فصل اول

مروری بر سیستم های غیرخطی

مقدمه

چرا از سیستم کنترل غیرخطی استفاده می شود؟

اکثر فرآیندهای صنعتی، سیستم های کنترل رباتیک، ناوبری و مهندسی پزشکی دارای المانهای غیرخطی بوده و لذا آشنایی با المانهای غیرخطی جزو ملزومات طراحی کنترل کننده های مناسب اکثر سیستم های صنعتی می باشد.

دلایل استفاده از کنترل کننده های غیرخطی

a) تعدیل سیستمهای کنترل موجود

بعضی از سیستمهای کنترل خطی براین اساس طراحی شده اند که تغییرات ورودی حول نقطه کار بسیار کوچک است. اما در عمل چون سیستم ذاتاً غیرخطی عمل می کند و امکان دارد تغییرات ورودی حول نقطه کار بزرگ باشد لذا احتمال ناپایداری کنترل کننده خطی سیستم بسیار زیاد است.

b) آنالیز عوامل غیرخطی شدید

در بعضی از سیستمهای کنترل عوامل غیرخطی وجود دارد که بواسطه طبیعت غیرپیوسته آنها امکان هیچ گونه تقریب خطی وجود ندارد.

این عوامل غیرخطی شدید معمولاً شامل یکی از موارد اصطکاک کولمبی، اشباع، ناحیه مرده، backlash و هیسترزیس می باشد.

c) وارد نمودن عدم قطعیت های مدل در طراحی

در طراحی سیستمهای کنترل خطی، لازم است که فرض کنیم پارامترهای مدل سیستم به گونه ای معقول شناخته شده هستند. اما خیلی از مسائل کنترلی در مدل پارامتریک سیستم دارای یک سری عدم قطعیت هستند.

d) سادگی در طراحی

در بسیاری از مواقع، یک کنترل کننده غیرخطی که خوب طراحی شده بود میتواند نسبت به کنترل کننده خطی نظیرش بسیار ساده تر نیز باشد.

آشنایی مختصر با عوامل غیرخطی

معمولاً عوامل غیرخطی به دو دسته ذاتی و قراردادی تقسیم بندی می شوند.

عوامل ذاتی آن دسته از عوامل هستند که به طور طبیعی جزء سیستم می باشند و اصطلاحاً به طور سخت افزاری در ذات سیستم واقع شده اند همچون اصطکاک کولمبی بین دو سطح، هیسترزیس، اشباع، backlash.

عوامل غیرخطی قراردادی، به طور مصنوعی توسط طراح به سیستم اعمال می گردد.

قوانین کنترل غیرخطی قراردادی، همچون قوانین کنترل تطبیقی (adaptive) و قوانین کنترل بهینه Bang-Bang، جزء دسته مواردی هستند که به سیستم کنترل اعمال می گردند تا عملکرد سیستم را بهبود بخشند.

سیستمهای خطی

اگر سیستم خطی از نوع LTI باشد آنگاه فرم عمومی آن به صورت زیر است.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

خواص سیستمهای LTI

۱) تنها دارای یک نقطه تعادل منحصر بفرد هستند اگر A یک ماتریس غیر منفرد باشد.

۲) اگر مقادیر ویژه ماتریس A دارای جزء حقیقی منفی باشند آنگاه نقطه تعادل سیستم را پایدار گوئیم (بدون توجه به مقادیر شرائط اولیه سیستم)

۳) پاسخ یک سیستم خطی ترکیبی از مودهای طبیعی سیستم (پاسخ ورودی صفر) و جواب عمومی (پاسخ حالت صفر) است که هر دوی آنها می توانند به صورت تحلیلی بدست آیند.

۴) خاصیت جمع آثار در مورد سیستم صدق می کند.

۵) پایداری مجانبی سیستم زمان که $u = 0$ باشد لازم می دارد که سیستم دارای پایـداری $BIBO$ نیـز باشد.

۶) با اعمال ورودی سینوسی، خروجی سیستم نیز سیگنالی با همان فرکانس خواهد بود.

تعریف سیستم غیرخطی

سیستمی که اصل جمع آثار در مورد آن صادق نباشد، سیستم غیرخطی نامیده می شود.

