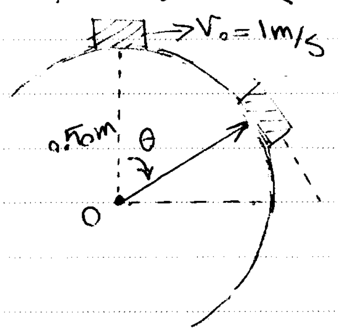


$$\sum\vec{F} = \sum(F_t\vec{\lambda_t} + F_n\vec{\lambda_n}) = m(a_t\vec{\lambda_t} + a_n\vec{\lambda_n})$$

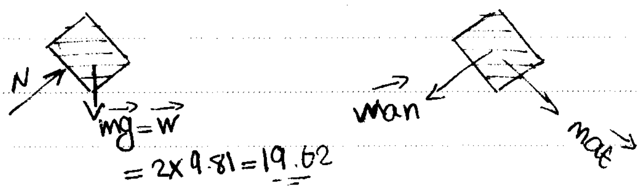
$$\sum F_t = ma_t = m\frac{dv}{dt}$$

$$\sum F_n = ma_n = m\frac{v^2}{\rho}$$

مثال: نقطه‌ای به جرم 2kg سرعت اولیه $1m/s$ را در بالای سطح مقطع استوانه نشان داده شده در شکل می‌گیرد. اگر نقطه در مسیری به شعاع 0.5m حرکت کند زاویه θ max را که شروع به جدا شدن از سطح می‌کند را محاسبه کنید (از اصطکاک صرف نظر کنید)



$\theta_{max} = ?$



دیاگرام جسم آزاد — دیاگرام جنبشی جسم

$$\sum \vec{F_n} = m\vec{a_n} \Rightarrow -N + mg\cos\theta = ma_n = m\frac{v^2}{\rho}$$

$$-N + 19.62\cos\theta = 2 \times \frac{v^2}{0.5} = 4v^2$$

$$\Rightarrow 4v^2 = -N + 19.62\cos\theta \quad \text{I}$$

$$\sum \vec{F_t} = m\vec{a_t} \Rightarrow mg\sin\theta = ma_t$$

$$\Rightarrow \boxed{19.62\sin\theta = 2\frac{dv}{dt}} \quad \text{II}$$

$I \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 9.81\sin\theta \rightarrow a_t = g\sin\theta$

در لحظه حداکثر : $\begin{cases} N=0 \\ \theta=\theta_{max} \end{cases} \rightarrow \underline{V^2 = 4.905\cos\theta_{Max}}$ III

$vdv = a_t ds \qquad ds = rd\theta = 0.5d\theta$

$\int_1^V vdv = \int a_t ds = \int_0^\theta 9.81\sin\theta \times 0.5 d\theta$

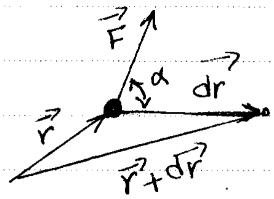
$\left[\frac{V^2}{2}\right]_1^V = \left[-4.905\cos\theta\right]_0^\theta \Rightarrow \frac{V^2}{2} - \frac{1}{2} = -4.905\cos\theta + 4.905$

$\theta = \theta_{Max}$, $N=0$ $\qquad \Rightarrow \underline{V^2 = -9.81\cos\theta + 10.81}$ IV

III و IV : $-9.81\cos\theta_{Max} + 10.81 = 4.905\cos\theta_{Max}$

$\cos\theta_{Max} = \frac{10.81}{14.715} \rightarrow \theta_{Max} = 42.72°$

+ روابط مربوط به کار - انرژی



$dv = \vec{F}\cdot\vec{dr} = Fdr\cos\alpha$

$= (F\cos\alpha)dr = F(dr\cos\alpha)$

واحد کار : $\begin{cases} (SI) & 1j = 1N\,m \\ (US) & lb\_ft \end{cases}$

$1lb\text{-}ft = 4.448 \times 0.3048 = \underline{1.356}\,j$

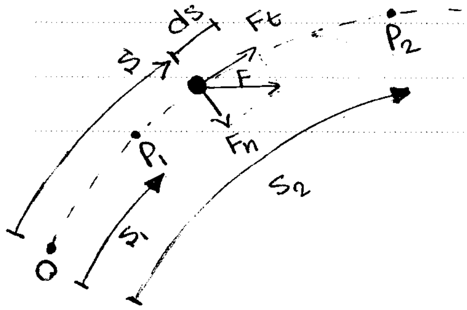
کار نیروی $\vec{F}$ در جابجائی بردار $d\vec{r}$:

- مثبت است: اگر تصویر $\vec{F}$ در راستای $d\vec{r}$ وهم جهت با آن باشد.

- منفی است: اگر تصویر $\vec{F}$ در راستای $d\vec{r}$ بصورت غیرهم جهت آن باشد.

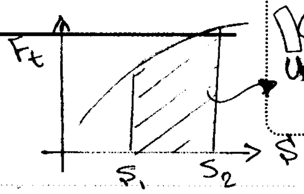
- صفر است: اگر راستای نیروی F و راستای dr برهم عمود باشند.

کار در حرکت منحنی الخط



$$U_{1-2}=\int_{P_1}^{P_2} du=\int_{P_1}^{P_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{P_1}^{P_2}\vec{F}\cdot d\vec{s}$$

$$=\int_{P_1}^{P_2} F\,ds\cos\alpha=\int_{S_1}^{S_2}(F\cos\alpha)\,ds$$

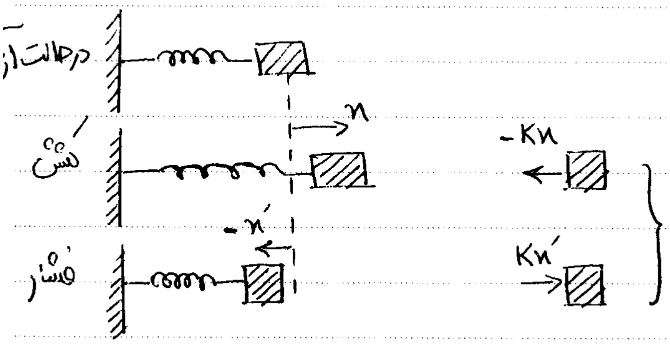


$$=\int_{S_1}^{S_2} F_t\,ds$$

کار نیروی فنر در حالتی که کشیده یا فشرده می‌شود منفی است و وقتی که از حالت کشیده

یا فشرده شدن رها می‌شود مثبت است.

کار نیروی فنر

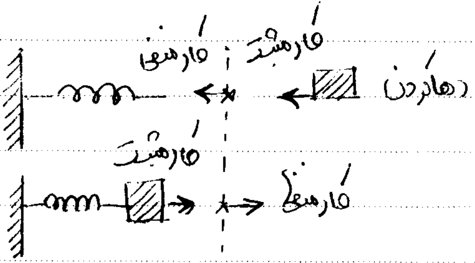


$$F = -Kx$$

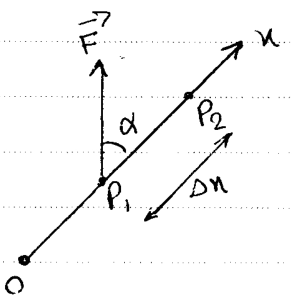
$$U_{1-2} = \int F\,d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} -Kx\,dx = -K\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{1}{2}Kx_1^2 - \frac{1}{2}Kx_2^2$$

$$= \frac{1}{2}K(x_1^2 - x_2^2)$$

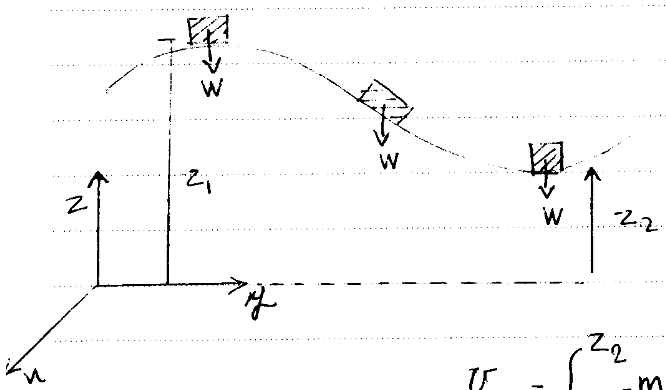


کار نیروی ثابت در حرکت مستقیم الخط



$$U_{1-2} = (F\cos\alpha)\Delta x$$

کار نیروی وزن



$F_x = 0$

$F_y = 0$

$F_z = -W = -mg$

$$U_{1-2} = \int_{z_1}^{z_2} -mg\,dz = -mgz\Big]_{z_1}^{z_2}$$

$$= -mg(z_2 - z_1) = mg(z_1 - z_2)$$

کار نیروی وزن برابر است با حاصلضرب وزن در جابه‌جایی قائم مرکز ثقل همراه با علامت و زمانی مثبت است که مرکز ثقل به سمت پایین حرکت کند.

ارتباط کار و انرژی

$$U_{1-2} = \int du = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{s_1}^{s_2} F_t\, ds = \int_{s_1}^{s_2} m a_t\, ds$$

$$\xrightarrow{v dv = a_t ds} \quad m\int_{v_1}^{v_2} v\,dv = m\left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_1}^{v_2} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

انرژی جنبشی $T = \frac{1}{2}mv^2$

$$U_{1-2} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = T_2 - T_1 = \Delta T$$

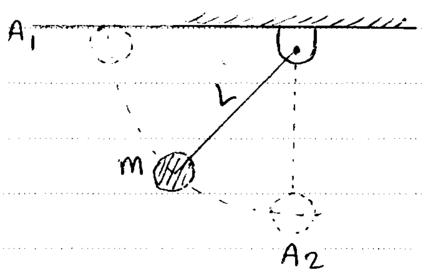
کار: کاری که توسط نیروهای وارد بر یک نقطه مادی در بخشی از مسیر انجام می شود برابر است با تغییر در انرژی جنبشی آن ذره در این فاصله.

انرژی جنبشی: معادل است با میزان کاری که لازم است انجام شود تا ذره ای به جرم m از حالت سکون خارج و به سرعت V برسد.

نکته: انرژی جنبشی یک کمیت اسکالر بوده (مانند کار) و همواره مثبت است، واحد آن N.m یا ژول می باشد.

نکته: کاری که بر روی جسمی با سرعت V انجام شود تا به سرعت صفر برسد برابر $-T$ است.

★ مثال: نقطه ای به جرم m از موقعیت A_1 رها شده و به نقطه A_2 می رسد مطلوبست سرعت و کشش کابل در نقطه A_2.



در نقطه A_1 : $T_1 = 0$

در نقطه A_2 : $T_2 = \frac{1}{2} m v^2$

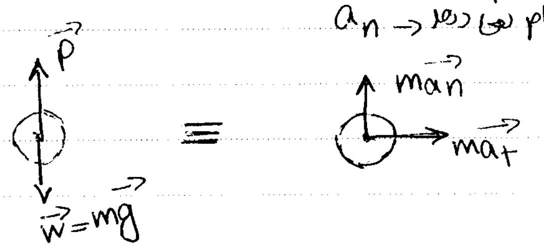
$U_{1-2} = mgl$

$$U_{1-2} = T_2 - T_1$$

$$mgL = \frac{1}{2} m v^2 - 0 \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{2gL}$$

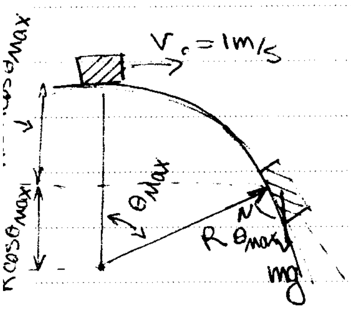
$\vec{a} = a_n \vec{\lambda_n} + a_t \vec{\lambda_t}$: $a_t \rightarrow$ نیرو کار انجام می‌دهد

$a_n \rightarrow$ نیرو کار انجام نمی‌دهد



$$\sum \vec{F_n} = m\vec{a_n} \rightarrow P - mg = ma_n = m\frac{v^2}{\rho} = m\frac{2g\cancel{l}}{\cancel{l}} = 2mg$$

$$\Rightarrow P = \boxed{3mg}$$



$$U_{1-2} = T_2 - T_1$$

$$mg(R - R\cos\theta_{max}) = \frac{1}{2}\cancel{m}v_2^2 - \frac{1}{2}\cancel{m}\times 1^2$$

$$v_2^2 = 2\times 0.5\, g(1 - \cos\theta_{max}) + 1$$

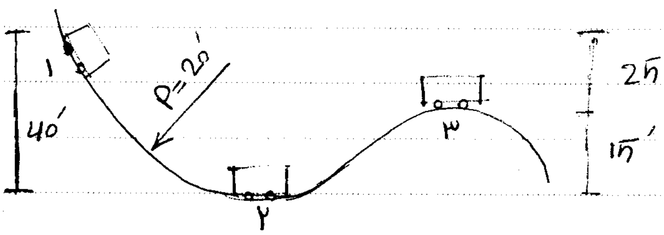
$$= 1 + g(1 - \cos\theta_{max})$$

$$\rightarrow v^2 = 4.905 \cos\theta_{max}$$

★ مثال: اتومبیلی به وزن 2000 پوند از حالت سکون در وضعیت 1 بدون اصطکاک روی جاده به طرف پایین حرکت می‌کند تعیین کنید:

الف ـ نیروی وارده از طرف جاده بر ماشین در حالت ۲ چقدر است.