چند مثال ریاضی

$$y = e^{x} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + x\frac{dy}{dt} + \sqrt{x}\,y = \sin x$$

$$y = \sin x$$

در تمام مثال های فوق x: ورودی سیستم و y: خروجی سیستم است

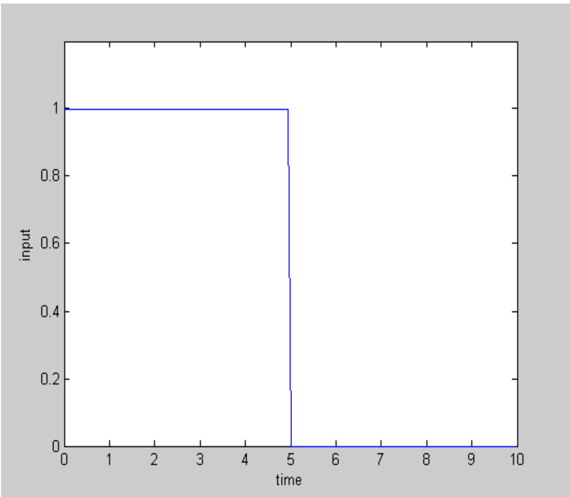
چند مثال عملی

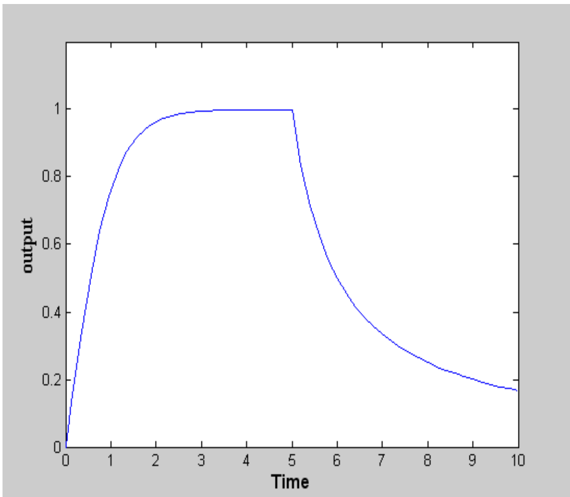
۱- مدل ساده شده مربوط به حرکت یک جسم در زیر آب به فرم زیر است

$$\dot{v} + |v|v = u$$

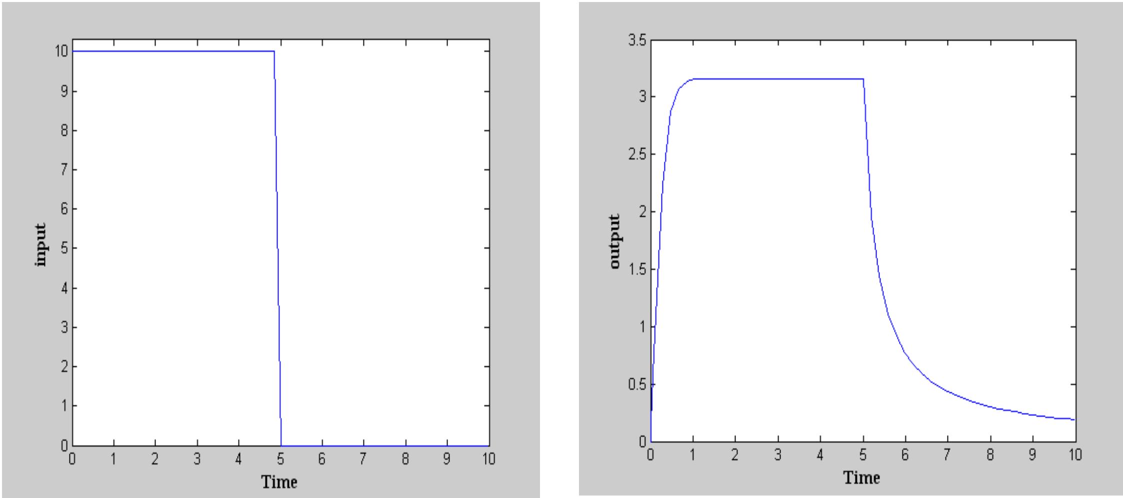
v: سرعت جسم

u: ورودی کنترل جسم متحرک





اگر دامنه ورودی سیستم را ۱۰ برابر کنیم آنگاه شکل موج u و v مطابق شکل زیر خواهد بود.



قاعدتاً اگر سیستم خطی بود با ۱۰ برابر کردن دامنه ورودی، بایستی خروجی نهایی سیستم نیز ۱۰ برابر می شد که عدم برقراری این رابطه مجدداً خود نشانه ای از عملکرد غیرخطی سیستم دارد.

همچنین اگر خوب دقت کنید ملاحظه می گردد که زمان نشست در حالت افزایش و با کاهش v، نسبت به حالتی که u، پله واحد بود کمتر شده که دلیل آن نیز افزایش $|v|$ است.

جهتِ یافتن خروجی نهایی سیستم در دو حالت مورد بحث می توان گفت

اگر $u=1 \Rightarrow 0+|v_S|v_S=1 \rightarrow v_S=1$

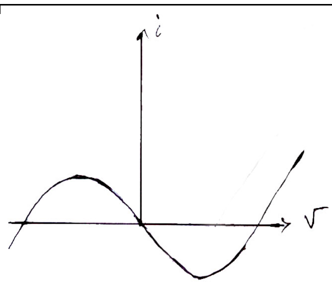
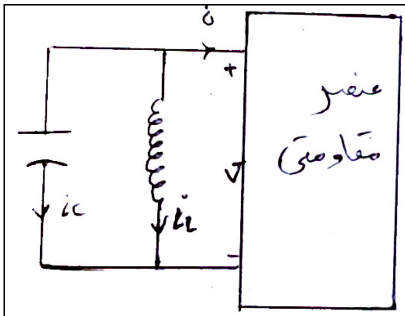
اگر$u=10 \Rightarrow 0+|v_S|v_S=10 \rightarrow v_S=\sqrt{10}=3.2$

v_s: سرعت شرائط مانا

نکته : در معادله دیفرانسیل به جای مشتق v در شرائط مانا، صفر قرار داده شده است.

مثال ۲: نوسان ساز مقاومت منفی

شکل زیر، ساختار اساسی، کلاس مهمی از نوسان سازهای الکترونیک را نشان میدهد.

عنصر غیرخطی مقاومتی، یک مقاومت کنترل شده با ولتاژ است با منحنی مشخصه شکل روبرو $i=h(v)$		

$h(\cdot)$ تابعی است که i را با v مرتبط می کند و دارای خصوصیات زیر است

۱) $h(0)=0 \quad , \quad h'(0)<0$

۲) اگر $v \to \infty \Rightarrow h(v) \to \infty$ و اگر $v \to -\infty \Rightarrow h(v) \to -\infty$

طبق قانون K.C.L در گره مدار داریم:

$$i_C + i_L + i = 0$$

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v dt + h(v) = 0$$

۳) $LC\dfrac{d^2v}{dL^2} + v + Lh'(v) = 0$

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{L_C}}t \Rightarrow d\tau = \frac{1}{\sqrt{L_C}}.dt$$

۴) $\dfrac{d^2v}{d\tau^2} + v + \varepsilon\dfrac{dh(v)}{dv}\times\dfrac{dv}{dt} = 0$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

معادله (۴) یک حالت خاص از معادله Liénard است که میتوان آن را به فرم زیر نوشت

$$\ddot{v} + f(v)\dot{v} + g(v) = 0$$

که در آن $\quad f(v) = \varepsilon\dfrac{dh(v)}{dv} \quad , \quad v = g(v)$

باتوجه به منحنی تغییرات مقاومت کنترل شده؛ ولتاژ میتوان گفت که در نتیجه

$$h(v) = -v + \frac{1}{3}v^3$$

که در نتیجه $\quad h'(v) = -1 + v^2$

$$\ddot{v} - \varepsilon(1-v^2)\dot{v} + v = 0$$

معادله دیفرانسیل غیرخطی فوق به معادله vanderpol معروف است.