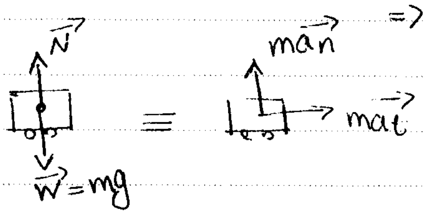
ب ـ حداقل شعاع انحنا مسیر در وضعیت ۳ چقدر باشد که خطری متوجه اتومبیل نشود.



الف: $U_{1-2} = T_2 - T_1$

$$mg \times 40' = \frac{1}{2} m v_2^2 - 0 \rightarrow 2000 \times 40 = \frac{1}{2} \times \frac{2000}{32.17} v_2^2$$

$$\Rightarrow v_2 = 50.73 \ ft/s$$



$$\Sigma \vec{F_n} = m\vec{a_n}$$

$$N - mg = ma_n = m\frac{v^2}{\rho}$$

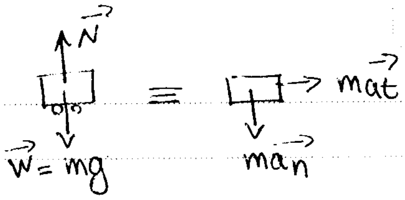
$$\rightarrow N = mg + ma_n$$

$$N = 2000 + \left(\frac{2000}{32.17}\right) \times \frac{50.73^2}{20} \rightarrow N = 10.000 \ lb$$

ب: $T_3 - T_1 = U_{1-3}$

$$\frac{1}{2} m v_3^2 - 0 = 2000 \times 25' \rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{2000}{32.17} v_3^2 = 2000 \times 25'$$

$$\rightarrow v_3 = 40.11 \ ft/s$$



$\Rightarrow N = 0 \Rightarrow$ حداقل شعاع انحنا

$$\sum \vec F_n = m\vec a_n \Rightarrow mg - \cancel{N}^{\,0} = m\frac{v_2^2}{\rho}$$

$$2000 = \frac{2000}{32.17} \times \frac{40.11^2}{\rho_{min}}$$

$$\Rightarrow \rho_{min} = 50\ ft$$

توان و بازده

توان: تغییرات انجام کار در واحد زمان و یا نرخ زمانی انجام کار می باشد.

توان متوسط $P_{ave} = \frac{\Delta U}{\Delta t}$

توان نقطه ای $P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{dU}{dt} = \frac{\vec F \cdot d\vec r}{dt} = \vec F \cdot \frac{d\vec r}{dt} = \vec F \cdot \vec v$

$$\frac{N\cdot m}{s} = \frac{J}{s} = watt$$

بازده مکانیکی (راندمان): نسبت توان مفید خروجی به توان ورودی ارائه شده را بازده می گویند.

بازده مکانیکی $e_m = \frac{P_{output}}{P_{input}}$

دستگاه های حقیقی $0 < e_m < 1$

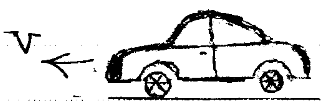
" ایده آل $e_m = 1$

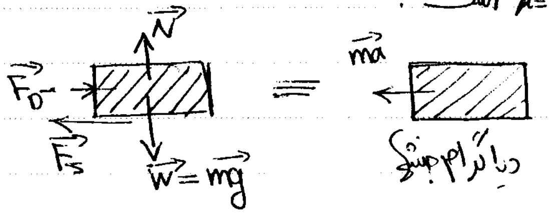
$$\Rightarrow e_m = \frac{U_{out}}{U_{in}}$$

کل بازده $e = e_m e_e e_t \cdots$

مثال: اتومبیلی به جرم 1000 Kg و بازده موتور 0.65 طبق شکل به سمت چپ در حال حرکت می باشد. با جلو رفتن ماشین نیروی مقاومی برابر $F_D=0.3v^2$ توسط باد به آن وارد می شود. (F_D بر حسب نیوتن و v بر حسب m/s می باشد)

- حداکثر توانی که باید موتور داشته باشد چقدر است. ضریب اصطکاک چرخ ها با جاده $\mu=0.25$ است.





$$\sum F_y=0 \rightarrow N-mg=0 \Rightarrow N=mg=1000g$$

$$\sum F_x=ma_x \rightarrow F_D+F_s=ma_x$$

$$-0.3v^2+\mu N=1000a$$

$$\rightarrow -0.3v^2+0.25\times1000g=1000a$$

حداکثر سرعت در : $a=0 \rightarrow -0.3v^2+0.25\times1000g=0$

$g=9.81\,m/s^2$ $\Rightarrow v=90.41\ m/s$

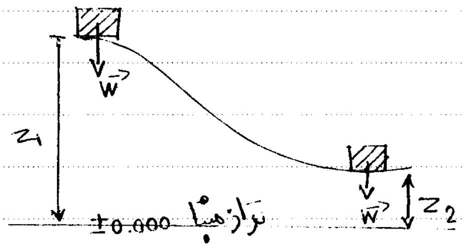
$$P_{output}=F_s\cdot v=0.25\times1000g\times90.41$$
$$=221730.5\ watt$$

$$e_m=\frac{P_{out}}{P_{in}} \rightarrow P_i=\frac{P_{out}}{e_m}=\frac{221730.5}{0.5}=351953.2\ watt$$
$$=352\ Kw$$

نیروهای محافظه کار یا پایستار – انرژی پتانسیل و اصل بقای انرژی

نیروهای محافظه کار یا نیروهای ثابت یا نیروهای پایستار (conservative fores) نیروهایی که اگر بر ذره اعمال شوند به سرعت و شتاب ذره بستگی نداشته و فقط به موقعیت ذره بستگی دارند و کار ناشی از این نیروها فقط تابع موقعیت نقاط ابتدا و انتها باشد. مانند: فنر، وزن

نیروهای محافظه کار ظرفیت انجام کار به ذره می‌دهند و این ظرفیت با انرژی پتانسیل بیان می‌شود.



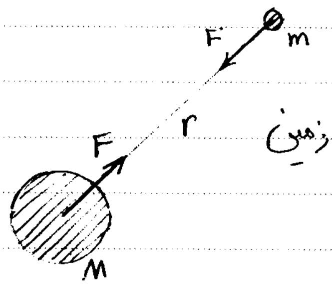
$$U_{1-2} = Wz_1 - Wz_2$$

انرژی پتانسیل ثقلی $\boxed{V_g = Wz}$

$$U_{1-2} = (V_g)_1 - (V_g)_2$$

برای ذرات پایین‌تر از تراز مبنا انرژی پتانسیل ثقلی منفی و برای بالاتر از تراز مبنا انرژی پتانسیل ثقلی مثبت است.

اگر کار نیروی وزن مثبت باشد انرژی پتانسیل ذره رو به کاهش است و اگر کار نیروی وزن منفی باشد انرژی پتانسیل ذره رو به افزایش بوده و در آن جرم ذخیره می‌شود.



$$\vec{F} = G\frac{Mm}{r^2}$$

جسم در نزدیکی زمین $\quad r = R$

$$F = W = mg = G\frac{mM}{R^2}$$

$$\Rightarrow GM = gR^2 \quad \mathrm{I}$$

$$U_{1-2} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}\cdot\vec{dr} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{GmM}{r^2}\,dr$$

$$= GmM\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = GmM\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2}$$

$$= GmM\left[-\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_1}\right] \quad \mathrm{II}$$

$$\mathrm{I},\mathrm{II} \Rightarrow U_{1-2} = mgR^2\left[-\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_1}\right] = \frac{mgR^2}{r_1} - \frac{mgR^2}{r_2}$$

$$= \frac{WR^2}{r_1} - \frac{WR^2}{r_2}$$

$$V_g = -\frac{mgR^2}{r} = -\frac{WR^2}{r}$$

کار نیروی فنر

$$\begin{cases} U_{1-2} = \frac{1}{2}Kx_1^2 - \frac{1}{2}Kx_2^2 \\ V_e = \frac{1}{2}Kx^2 \end{cases}$$

انرژی پتانسیل ارتجاعی

$$\Rightarrow U_{1-2} = (V_e)_1 - (V_e)_2$$

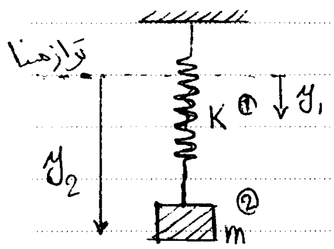
هرگاه کار انجام شده توسط فنر منفی باشد به معنا افزایش در انرژی پتانسیل ذخیره شده در فنر می‌باشد و هرگاه کار فنر مثبت باشد انرژی پتانسیل رو به کاهش است.

تابع انرژی پتانسیل

$$V = V_e + V_g + \dots$$

$$V = V(x, y, z)$$

$$U_{1-2} = V(x_1, y_1, z_1) - V(x_2, y_2, z_2)$$



$$V_e = \frac{1}{2} K y^2$$

$$V_g = -W y$$

$$U_{1-2} = V_1 - V_2 = \left[(V_e)_1 + (V_g)_1\right] - \left[(V_e)_2 + (V_g)_2\right]$$

$$U_{1-2} = \left[\frac{1}{2} K y_1^2 - W y_1\right] - \left[\frac{1}{2} K y_2^2 - W y_2\right]$$

$$= W(y_2 - y_1) - \left(\frac{1}{2} K y_2^2 - \frac{1}{2} K y_1^2\right)$$

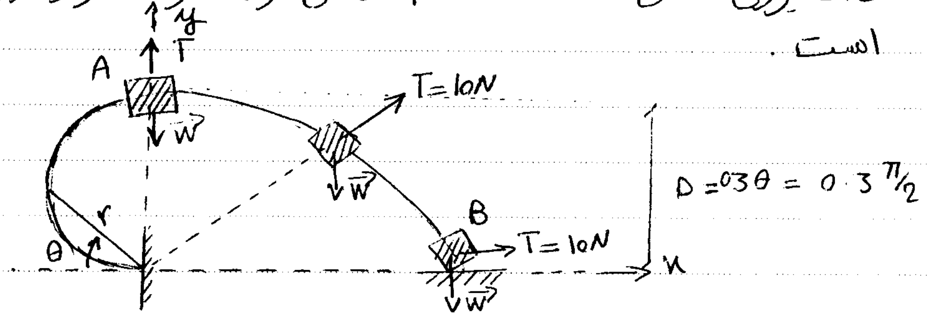
★ اصل بقای انرژی

$$\left.\begin{aligned} U_{1-2} &= T_2 - T_1 \\ U_{1-2} &= V_1 - V_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_2 - T_1 = V_1 - V_2$$

$$\rightarrow \underbrace{T_2 + V_2}_{E_2} = \underbrace{T_1 + V_1}_{E_1}$$

اصل بقای انرژی فقط جواب دارد که همه نیروهای وارد بر سیستم پایستار باشند و مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم ثابت بماند.

مثال: (تمرین ۳_ صفحه ۱۲۷) غلتکی به جرم 0.5 kg با اصطکاکی در امتداد میله منحنی ثابت در صفحه قائم می‌لغزد. انحنای میله از رابطه $r=0.3\theta$ پیروی می‌کند که در آن r برحسب m و θ برحسب رادیان است. غلتک از حالت سکون در نقطه A رها و تحت نیروی شعاعی $T=10N$ تا نقطه B می‌لغزد، سرعت لغزنده در نقطه B چقدر است.