میتوان معادله (۴) را در فرم فضای حالت زیر نیز نشان داد چنانچه تعریف کنیم

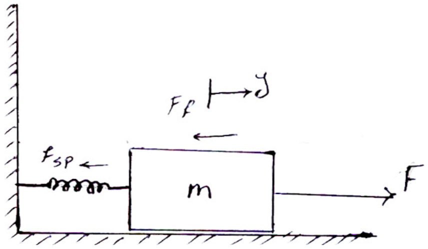
$$x_1 = v \quad , \quad x_2 = \dot{v}$$

بنابراین خواهیم داشت
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - \varepsilon h'(x_1) x_2 \end{cases}$$

مثال ۳- سیستم جرم و فنر

به شکل مقابل توجه کنید

طبق قانون دوم نیوتن داریم



$$\sum F = ma$$
$$F - F_{sp} - F_f = m\ddot{y} \qquad (5)$$

با فرض جابجایی کوچک	$F_{sp} = g(y)$ $g(0) = 0$

جابجایی بزرگ y	۱) $g(y) = k(1 - a^2y^2)y$ فنر نرم , $\lvert ay \rvert < 1$ ۲) $g(y) = k(1 + a^2y^2)y$ فنر سخت

برای مدل کردن نیروی F_f نیز به دو شکل میتوان بحث کرد.

الف) اگر F_f ناشی از اصطکاک ویسکوزیته باشد آنگاه این نیرو تابعی از سرعت خواهد بود یعنی

$$F_f = h(\dot{y}) \quad , \quad h(0) = 0$$

برای سرعت های کم میتوان نوشت $F_f = C\dot{y}$

اگر ورودی سینوسی باشد $\boxed{m\ddot{y} + C\dot{y} + k(y + a^2y^3) = A\cos\omega t}$

اصطلاحاً ساختار فوق به عنوان یک نمونه کلاسیک از مطالعه سیستمهای غیرخطی همراه با تابع تحریک پریودیک معروف است.

ب) اگر F_f ناشی از اصطکاک کولمبی باشد.

وقتی جسم در حال سکون باشد، یک نیروی اصطکاک استاتیک بنام F_s و دقیقاً موازی با سطح حرکت جرم، به جسم اعمال می گردد که برابر با $\pm\mu_s mg$ $(0 < \mu_s < 1)$ تعریف می گردد. μ_s ضریب اصطکاک استاتیک نامیده می شود.

قاعدتا برای ایجاد حرکت بایستی نیروی عامل F بایستی بر Fs غلبه نماید. حال اگر فرض کنیم که F برابر صفر باشد پس برای آنکه جسم حرکت نکند باید نیروی ناشی از فنر کوچکتر از نیروی اصطکاک باشد

یعنی $|g(y) \le \mu_S mg|$. به محض برقراری حرکت ، نیروی اصطکاک استاتیک حذف شده و نیـروی دیگـری بنام نیروی اصطکاک لغزشی (slipping friction) ظاهر می گردد. اندازه این نیرو برابر $\mu_K mg$ بـوده کـه در برابر حرکت جسم ایجاد مزاحمت می کند. μ_K ضریب اصطکاک جنبشی نامیده می شود.

بنابراین نیروی اصطکاک کولمبی به صورت مدل ریاضی زیر پیشنهاد می گردد.

$$Ff = \begin{cases} -\mu_K mg & \text{اگر} \quad \dot{y} < 0 \\ F_S & \text{اگر} \quad \dot{y} = 0 \\ \mu_K mg & \text{اگر} \quad \dot{y} > 0 \end{cases}$$

برای سادگی بحث اگر فـرض کنـیم کـه F مـساوی صـفر باشـد، لـذا معادلـه دیفرانـسیل حـاکم بـر یـستم برای یک فنر خطی و همراه با اصطکاک و سیکوزیته و اصطکاک کولمبی به قرار زیر خواهد بود.

$$(6) \qquad m\ddot{y} + ky + c\dot{y} + \eta(y,\dot{y}) = 0$$

که داریم

$$\eta(y,\dot{y}) = \begin{cases} \mu_k mgSign(\dot{y}) & \text{اگر} \quad |\dot{y}| > 0 \\ -Ky & \text{اگر} \quad \dot{y} = 0 \;, \; |y| \le \mu_S mg / K \\ -\mu_S mgSign(\dot{y}) & \text{اگر} \quad \dot{y} = 0 \;, \; |y| > \mu_S mg / K \end{cases}$$

مقــدار تــابع $\eta(y,\dot{y})$ بــازاء $\dot{y} = 0$ و $|y| \le \mu_S mg / K$ بــا قــرار دادن صــفر در معادلــه (۶) بــه جــای $\dot{y}$ و $\ddot{y}$ بدست خواهد آمد. که در حقیقت معرف نقطه تعادل سیستم نیز می باشد.

جهت نمایش فضای حالت سیستم اگر تعریف کنیم.

$$x_1 = y \quad , \quad x_2 = \dot{y}$$

خواهیم داشت

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 - \frac{1}{m}\eta(x_1,x_2)$$

که کاملاً غیرخطی است

$$(6) \qquad m\ddot{y} + ky + c\dot{y} + \eta(y,\dot{y}) = 0$$

که داریم

$$\eta(y,\dot{y})=\begin{cases}\mu_k mgSign(\dot{y}) & \text{اگر} \quad |\dot{y}|>0\\ -Ky & \text{اگر} \quad \dot{y}=0 \quad , \quad |y|\le \mu_S mg/K\\ -\mu_S mgSign(\dot{y}) & \text{اگر} \quad \dot{y}=0 \quad , \quad |y|>\mu_S mg/K\end{cases}$$

مقدار تابع $\eta(y,\dot{y})$ بازاء $\dot{y}=0$ و $|y|\le \mu_S mg/K$ با قرار دادن صفر در معادله (۶) به جای $\dot{y}$ و $\ddot{y}$ بدست خواهد آمد. که در حقیقت معرف نقطه تعادل سیستم نیز می باشد.

جهت نمایش فضای حالت سیستم اگر تعریف کنیم.

$$x_1=y \quad , \quad x_2=\dot{y}$$

خواهیم داشت

$$\dot{x}_1=x_2$$

$$\dot{x}_2=-\frac{k}{m}x_1-\frac{c}{m}x_2-\frac{1}{m}\eta(x_1,x_2)$$

که کاملاً غیرخطی است

معرفی تعدادی از رفتارهای مشترک سیستم های غیرخطی

۱) نقاط تعادل چندگانه

یک مثال ساده: سیستم مرتبه اول

اگر معادله دیفرانسیل سیستم به شکل $\dot{x}=-x+x^2$ باشد

با شرط اولیه $x(0)=x_0$

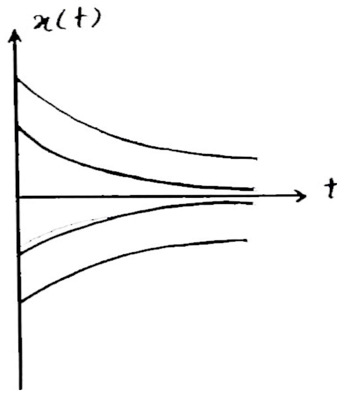
با خطی سازی حول نقطه صفر (x=0) $\dot{x}=-x$

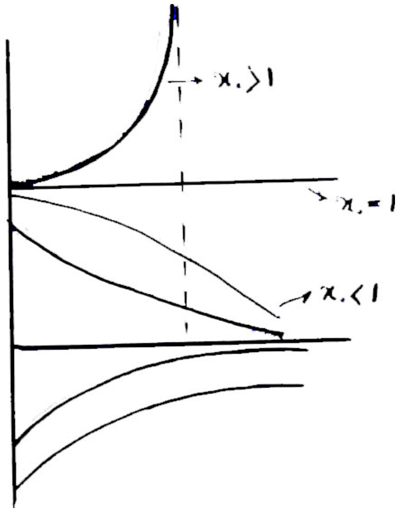
جواب معادله $x(t)=x_0e^{-t}$

منحنی پاسخ $x(t)$ در شکل روبرو ترسیم شده است.

پاسخ واقعی سیستم غیر خطی عبارت است از :

$$x(t)=\frac{x_0e^{-t}}{1-x_0+x_0e^{-t}}$$





سیستمهای غیرخطی میتوانند بسته به مقدار شرایط اولیه وضعیت پایدار یا ناپایدار داشته باشند.

در شرایط پایدار، مقدار $x(t)$ یا صفر است یا یک. اصطلاحاً به این دو نقطه، نقاط تعادل سیستم می گوئیم.