$U_{1-2}=T_2-T_1$

$U_{A-B}=T_B-T_A$

$$U_{A-B}=(U_{A-B})_W+(U_{A-B})_T$$

$$(U_{A-B})_W=mg(0.3\,\pi/2)=2.31\,J$$

$$(U_{A-B})_T=\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{\pi/2}^{\pi} T\times 0.3\,d\theta=\int_{\pi/2}^{\pi}3\,d\theta=4.71\,J$$

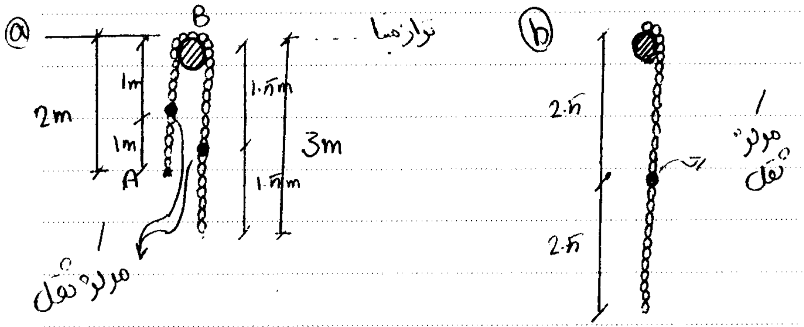
$$\rightarrow U_{A-B}=2.31+4.71=7.02\,J=T_B-T_A$$

A نقطه: $T_A=0$

$$=T_B=\frac{1}{2}mv_B^2$$

$$=\frac{1}{2}\times 0.5\times v_B^2 \rightarrow v_B=5.3\ m/s$$

مثال: زنجیری با جرم واحد طول $10\,kg/m$ روی سطح صاف مطابق شکل قرار گرفته است اگر زنجیر را رها کنیم سرعت آن در لحظه‌ای که انتهای A به نقطه B برسد چقدر است.



$$E_a = E_b$$

$$T_a + V_a = T_b + V_b$$

$$0 + (-2\times10\times9.81\times1) + (-3\times10\times9.81\times1.5) = \frac{1}{2}(5\times10)\,V^2 + (-5\times10\times9.81\times2.5)$$

$$\Rightarrow V = 4.85$$

تمرین: ۳-۸۰ ، ۳-۱۲۰ ، ۳-۱۲۹ ، ۳-۱۵۸
۲-۱۴۶ ، ۲-۱۹۰ ، ۲-۲۲۱

روابط ضربه - اندازه حرکت

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\Rightarrow \sum \vec{F}\cdot dt = m\,d\vec{v}$$

اگر به ذره ای به جرم m و سرعت اولیه V_1 نیروهای ΣF با تغییرات مشخص نسبت به زمان اثر کند، داریم:

$$\Sigma \vec{I}_{1-2} = \Sigma\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}.dt = \int_{v_1}^{v_2} m\,d\vec{v} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$$

$$\Sigma\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}.dt = \int_{v_1}^{v_2} m\,d\vec{v} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

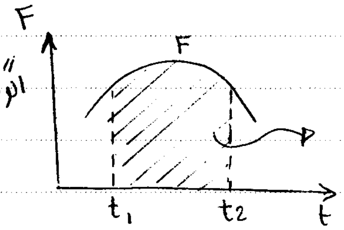
اصل ضربه اندازه حرکت خطی

$$\to \vec{I}_{1-2} = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}.dt$$

ضربه خطی

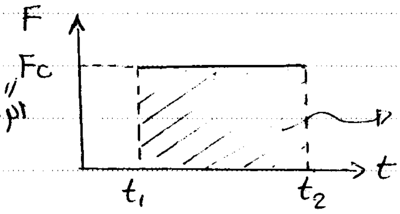
ضربه خطی برداری است هم راستا با نیروی F که واحد آن N.S می باشد.

اگر راستای F ثابت باشد.



سطح زیر منحنی $= \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}.dt = I_{1-2}$

اگر مقدار F هم ثابت باشد.



$$I_{1-2} = F_c(t_2 - t_1)$$

اندازه حرکت خطی کمیتی است برداری و هم راستا با بردار V که واحد آن $Kg\,m/s$ می باشد.

$$\vec{L} = m\vec{V}$$

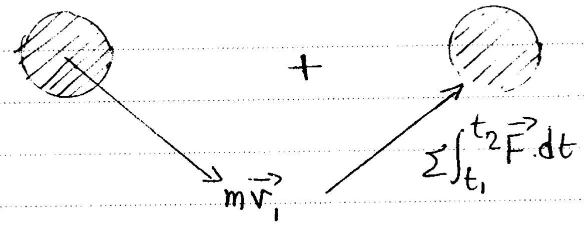
اندازه حرکت خطی

$$Kg\,m/s \to \underbrace{Kg\,m/s^2}_{N}\times S \to N.S$$

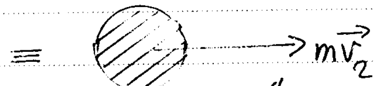
استفاده از اصل ضربه و اندازه حرکت

$$m\vec{V}_1 + \sum\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = m\vec{V}_2$$

دیاگرام اندازه حرکت اولیه جسم



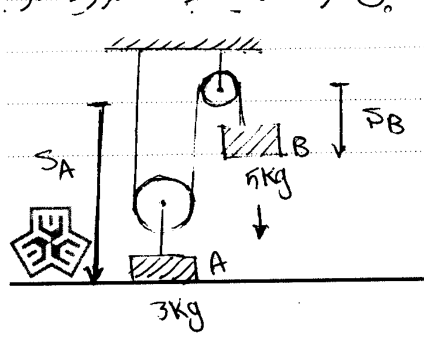
دیاگرام بردارهای ضربه

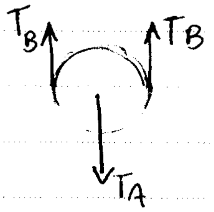


دیاگرام اندازه حرکت نهایی

$$\begin{cases} mV_{1x} + \sum\int_{t_1}^{t_2} F_x\,dt = mV_{2x} \\ mV_{1y} + \sum\int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt = mV_{2y} \\ mV_{1z} + \sum\int_{t_1}^{t_2} F_z\,dt = mV_{2z} \end{cases}$$

مثال: قطعات A و B در شکل زیر به ترتیب دارای جرم 3 و 5 کیلوگرم هستند. اگر B با سرعت اولیه $3\,m/s$ به سمت پایین حرکت کند سرعت آنرا پس از 6 ثانیه بدست آورید. از جرم و اصطکاک طناب و قرقره ها صرف نظر گردد.



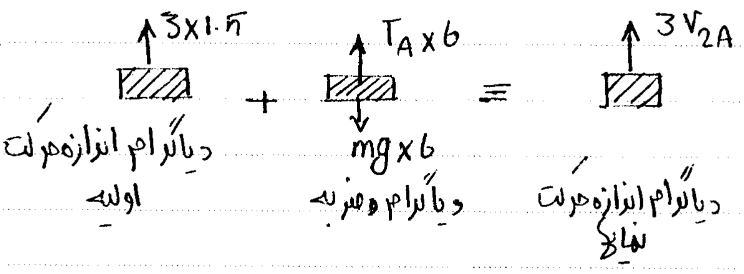


$$\Sigma F = 0 \rightarrow T_A = 2T_B$$

$$2S_A + S_B = Cte \rightarrow 2V_A + V_B = 0$$

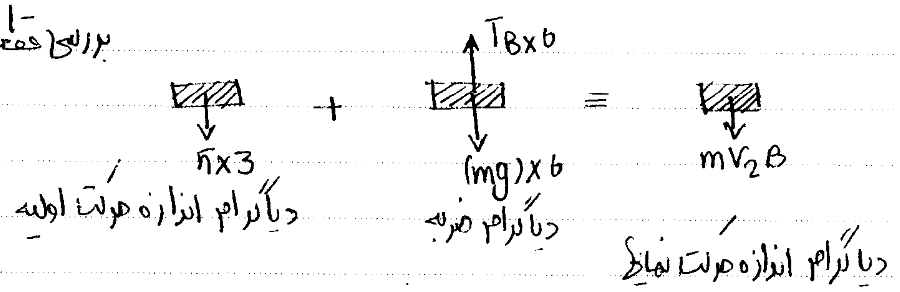
$$2V_A + 3 = 0 \rightarrow V_A = -1.5\ m/s \uparrow$$

برای قطعه A



اصل ضربه و اندازه حرکت برای قطعه شماره ۱ A $\uparrow+$ $3\times1.5 + T_A\times6 - (3\times9.81)\times6 = 3V_{2A}$ I

برای قطعه B



برای قطعه B $\downarrow+$ $5\times3 + (5\times9.81)\times6 - T_B\times6 = 5V_{2B}$ II

$$\boxed{T_A = 2T_B}$$

$$2S_A + S_B = cte \rightarrow 2V_A + V_B = 0$$

$$V_A = -\frac{V_B}{2}$$

با توجه به جهت مثبت قرارداد $\Rightarrow \boxed{V_A = \frac{V_B}{2}}$

$$I: \ 3\times 1.5 + 6\times(2T_B) - (3\times 9.81)\times 6 = 3\times\left(\frac{V_B}{2}\right) \quad II$$

$$II, I: \begin{cases} T_B = 19.2\,N \\ V_{2B} = 38.8\,m/s \end{cases}$$

★ اصل ضربه و اندازه حرکت برای مجموعه ای از ذرات

$$\sum m\vec{V_1} + \sum\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt = \sum m\vec{V_2}$$

در رابطه فوق برای محاسبه ضربه تنها نیروهای خارجی وارد بر مجموعه در نظر گرفته می شود.

هرگاه مجموع نیروهای خارجی وارد بر یک سیستم تقریباً صفر شود یا اصلاً نیروی خارجی به آن وارد نشود.

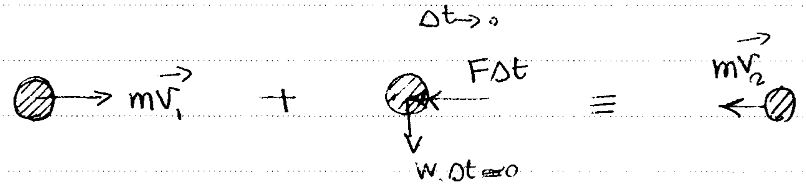
$$\sum\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt = 0 \rightarrow \sum m\vec{V_1} = \sum m\vec{V_2} \Rightarrow \sum\vec{L_1} = \sum\vec{L_2} \rightarrow \dot{\vec{L}} = 0$$

اصل بقای اندازه حرکت خطی

حرکت ضربه‌ای

هرگاه نیروی بسیار بزرگی در فاصله زمانی بسیار کوچکی بر ذره اثر کند به آن حرکت ضربه‌ای گفته می‌شود.

$\Delta t \to 0$



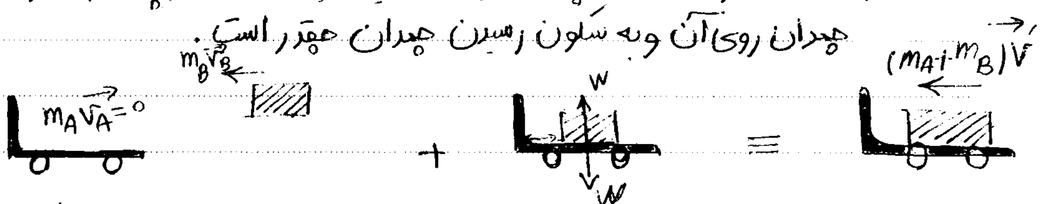
$$m\vec{v}_1 + \sum \vec{F}\Delta t = m\vec{v}_2$$

حرکت ضربه‌ای برای سیستم ذرات

$$\sum m\vec{v}_1 + \sum \vec{F}\Delta t = \sum m\vec{v}_2$$

در فرمول فوق از نیروهای عمل و عکس العمل بین ذرات صرف نظر کرده و فقط ضربه نیروهای خارجی را در نظر می‌گیریم.

مثال: چمدانی به وزن $30\ lb$ در امتداد افقی با سرعت $10\ ft/s$ روی چارچرخه باربری به وزن $10\ lb$ در حال سکون پرتاب می‌شود. معین کنید سرعت چارچرخه پس از لغزیدن چمدان روی آن و به سکون رسیدن چمدان چقدر است.