به منحنی های روبرو که نماینگر پاسخ واقعی سیستم هستند ، دقت کنید:

معرفی سیکل های حدی limit cycles

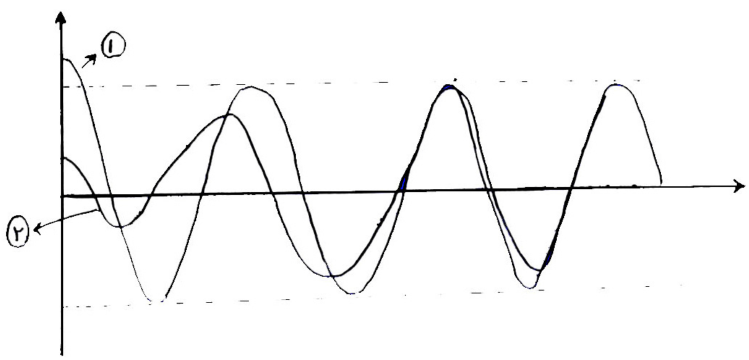
سیستمهای غیرخطی می توانند بدون تحریک خارجی، نوسان هایی با دامنه و فرکانس ثابت را در خروجی خود ظاهر کنند به این نوسانات اصطلاحاً سیکل های حدی و یا نوسانات خود تحریک می گویند.

معادله vander pol نمونه ای از سیستمهای دارای سیکل حدی می باشد.

بررسی مجدد سیستم جرم فرضی $m\ddot{x} + 2c(x^2 - 1)\dot{x} + kx = 0$

و ضریب اصطکاک ویسکوزیته یعنی $x^2 - 1$ تابعی از موقعیت جرم است.

منحنی تغییرات x بازاء مقادیر اولیه متفاوت



$x(t)$ نه هرگز به سمت بی نهایت محدود و نه هرگز صفر می شود در این حالت می گوئیم که اصطلاحاً یک سیکل حدی با آزاد کردن انرژی به محیط و دریافت انرژی از آن برقرار شده است.

باید توجه داشت که نوسانات پایدار در سیستم های خطی نیز میتواند بوجود آید، در صورتی که سیستم دارای پایداری مرزی باشد (سیستم جرم و صفر بدون عامل میرا کننده)

اما سیکل های حدی از سیستم های غیرخطی، با نوسانات بوجود آمده در سیستم های خطی متفاوتند که دو مورد تفاوت زیر را میتوان نام برد:

۱) دامنه نوسانات در سیکل های حدی با شرایط اولیه سیستم هیچ وابستگی ندارد. با آنکه در سیستم های خطی دقیقاً این وابستگی وجود دارد.

۲) وقتی یک سیستم خطی در مرز پایداری به سر برد آنگاه کوچکترین تغییر در پارامترهای سیستم میتواند منجر به عدم پایداری سیستم گردد با آنکه سیکل های حدیِ سیستم های غیرخطی، به این سادگی تحت تأثیر تغییر پارامترهای سیستم نخواهند بود.

معرفی Bifurcations (دو شاخه ای شدن)

چنانچه پارامترهای دینامیکی سیستم غیرخطی تغییر کنند، آنگاه وضعیت پایداری نقطه تعادل سیستم و حتی تعداد نقاط تعادل سیستم نیز می تواند متغیر باشد. اصطلاحاً مقادیری از این پارامترهای دینامیکی که موجب تغییر در رفتار کیفی حرکت سیستم (خروجی سیستم) می گردد به عنوان مقادیر بحرانی یا Bifurcation نامیده می شوند.