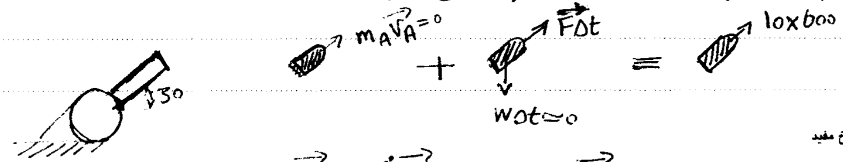


$$\sum m\vec{v}_1 + \underbrace{\sum \vec{F}\Delta t}_{0} = \sum m\vec{v}_2$$

$$0 + m_B \vec{v}_B = (m_A + m_B) v' \rightarrow \frac{30}{g} \times 10 = \frac{30+10}{g} v'$$

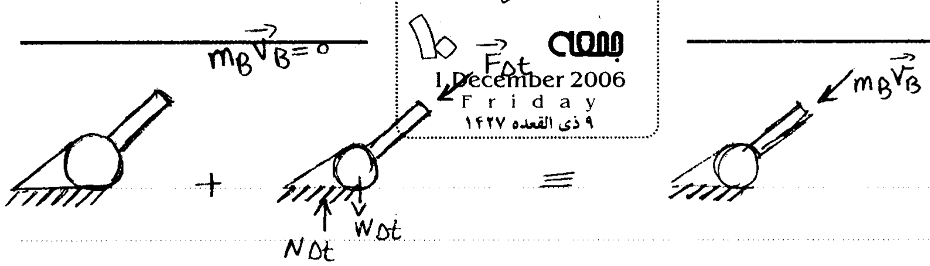
$$300 = 40 v' \rightarrow v' = \frac{300}{40} = 7.5\ ft/s$$

مثال: یک توپ با تریلی 2000kg گلوله‌ای 10kg را با سرعت اولیه 600m/s تحت زاویه 30° پرتاب می‌کند توپ روی سطح افقی قرار داشته و می‌تواند در راستای افقی آزادانه حرکت کند فرض می‌شود که لوله توپ به بدنه آن محکم شده و حرکت برگشتی ندارد معین کنید سرعت پس زدن توپ و برآیند نیروهای ضربه‌ای قائم وارد بر توپ از طرف زمین (گلوله توپ را در زمان 0.006s ترک می‌کند)



$$m\vec{v}_1 + \sum \vec{F}\Delta t = m\vec{v}_2$$

$$0 + \vec{F}\Delta t = 10 \times 600 \rightarrow F\Delta t = 6000\ N.s$$



$\xrightarrow{+}$

در راستای x : $m_B(v_B)_x + \sum F_x \Delta t = m_B(v'_B)_x$

$$0 - \vec{F}\Delta t \cos 30° = -m_B (v'_B) \cos 30°$$

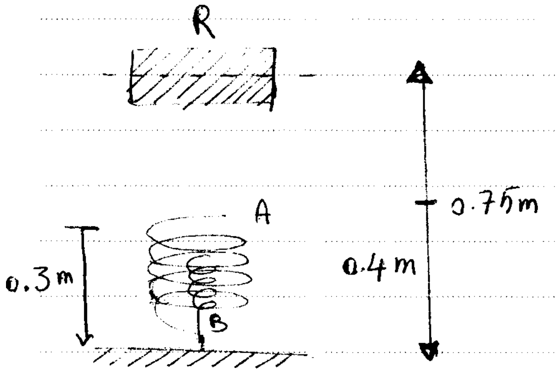
$6000^{N.S} = 2000^{Kg} \cdot V'_B \Rightarrow V'_B = 3\ m/s$

در راستای y $\uparrow +$: $m_B (V_B)_y + \sum \vec{F}_y \Delta t = m_B (V'_B)_y$

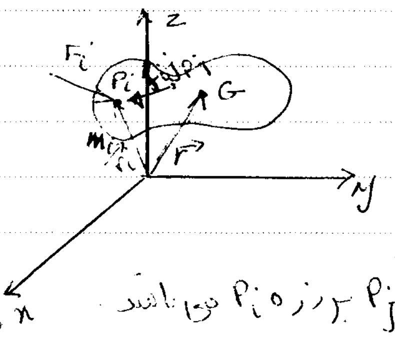
$$0 + (-\underbrace{\vec{F}\Delta t}_{6000} \sin 30) - (2000\times 9.81)\times 0.006 + N\Delta t = 2000\times 3\times \sin 30^\circ$$

$\Rightarrow N = 1020\ KN$

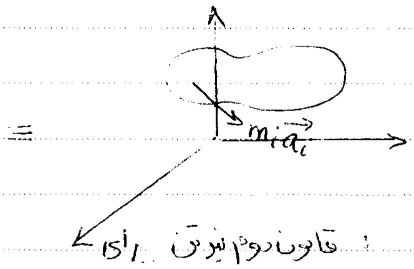
تمرین: جسم R به جرم 100Kg از ارتفاع 0.75m بالای فنر A که سختی $12\ KN/m$ دارد رها می‌شود. اگر فنر دوم B به سختی $15\ KN/m$ در داخل فنر A قرار گرفته باشد، حداکثر افت فنر A را که لازم است از حرکت رو به پایین جسم جلوگیری کند محاسبه کنید.



* سینتیک سیستم ذرات



P_i ذره‌ای به جرم m_i با بردار موقعیت $\vec{r}_i$ می‌باشد. F_i برآیند کل نیروهای خارجی وارد بر ذره P_i می‌باشد. f_{ij} نیروی وارد از طرف ذره P_j بر ذره P_i می‌باشد.



برای i ذره : قانون دوم نیوتن یک ذره : $\vec{F_i} + \sum_{j=1}^{n} \vec{f_{ij}} = m_i \vec{a_i}$

$\vec{f_{ii}} = 0$

برای کل سیستم ذرات : $\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \vec{f_{ij}}}_{0} = \sum_{i=1}^{n} m\vec{a_i}$

$\vec{f_{ij}} = -\vec{f_{ji}}$

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}$ برابر صفر است چون f_{ij} های نیروی داخلی بین هر دو ذره بوده که طبق قانون سوم نیوتن با هم هم‌راستا، هم جهت و مختلف العلامت باشند نیز اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند.

$$\sum m_i \vec{r_i} = m\vec{r}$$

$$\begin{cases} \sum m_i = m \\ \vec{a} = \ddot{\vec{r}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a_i} = m\vec{\bar{a}} = m\ddot{\vec{\bar{r}}}$$

$$\Rightarrow \sum \vec{F_i} = m\vec{\bar{a}}$$

برآیند کلیه نیروهای خارجی وارد بر یک سیستم برابر است با حاصلضرب جرم کل سیستم (مجموع جرم

تمامی ذرات) در شتاب مرکز جرم تمامی ذرات .

$$\Rightarrow \sum F_{ix} = m\bar{a}_x$$

$$\sum F_{iy} = m\bar{a}_y$$

$$\sum F_{iz} = m\bar{a}_z$$

$$U_{1-2} = T_2 - T_1 = \Delta T$$

$$\Rightarrow (U_{1-2})_i = \Delta T_i$$

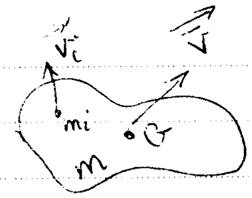
- کل کار انجام شده توسط تمامی نیروهای وارد بر تمامی ذرات داخل سیستم برابر با تغییر در انرژی جنبشی کل سیستم ذرات می باشد. از آنجایی که کار برابر حاصلضرب نیروها در بردار تغییر مکان ذرات می باشد هر چند نیروی f_{ij} به صورت f و $-f$ به دو ذره P_i و P_j وارد می شوند ولی به خاطر امکان متفاوت بودن جابه جایی ذرات i و j مجموع کار نیروها روی این دو ذره را نمی توان در حالت کلی صفر گرفت

- در حالت خاص در سیستم جسم صلب به دلیل صفر بودن جابه جایی نسبی ذرات U_{1-2} تنها به کار نیروهای خارجی مربوط می شود.

اصل بقای انرژی برای سیستم ذرات

مجموع انرژی پتانسیل و جنبشی کل سیستم ذرات در تمامی لحظات ثابت باقی خواهد ماند به شرطی که بر سیستم نیروهای غیر پایستار کار یا پیستار وارد شود

$$\underbrace{V_a + T_a}_{E_a} = \underbrace{V_b + T_b}_{E_b}$$



انرژی جنبشی برای سیستم ذرات

$$m=\sum_{i=1}^{n} m_i$$

$$\vec{v}_i=\vec{\bar{v}}+\vec{v}_i'$$

$$T=\sum_{i=1}^{n} T_i=\frac{1}{2}m\bar{v}^2+\frac{1}{2}\sum m_i v_i'^2$$

اندازه حرکت خطی در سیستم ذرات مادی

$$\vec{L}=\sum_{i=1}^{n}\vec{L}_i=\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\vec{r}}_i=m\dot{\bar{\vec{r}}}=m\bar{\vec{v}}$$

$$\dot{\vec{L}}=m\dot{\bar{\vec{v}}}=m\bar{\vec{a}}=\sum\vec{F}$$

اگر برآیند نیروهای خارجی بر سیستم اثری نداشته باشد ($\sum\vec{F}=0$) در آنصورت داریم:

$$\sum\vec{F}=0 \Rightarrow \dot{\vec{L}}=0 \Rightarrow \vec{L}=cte$$

پس در این صورت اصل بقای حرکت خطی نیز در اینجا صادق می باشد.

$$m=cte \Rightarrow \bar{\vec{v}}=cte$$

مثال: سفینه فضایی به جرم 200kg در لحظه $t=0$ از مبدأ مختصات با سرعت $\vec{v}_0=150\vec{i}$ متر از

ست به آن دستگاه حرکت می‌کند در اثر انفجار مواد داخل شیء به قطعات A، B و C تقسیم می‌شود می‌دانیم در لحظه $t=2.5$ بردار وضعیت قطعات A و B به ترتیب جرم 100 و 60kg دارند چنین است:

$$\vec{r}_A = 555\vec{i} - 180\vec{j} + 240\vec{K}$$
$$\vec{r}_B = 255\vec{i} - 120\vec{K}$$

بردار وضعیت قطعه C را در آن لحظه تعیین کنید.

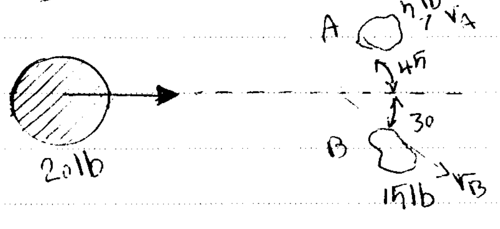
$$\sum m_i \vec{r}_i = m\vec{r}$$
$$\vec{r} = \vec{V}_0 t = 2.5 \times 150\vec{i} = 375\vec{i}$$

$$\left.\begin{array}{l} m_A = 100\,Kg \\ m_B = 60\,Kg \end{array}\right\} \Rightarrow m_C = 200 - (100+60) = 40\,Kg$$

$$\Rightarrow 100(555\vec{i} - 180\vec{j} + 240\vec{K}) + 60(255\vec{i} - 120\vec{K}) + 40(x_C\vec{i} + y_C\vec{j} + z_C\vec{K}) = 200 \times 375\vec{i}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_C = 105\vec{i} + 450\vec{j} - 420\vec{K}$$

مثال: پرتابه‌ای به وزن 20lb با سرعت 100 ft/s حرکت کرده و وقتی منفجر می‌شود به دو قطعه A و B به وزن‌ها 5 و 15 پوند تقسیم می‌گردد، می‌دانیم که بلافاصله پس از انفجار قطعات در امتداد مطابق شکل حرکت می‌کنند سرعت هر قطعه را معین کنید.



$$\vec{L} = cte \Rightarrow \vec{L}_1 = \vec{L}_2$$

$$\left(\frac{20}{g}\right) \times 100\vec{i} = \left(\frac{5}{g}\right)\vec{V}_A + \left(\frac{15}{g}\right)\vec{V}_B$$

$$400\vec{i} = \vec{V}_A + 3\vec{V}_B$$

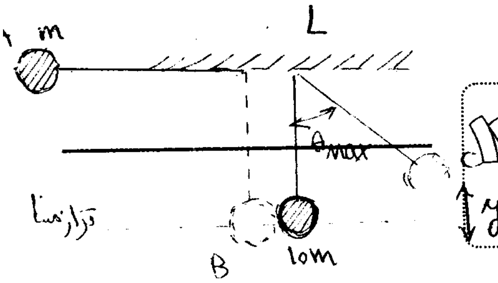
$$400\vec{i} = V_A\cos 45\,\vec{i} + V_A \sin 45\,\vec{j} + 3V_B\cos 30\,\vec{i} - 3 V_B \sin 30\,\vec{j}$$

$$\Rightarrow 400\vec{i} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}V_A + \frac{3\sqrt{3}}{2}V_B\right)\vec{i} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}V_A - 1.5V_B\right)\vec{j}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}V_A + \frac{3\sqrt{3}}{2}V_B = 400 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}V_A - 1.5V_B = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_A = 207.04\ ft/s \\ V_B = 97.61\ ft/s \end{cases}$$

مثال: قطعه‌ای به جرم m از موقعیت A رها شده و به قطعه‌ای به جرم 10m برخورد می‌کند. قطعه دوم حداکثر تا چه زاویه‌ای دوران می‌کند (قطعه اول به قطعه دوم چسبیده و با آن حرکت می‌کند)



تراز مبنا

~~قانون بقای انرژی $\Sigma_A = \Sigma_B$~~

$$T_A + (V_g)_A = T_B + (V_g)_B$$

$$0 + mgL = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$

$$v = \sqrt{2gL}$$

قانون بقای اندازه حرکت

$$\Sigma m_i v_i = \Sigma m_i' v_i'$$

$$m(\sqrt{2gL}) + 0 = (m + 10m)v'$$

$$\rightarrow \sqrt{2gL} = 11v' \rightarrow v' = \frac{\sqrt{2gL}}{11}$$

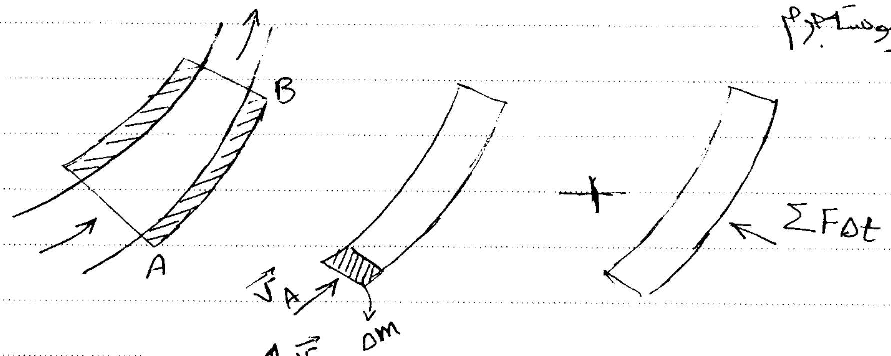
قانون بقای انرژی بین دو نقطه B و C

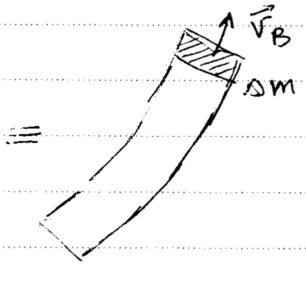
$$\frac{1}{2}(11m)v'^2 + 0 = 0 + (11m)gy$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2gL}{121}\right) = gy \longrightarrow y = \frac{L}{121}$$

$$\cos\theta_{max} = \frac{L - L/121}{L} \Rightarrow \underline{\theta_{max} = 7.37^\circ}$$

+ جریان پیوسته جرم





$$\Delta m\vec{v}_A + \Sigma\vec{F}\Delta t = \Delta m\vec{v}_B$$

$$\rightarrow \Sigma\vec{F}\Delta t = \Delta m\vec{v}_B - \Delta m\vec{v}_A$$
$$= \Delta m(\vec{v}_B - \vec{v}_A)$$

$$\Rightarrow \Sigma\vec{F} = \frac{\Delta m}{\Delta t}(\vec{v}_B - \vec{v}_A)$$

$$\Delta t \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \sum \vec{F} = \frac{dm}{dt}(\vec{V}_B - \vec{V}_A)$$

$$\rightarrow \boxed{\sum \vec{F} = \dot{m}(\vec{V}_B - \vec{V}_A)}$$

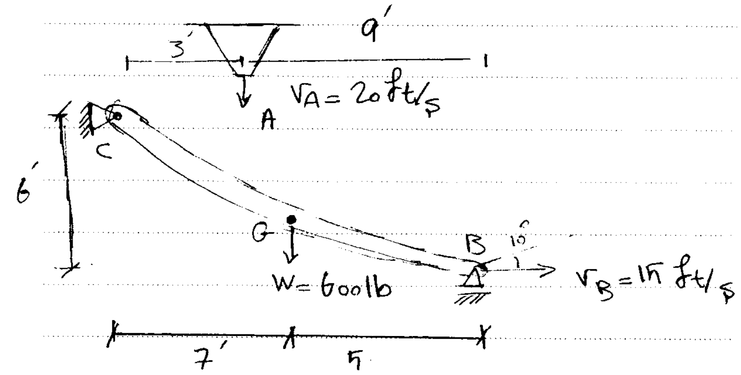
$$\sum \vec{F} + \frac{dm}{dt}\vec{V} = m\dot{\vec{V}} = m\vec{a}$$

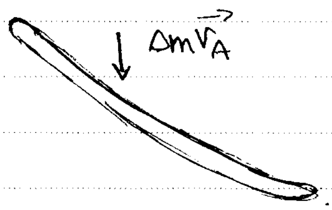
$\vec{u}$ سرعت میال

سرعت سیستم (کل مجموعه)

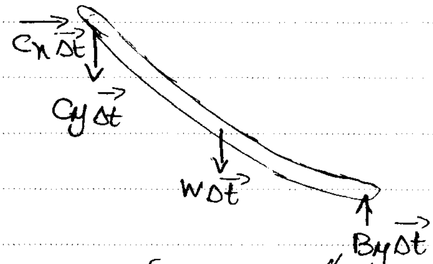
$$\rightarrow \sum \vec{F} + \dot{m}\vec{u} = m\vec{a}$$

مثال: دانه‌های شن از مخزن قیف مانند بر روی نواری با شیب زیاد به میزان $240\ lb/s$ در نقطه A با سرعت $20\ ft/s$ برخورد نموده و از نقطه B که با افق زاویه $10°$ می‌سازد با سرعت $15\ ft/s$ نوار را ترک می‌کنند. می‌دانیم که وزن نوار و شن $600\ lb$ و در نقطه G می‌باشد. معین کنید عکس‌العمل تکیه‌گاه غلتان در نقطه B و مولفه‌های عکس‌العمل در نقطه آویز C را.





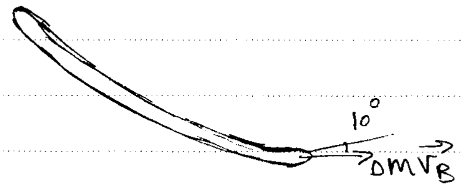
+



دیاگرام اندازه حرکت اولیه

دیاگرام ضربه نیروهای وارده

≡



دیاگرام اندازه حرکت ثانویه (نهایی)

$\xrightarrow{x^+}$: $0 + C_x \vec{\Delta t} = \Delta m \vec{v}_B \cos 10°$

$y\uparrow^+$: $-\Delta m \vec{v}_A + C_y \vec{\Delta t} - W\vec{\Delta t} + B_y \vec{\Delta t} = -\Delta m \vec{v}_B \sin 10°$

$\overset{+}{\circlearrowleft}$ حول C : $-\Delta m \vec{v}_A \times 3 - \vec{W} \Delta t \times 7 + B_y \vec{\Delta t} \times 12 = \Delta m \vec{v}_B \cos 10° \times 6 - \Delta m v_B \sin 10° \times 12$

$v_A = 20\ ft/s$ $\quad v_B = 15\ ft/s$ $\quad \Delta m = \frac{240}{32.17} = 7.4\ slug/s$ $\quad \Delta t = 1\ sec$

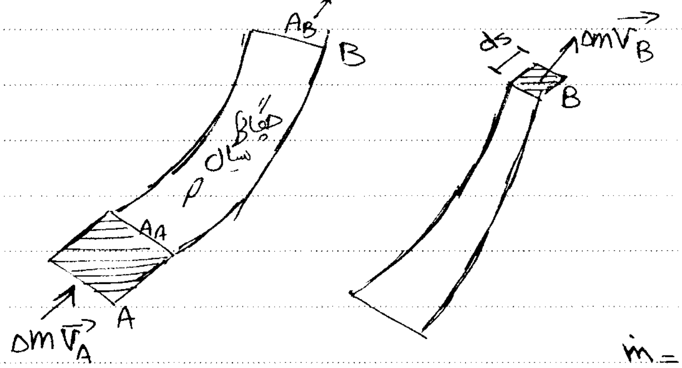
$C_x = 7.4 \times 15 \cos 10 = 109.31\ lb$

$-7.4 \times 20 \times 3 - 600 \times 1 \times 7 + B_y \times 1 \times 12 = 7.4(15 \cos 10° \times 6 - 15 \sin 10° \times 12)$

$B_y = 422.38\ lb$

$$-7.4\times 20 + C_y\times 1 - 600\times 1 + (422.38)\times 1 = -7.4\times 15\times \sin 10$$

مساحت $\rightarrow$ $C_y = 306.34\ lb$



$$\sum \vec{F} = \dot{m}(\vec{V}_B - \vec{V}_A)$$

$\dot{m} = \dfrac{dm}{dt}$ = نرخ تغییرات جرم ورودی و خروجی نسبت به زمان

$$dm = \rho dV = \rho A ds$$

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \frac{\rho A\, ds}{dt} = \rho AV$$

AV → Q دبی

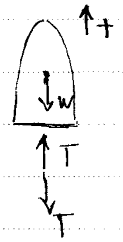
$$Q = AV$$

$$\left.\begin{array}{l}\dot{m} = \rho_A V_A A_A = \rho_B V_B A_B \\ \rho_A = \rho_B = \rho\end{array}\right\} \Rightarrow V_A A_A = V_B A_B \Rightarrow Q_A = Q_B$$

مثال: جرم کل موشکی همراه با سوخت آن $2.5\times10^6\ kg$ می‌باشد اگر در کل $1.5\times10^6\ kg$ از سوخت موشک با نرخ ثابت 7.5×10^3 کیلوگرم بر ثانیه مصرف شده و با سرعت ثابت $2500\ m/s$ خارج شود سرعت موشک را در لحظه‌ای که سوخت به اتمام می‌رسد محاسبه کنید. از تغییرات نیروی ثقل و مقاومت هوا صرف نظر کرده و فرض کنید که موشک از حالت سکون به صورت

تا هم مثل یک می‌شود.

برای حالتی که جرم افزایش پیدا کند. $\sum \vec{F} + \dot{m}\vec{u} = m\vec{a}$



برای حالتی که جرم کاهش پیدا می‌کند : $\sum \vec{F} - \dot{m}\vec{u} = m\vec{a}$

$$W_0 = 2.5\times10^6 \times 9.81\ N$$

$$\frac{dm}{dt} = 7.5\times10^3\ kg/s$$

$$u = -2500\ m/s$$

$$-\vec{W} - \frac{dm}{dt}\times u = m\frac{dv}{dt} \quad I$$

$$w = mg = (2.5\times10^6 - 7.5\times10^3 t)\times g$$

$$m = m_0 - \dot{m}\,t = 2.5\times10^6 - 7.5\times10^3 \times t$$

$$I : -(2.5\times10^6 - 7.5\times10^3 t)\times 9.81 - 7.5\times10^3\times(-2500) = (2.5\times10^6 - 7.5\times10^3 t)\times\frac{dv}{dt}$$

$$\int_0^V dv = \int_0^t \frac{7.5\times10^3\times2500 - (2.5\times10^6 - 7.5\times10^3 t)\times 9.81}{2.5\times10^6 - 7.5\times10^3 t}\,dt$$

در لحظه تمام شدن سوخت $\quad m = 1.5\times10^6 = 2.5\times10^6 - 7.5\times10^3 t \Rightarrow t = 200\ sec$

$$\Rightarrow \quad V = 328.73\ m/s$$

* ارتعاشات

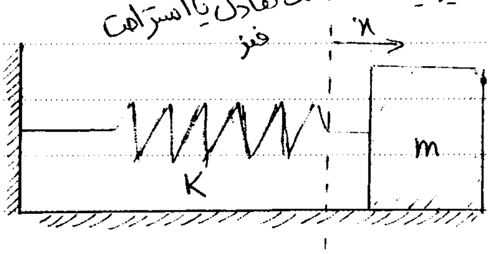
۱- انواع حرکت نوسانی (ارتعاشی)

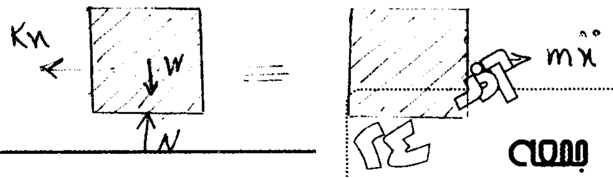
الف- حرکت آزاد: فقط وزن و نیروی فنر

ب- حرکت اجباری (واداشته): جسم یا سیستم تحت تأثیر نیروی متناوب یا منقطع قرار دارد.

۲- حرکت نوسانی ساده (ارتعاش آزاد بدون میرایی)

الف- حالت افقی





$$\sum \vec{F_x} = m\vec{a_x}$$

$$-Kx = m\ddot{x} \rightarrow m\ddot{x} + Kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0 \rightarrow \ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$$ معادله دیفرانسیل همگن

فرکانس طبیعی زاویه‌ای سیستم $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \rightarrow x = A\sin\omega_n t + B\cos\omega_n t$$

B.C. شرایط مرزی
$$\begin{cases} t=0 \\ x=x_0 \\ V=V_0 \end{cases}$$

$$V=\dot{x}=A\omega_n\cos\omega_n t - B\omega_n\sin\omega_n t$$

$$a=\dot{V}=\ddot{x}=-A\omega_n^2\sin\omega_n t - B\omega_n^2\cos\omega_n t$$
$$=-\omega_n^2\underbrace{(A\sin\omega_n t+B\cos\omega_n t)}_{x}$$

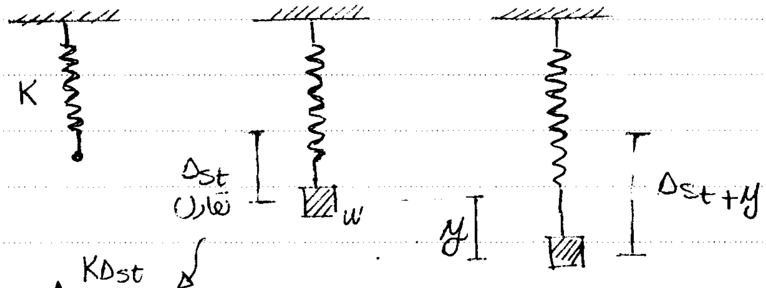
$$a=-\omega_n^2 x$$

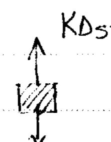
$$t=0 \rightarrow x=x_0 : \quad x_0=0+B\times 1 \rightarrow B=x_0$$

$$t=0 \rightarrow V=V_0 : \quad V_0=A\omega_n\times 1=0 \rightarrow A=\frac{V_0}{\omega_n}$$

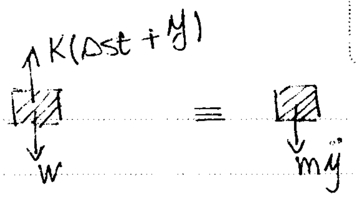
$$\Rightarrow x=\frac{V_0}{\omega_n}\sin\omega_n t+x_0\cos\omega_n t$$

ب- حالت قائم





$$\Sigma F_y=0 \rightarrow W=K\Delta_{st}$$



$$\sum \vec{F_y} = m\vec{a_y} \Rightarrow W - K(\Delta_{st} + y) = m\ddot{y}$$

$$\cancel{W} - \cancel{K\Delta_{st}} - Ky = m\ddot{y}$$

$$-Ky = m\ddot{y} \rightarrow m\ddot{y} + Ky = 0$$

$$\boxed{\ddot{y} + \omega_n^2 y = 0}$$

$$y = \frac{v_0}{\omega_n}\sin\omega_n t + y_0\cos\omega_n t$$

$$x = A\sin\omega_n t + B\cos\omega_n t$$

$$\left.\begin{aligned} A &= C\cos\varphi \\ B &= C\sin\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = C\cos\varphi\,\sin\omega_n t + C\cos\omega_n t\,\sin\varphi$$

$$x = C(\sin\omega_n t\,\cos\varphi + \cos\omega_n t\,\sin\varphi)$$

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$ $\rightarrow$

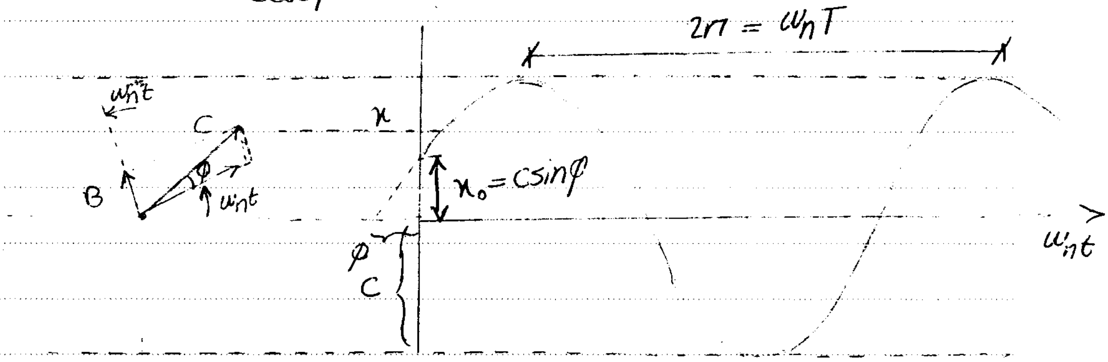
$$\Rightarrow x = C\sin(\omega_n t + \varphi)$$

دامنه ارتعاش یا دامنه نوسان

زاویه فاز اولیه

$$A^2+B^2 = C^2(\underbrace{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}_{1}) \Rightarrow C=\pm\sqrt{A^2+B^2}$$

$$B/A = \frac{C\sin\varphi}{C\cos\varphi} = tg\,\varphi \Rightarrow \varphi = Arctg\left(\frac{B}{A}\right)$$



$$2\pi = \omega_n T \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_n} = \boxed{2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}}$$ زمان تناوب سیستم (پریود حرکت)

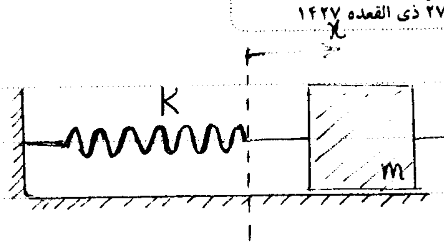
برحسب s

تعداد تناوب در واحد زمان = فرکانس (بسامد - تواتر)

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$$

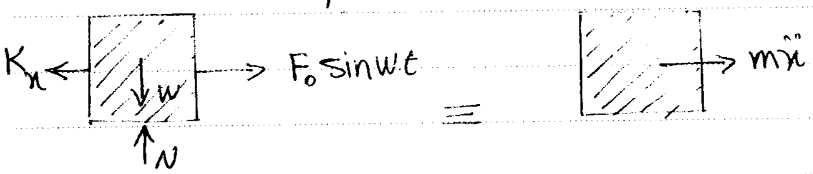
واحد : $1\ cycle/s = 1\ Hz = 1\ 2\pi Rad/s$

۳- حرکت واداشته (اجباری) بدون میرایی



دامنه نیروی وارده — فرکانس زاویه‌ای نیروی وارده

حالت تعادل فنر



$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \Rightarrow -Kx + F_0 \sin \omega t = m\ddot{x}$$

$$\rightarrow m\ddot{x} + Kx = F_0 \sin \omega t$$

$$\ddot{x} + K/m \, x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$

$$x = x_c + x_p$$

جواب عمومی : $\ddot{x}_c + \omega_n^2 x_c = 0 \rightarrow x_c = A \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t$

جواب خصوصی : $x_p = D \sin \omega t \rightarrow \dot{x}_p = D\omega \cos \omega t \rightarrow \ddot{x}_p = -D\omega^2 \sin \omega t$

معادله اصلی : $-D\omega^2 \cancel{\sin \omega t} + K/m \, D \cancel{\sin \omega t} = \frac{F_0}{m} \cancel{\sin \omega t}$

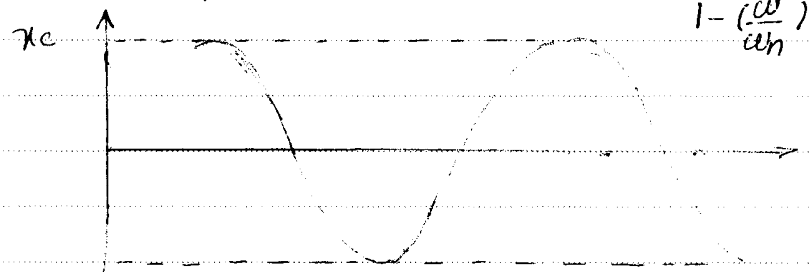
$$D = \frac{F_0/m}{K/m - \omega^2} \times \frac{m/K}{m/K} \rightarrow D = \frac{F_0/K}{1 - \frac{m}{K}\omega^2}$$

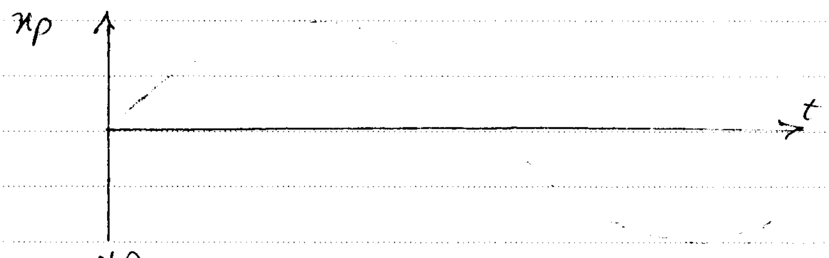
$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow \frac{K}{m} = \omega_n^2$$

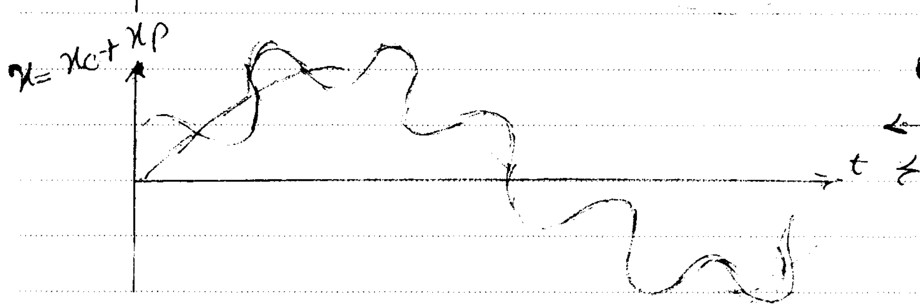
$$\frac{m}{K} = \frac{1}{\omega_n^2} \qquad \Rightarrow D = \frac{F_0/K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

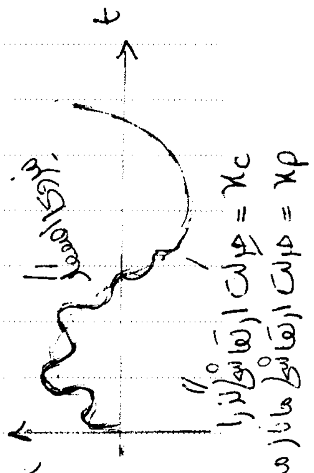
$$\boxed{D = \frac{F_0/K}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$x = x_c + x_p = A\sin\omega_n t + B\cos\omega_n t + \frac{F_0/K}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\sin\omega t$$







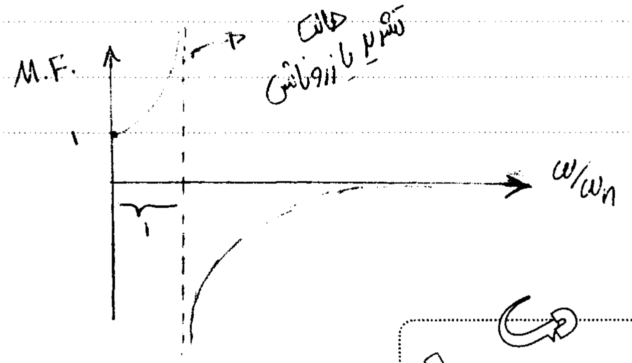


$$D = \frac{F_0/K}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \Rightarrow \frac{D}{F_0/K} = \frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

راهنمای خصوصی

ضریب بزرگنمایی magnification factor $= M.F. = \dfrac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$

$$D = (x_p)_{max}$$



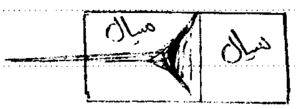
شهادت امام محمد تقی(ع)

اگر $\omega \ll \omega_n \Rightarrow \omega/\omega_n \to 0 \to M.F. \to 1$

اگر $\omega = \omega_n \to \omega/\omega_n = 1 \to M.F. \to \infty \to$ حالت تشدید رزونانس

$\omega \gg \omega_n \to \omega/\omega_n \to \infty \to M.F. \simeq 0$

۴- ارتعاش آزاد با میرایی



$\left(\frac{N.S}{m}\right)$

ضریب میرایی لزج $= C$ → $F = C\dot{x}$

ما بدین در نه پی حشمت و جاه آمده ایم   از بد حادثه اینجا به پناه آمده ایم

میرا : damper = dashpol

$Kx \leftarrow$ [W, N] $\leftarrow c\dot{x}$ $\equiv$ $\rightarrow m\ddot{x}$

$$\sum \vec{F_x} = m\vec{a_x} \rightarrow -Kx - c\dot{x} = m\ddot{x} \rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0$$

درجه دوم کامل همگن خطی

$$x = e^{\lambda t} \rightarrow \dot{x} = \lambda e^{\lambda t} \rightarrow \ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$m\lambda^2 e^{\lambda t} + c\lambda e^{\lambda t} + Ke^{\lambda t} = 0 \rightarrow e^{\lambda t}(m\lambda^2 + c\lambda + K) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} e^{\lambda t} = 0 & \text{غلط} \\ m\lambda^2 + c\lambda + K = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{\sqrt{c^2 - 4mK}}{2m} \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}}$$

if $\Delta = 0 \rightarrow \left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m} = 0 \rightarrow \frac{c}{2m} = \sqrt{\frac{K}{m}} = \omega_n \rightarrow c_c = 2m\omega_n = 2\sqrt{Km}$

میرایی بحرانی

ضریب میرایی بحرانی critical damping coefficient

حالت ۱ : $c > c_c \Rightarrow$ میرایی شدید

نسبت میرایی $\xi = \frac{c}{c_c} > 1$ زیتا

$\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 < 0$ هر دو ریشه منفی

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

$$\lambda_1 , \lambda_2 < 0 \quad \Rightarrow \quad t \to \infty \;,\; x \to 0$$

حالت ۲ : $\quad c = c_c \Rightarrow \xi = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-c}{2m} = \frac{-2m\,\omega_n}{2m} = -\omega_n < 0$

$$x = Ae^{\lambda t} + Bte^{\lambda t} \Rightarrow x = Ae^{-\omega_n t} + Bte^{-\omega_n t}$$

$$x = (A+Bt)e^{-\omega_n t}$$ حرکت غیر ارتعاشی بحرانی

حالت ۳ : $\quad c < c_c \Rightarrow \xi = \frac{c}{c_c} < 1$ (میرایی خفیف (ضعیف))

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n} \Rightarrow \frac{c}{2m} = \xi\,\omega_n$$

$$\frac{K}{m} = \omega_n^2$$

$$\lambda_1 , \lambda_2 = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}} = -\xi\omega_n \pm \sqrt{\xi^2\omega_n^2 - \omega_n^2}$$

$$\lambda_1 , \lambda_2 = \omega_n\left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right) = \omega_n\left(-\xi \pm i\sqrt{1-\xi^2}\right) \quad i = \sqrt{-1}$$

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$
$$= Ae^{\omega_n(-\xi + i\sqrt{1-\xi^2})t} + Be^{\omega_n(-\xi - i\sqrt{1-\xi^2})t}$$

$$x=\left(Ae^{-\omega_n i\sqrt{1-\xi^2}\,t}+Be^{-i-\sqrt{1-\xi^2}\,t\,\omega_n}\right)e^{-\xi\omega_n t}$$

فرکانس طبیعی زاو با میرایی $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

$$\Rightarrow x=\left(Ae^{i\omega_d t}+Be^{-i\omega_d t}\right)e^{-\xi\omega_n t}$$

فرمول موآور : $e^{ix}=\cos x+i\sin x$

$e^{-ix}=\cos x-i\sin x$

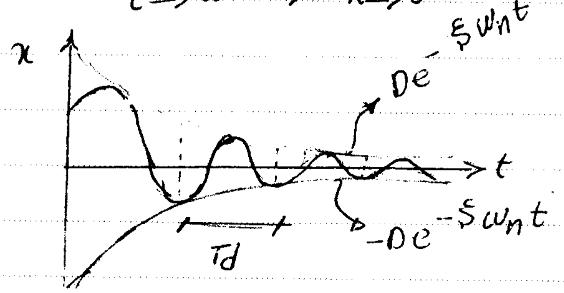
$$x=\left[A(\cos\omega_d t+i\sin\omega_d t)+B(\cos\omega_d t-i\sin\omega_d t)\right]e^{-\xi\omega_n t}$$

$$x=\left[A'\cos\omega_d t+B'\sin\omega_d t\right]e^{-\xi\omega_n t}$$

$$\begin{cases}A'=A+B\\ B'=i(A-B)\end{cases}$$ ساوو

$$x=D\sin(\omega_d t+\psi)e^{-\xi\omega_n t}$$

$t\to\infty \Rightarrow x\to 0$



$T=\frac{2\pi}{\omega_n}$

$T_d=\frac{2\pi}{\omega_d}=\frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$

$\omega_d<\omega_n \Rightarrow T_d>T$

ω_n : فرکانس زاویه‌ای طبیعی سیستم

ω_d : " " " با میرایی

ارتعاش واداشته (اجباری) میرا

فرکانس زاویه‌ای بارگذاری

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+Kx=F_0\sin\omega t$$

$$x=x_c+x_p$$

$$x_p=A_1\sin\omega t+B_1\cos\omega t$$

$$A_1=\frac{\frac{F_0}{m}(\omega_n^2-\omega^2)}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(\frac{c\omega}{m})^2}$$

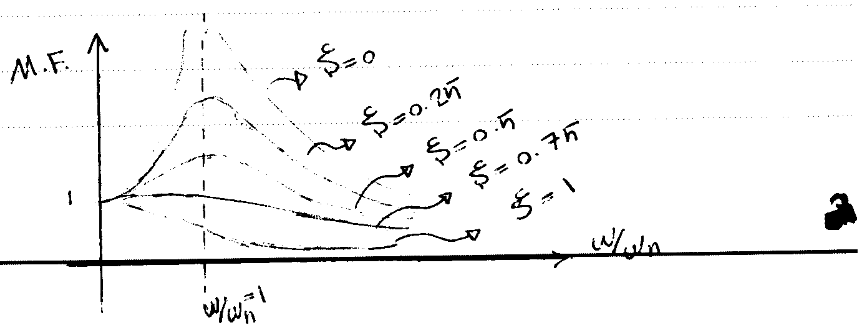
$$B_1=\frac{-F_0\frac{c\omega}{m^2}}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(\frac{c\omega}{m})^2}$$

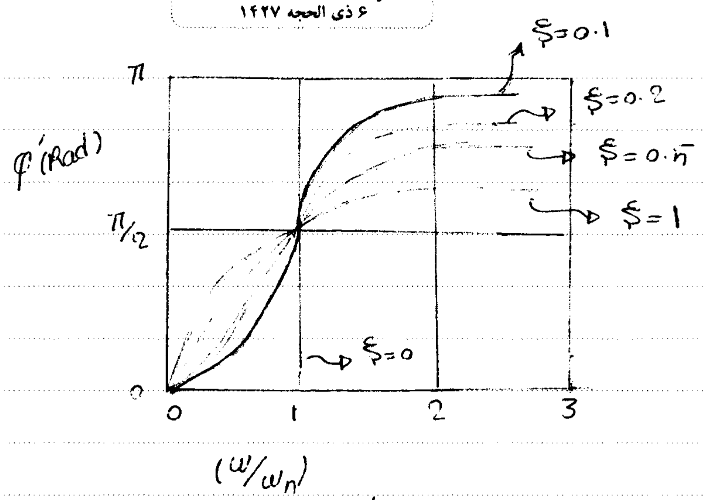
$$\rightarrow x_p=c'\sin(\omega t+\varphi')$$

$$c'=\frac{F_0/K}{\sqrt{(1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2)^2+(2\xi\frac{\omega}{\omega_n})^2}}$$

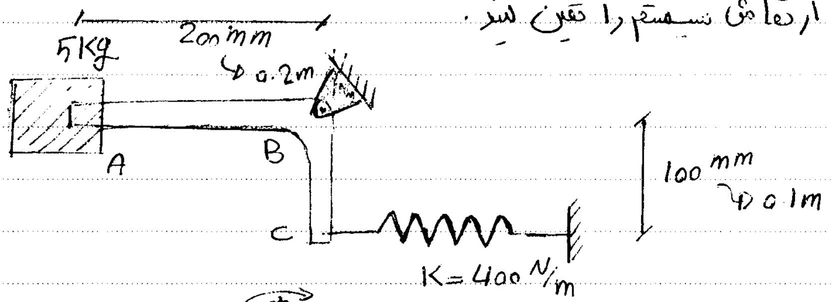
$$\varphi'=tg^{-1}\left(\frac{c\omega/K}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2}\right)$$

$$M.F.=\frac{(x_p)_{max}}{F_0/K}=\frac{1}{\sqrt{(1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2)^2+(2\xi\frac{\omega}{\omega_n})^2}}$$





مثال: میله خمیده با جرم ناچیز مطابق شکل قطعه‌ای 5Kg را در انتهای خود دارد زمان تناوب طبیعی ارتعاش سیستم را تعیین کنید.

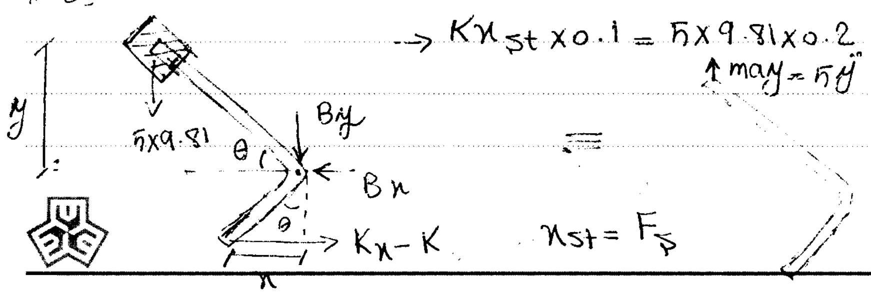


در حال تعادل : $\sum \overset{+}{M_B} = 0$

$$-\underbrace{5\times 9.81}_{W}\times 0.2 + K\cdot x_{st}\times 0.1 = 0$$

θ خیلی کوچک

$$\to K x_{st}\times 0.1 = 5\times 9.81\times 0.2$$



اگر $\theta < 6^\circ \rightarrow \sin\theta \simeq tg\theta \simeq \theta \ (Rad)$

$$\sum \overset{\curvearrowleft}{M_B} = m\vec{a}_y d \Rightarrow 5\times 9.81\times 0.2 + (Kx - Kx_{st})\times 0.1 = -5\ddot{y}\times 0.2$$

$$-Kx_{st}\times 0.1$$

$$5\times 9.81\times 0.2 + Kx\times 0.1 = -5\times 0.2\ddot{y}$$

$$0.1Kx = -1\ddot{y}$$

$$y = 0.2tg\theta \simeq 0.2\theta \longrightarrow \ddot{y} = 0.2\ddot{\theta}$$

$$x = 0.1tg\theta \simeq 0.1\theta$$

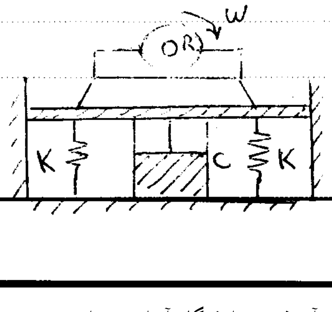
$$0.1(400)(0.1\theta) = -0.2\ddot{\theta}$$

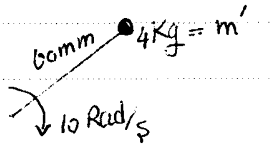
$$\Rightarrow \ddot{\theta} + 20\theta = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\ Rad/s$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{2\sqrt{5}} = 1.405\ sec$$

مثال: موتور الکتریکی 30Kg مطابق شکل توسط چهار فنر نگهداری می‌شود که هر یک سختی 200 N/m دارند اگر عضو گردنده R آنچنان نامتعادل باشد که اثرات معادل با جرم 4gr قرار گرفته در فاصله 60mm از محور گردش باشد دامنه ارتعاش را وقتی که عضو R با سرعت دورانی 10 Rad/s حرکت می‌کند بدست آورید (نسبت میرایی 0.15 می‌باشد)





$a_n = r\dot{\theta} = r\omega^2$

دامنه ارتعاشی نیرو $= m'a_n = 4 \times \frac{60}{100} \times 10^2 = 24N$

$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F_0 \sin\omega t = 24 \sin 10t$

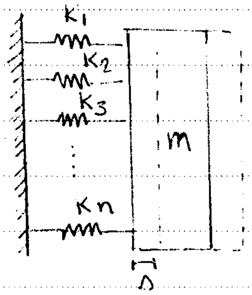
$$c' = \frac{F_0/K}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$K = 4 \times 200 = 800\ N/m$

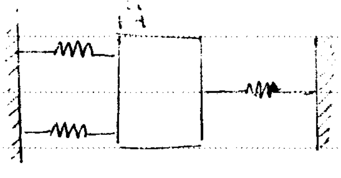
$m = 30\ Kg \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{800}{30}} = 5.16\ Rad/s$

$\Rightarrow c' = 10.7\ mm$

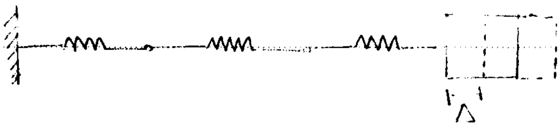
حالت موازی



در این حالت $K_{eq} = \Sigma K_i$



حالت سری

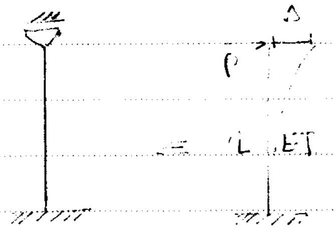


$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$

$\frac{1}{K_{eq}} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_3} = \sum\left(\frac{1}{K_i}\right)$

$F = Kx \rightarrow K = \frac{F}{x}$

$P = K\Delta \rightarrow K = \frac{P}{\Delta}$



ستون یک سرگیردار یک سر مفصل

ستون یک سر گیردار یک سر آزاد

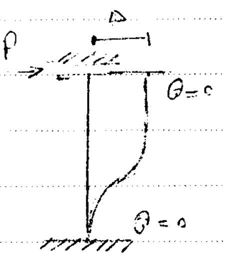
$$\Delta = \frac{PL^3}{3EI}$$

$$\rightarrow \frac{P}{\Delta} = ?$$

$$\Rightarrow K = \frac{P}{\Delta} = \frac{3EI}{L^3}$$

سختی ستون یک سرگیردار

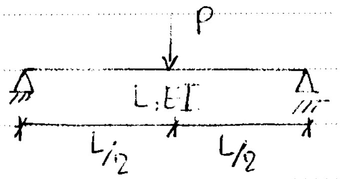
ستون دو سرگیردار



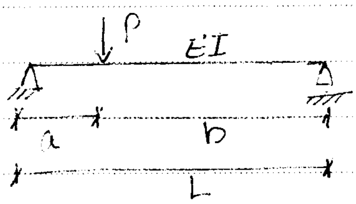
$$\Delta = \frac{PL^3}{12EI}$$

$$K = \frac{P}{\Delta} = \frac{12EI}{L^3}$$

سختی ستون دوسرگیردار



$$\Delta = \frac{PL^3}{48EI} \rightarrow K = \frac{P}{\Delta} = \frac{48EI}{L^3}$$



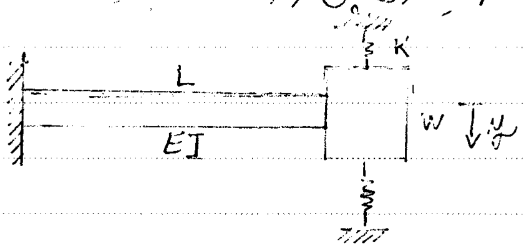
$$\Delta = \frac{Pab}{6LEI}(L^2 - a^2 - b^2)$$

$$= \frac{Pab}{6(a+b)EI} \times 2ab = \frac{Pa^2b^2}{3(a+b)EI}$$

$L = a + b$

$$K = \frac{P}{\Delta} = \frac{3(a+b)EI}{a^2\ b^2}$$

مثال : در شکل زیر مقدار سرعت و جابجایی را در ثانیه اول پس از حرکت محاسبه کنید.



$L = 100\ in$

$EI = 10^8\ lb.in^2$

$W = 3000\ lb$

$K = 2000\ lb/in$

$c < c_c$

$\xi = 15\%$

$g = 32.17\ ft/s^2$

$$K_{eq} = 2K + K_{\text{تیر}} = 2K + \frac{3EI}{L^3}$$

$$m = \frac{W}{g}$$

شرایط اولیه $\begin{cases} y_0 = 1\ in \\ V_0 = 20\ in/s \end{cases}$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{2K + \frac{3EI}{L^3}}{\frac{W}{g}}} = \sqrt{\frac{g(2KL^3 + 2EI)}{L^3 \times W}} = 23.52\ Rad/s$$

$$g = 32.17\ ft/s \times 12 = 386\ in/s^2$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 23.52\sqrt{1-0.15^2} = 23.25\ Rad/s$$

$$y(t) = [A'\cos\omega_d t + B'\sin\omega_d t]e^{-\xi\omega_n t}$$

$$V(t) = \dot{y}(t) = (-A'\omega_d \sin\omega_d t + B'\omega_d\cos\omega_d t)e^{-\xi\omega_n t} -$$

$$\xi\omega_n(A'\cos\omega_d t + B'\sin\omega_d t)e^{-\xi\omega_n t}$$

$$t=0 \rightarrow y=y_0 \rightarrow y_0=(A'\times 1+B'\times 0)\underbrace{e^0}_{1} \rightarrow y_0=A'$$

$$t=0 \rightarrow V=V_0 \rightarrow V_0=(-\cancel{A'\omega_d \times 0}+B'\omega_d \times 1)\underbrace{e^0}_{1}$$

$$-\xi\omega_n(A'\times 1+\cancel{B'\times 0})\underbrace{e^0}_{1}$$

$$V_0=B'\omega_d-\xi\omega_n A'=B'\omega_d-\xi\omega_n y_0$$

$$\Rightarrow B'=\frac{V_0+\xi\omega_n y_0}{\omega_d}$$

$$y_0=1 \rightarrow A'=1$$

$$V_0=20 \rightarrow B'=\frac{20+0.15\times 23.52\times 1}{23.25}=1.01$$

$$\Rightarrow y(t)=(\cos 23.25t+1.01\sin 23.25t)e^{-3.53t}$$

$$\Rightarrow V(t)=\dot{y}(t)=(-23.25\sin 23.25t+1.01\times 23.25\cos 23.25t)e^{-3.53t}$$

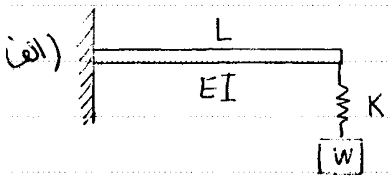
$$+3.53e^{-3.53t}(\cos 23.25t+1.01\sin 23.25t)$$

$$y(1)=-0.037in$$

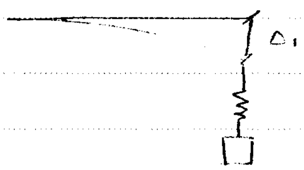
$$V(1)=$$

مثال: فرکانس طبیعی زاویه‌ای را در شکلهای زیر محاسبه کنید:

الف)



$$\frac{1}{K_{eq}} = \frac{1}{K} + \frac{1}{\frac{3EI}{L^3}} = \frac{1}{K} + \frac{L^3}{3EI}$$

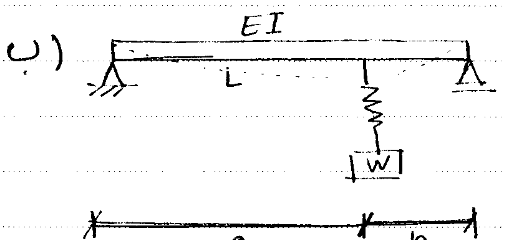


$$= \frac{3EI + KL^3}{3EIK}$$

$$K_{eq} = \frac{3EIK}{3EI + KL^3}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{3EIK/(3EI+KL^3)}{W/g}} = \sqrt{\frac{3EIKg}{W(3EI+KL^3)}}$$

ب)



$$\frac{1}{K_{eq}} = \frac{1}{K} + \frac{1}{\frac{3(a+b)EI}{a^2 b^2}}$$

$$= \frac{1}{K} + \frac{a^2 b^2}{3(a+b)EI}$$

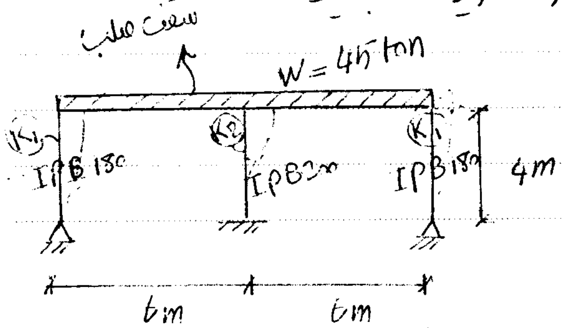
$$K_{eq} = \frac{3(a+b)EIK}{3(a+b)EI + Ka^2 b^2}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{3(a+b)EIK/(3(a+b)EI+Ka^2b^2)}{W/g}}$$

الف)

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3(a+b)EIKg}{W(3(a+b)EI+Ka^2b^2)}}$$

مثال : فرکانس زاویه‌ای و زمان تناوب را در شکل زیر محاسبه کنید.



$E = 2.1 \times 10^6 \ Kg/cm^2$

$IPB180 \rightarrow I = 3830 \ cm^4$

$IPB200 \rightarrow I = 5700 \ cm^4$

$$K_1 = \frac{3EI}{L^3} = \frac{3 \times 2.1 \times 10^6 \times 3830}{400^3} = 377 \ Kg/cm$$

$$K_2 = \frac{12EI}{L^3} = \frac{12 \times 2.1 \times 10^6 \times 5700}{400^3} = 2244.38 \ Kg/cm$$

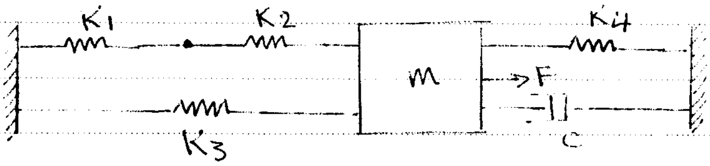
$$K_{eq} = 2K_1 + K_2 = 2998.4 \ Kg/cm$$

$$m = \frac{W}{g} = \frac{45 \times 10^3 \ Kg}{981 \ cm/s^2} = 45.87 \ kg.s^2/cm$$

دی
16 شنبه
6 January 2007
Saturday
١٦ ذی الحجه ١٤٢٧

$$\omega_n=\sqrt{\frac{K}{m}}=\sqrt{\frac{2998.4}{45.87}}=8.08\ Rad/s \longrightarrow T=\frac{2\pi}{\omega_n}=0.778\ sec$$

مثال: سیستم زیر به جرم 2ton تحت تاثیر نیروی $F=500\sin 3t$ (kg) قرار گرفته است مطلوبست تغییر مکان این سیستم را محاسبه کنید.



$F=500\sin 3t$

$\xi=0.2=20\%$

$K_1=1000\ Kg/m$

$K_2=1500\ Kg/m$

$K_3=3000\ Kg/m$

$K_4=2600\ Kg/m$

$$K_{eq}=\frac{1}{\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}}+K_3+K_4$$

$$K_{eq}=\frac{1}{\frac{1}{1000}+\frac{1}{1500}}+3000+2600=6200\ Kg/m$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{K}{m}}=\sqrt{\frac{6200}{2000}}=1.761\ Rad/s$$

$$\omega=3 \longrightarrow \frac{\omega}{\omega_n}=\frac{3}{1.761}=1.70 \xrightarrow{\text{گراف صفحه } 619} M.F.\cong 0.5$$

$$M.F.=\frac{(x_p)_{max}}{F_0/K} \Rightarrow (x_p)_{max}=M.F.\,\frac{F_0}{K}$$

$$(x_p)_{max}=0.5\times\frac{500}{6200}\cong 0.04^{m}=4cm$$

$$x_p=\underbrace{c'}_{(x_p)_{max}}\sin(\omega t-\varphi')$$