معادله دیفرانسیل زیر را که مربوط به یک سیستم غیرخطی است مورد بررسی قرار می دهیم

$$\ddot{x} + \alpha x + x^3 = 0$$

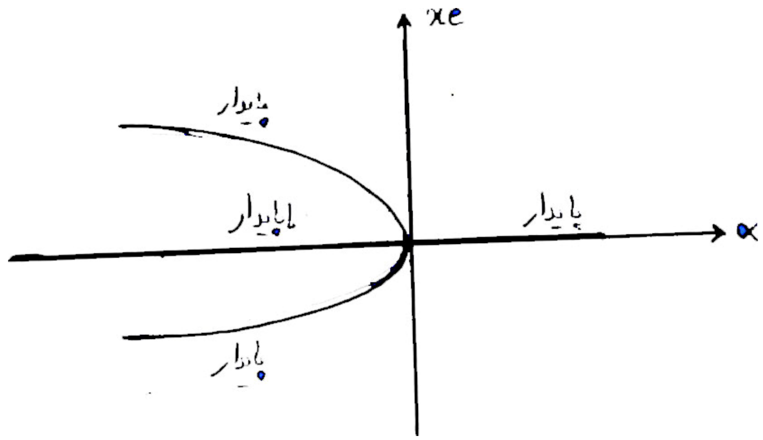
این معادله به معادله Duffing نامیرا (undamped) معروف است. α پارامتری از سیستم است که میتواند به هر دلیل تغییر کند.

جهت تعیین نقاط تعادل

$$0 + \alpha x + x^3 = 0$$
$$\rightarrow x(x^2 + \alpha) = 0$$
$$\rightarrow x_e = 0 \quad , \quad x_e = \pm\sqrt{-\alpha}$$

اگر α مثبت باشد تنها نقطه تعادل $x_e = 0$ است.

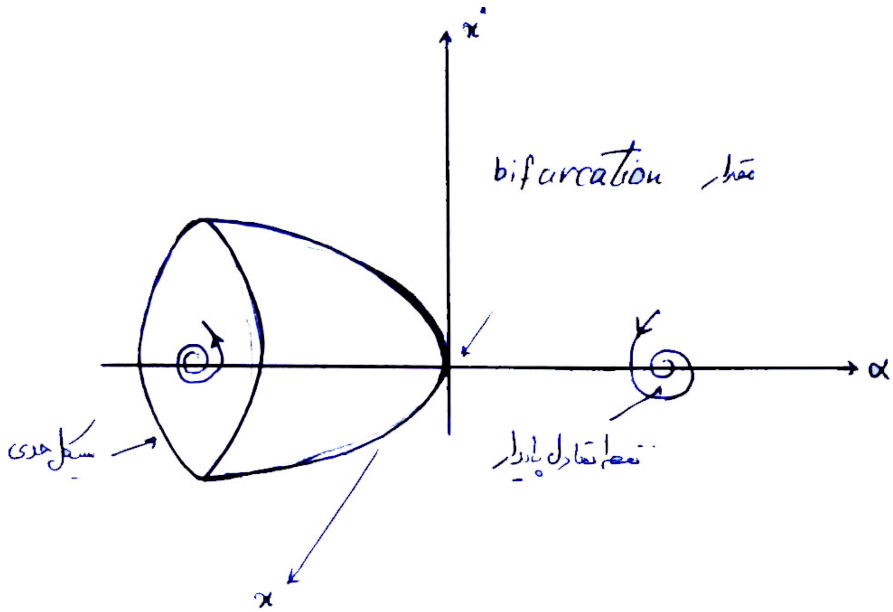
مطابق شکل زیر اگر α از مقادیر مثبت به سمت مقادیر منفی جابجا شود آنگاه تنها نقطه تعادل $x_e = 0$ دقیقاً در هنگام تغییر از مقادیر مثبت به منفی به ۳ نقطه تعادل شکسته می شد $(x_e = 0, \sqrt{-\alpha}, -\sqrt{-\alpha})$ این شکل منفی تغییرات x_e را برحسب α نشان میدهد.



بنابراین $\alpha = 0$ یک مقدار بحرانی Bifurcation برای سیستمی با معادله دیفرانسیل Duffing تلقی می شود.

نقطه تعادل $x_e = 0$ به ازاء αهای منفی بعنوان نقطه تعادل ناپایدار معرفی شده است.

با شبیه سازی معادله دیفرانسیل Duffing و معرفی متغیرهای حالت x و $\dot{x}$، متغیر حالت سیستم بازاء تغییرات α مطابق شکل زیر می باشد.



اگر α منفی باشد آنگاه سیستم بازاء هر شرط اولیه ای برای x و $\dot{x}$ می تواند به سمت یک شکل حدی حرکت کند و x و $\dot{x}$ بین دو مقدار مشخص نوسان کنند.

که البته بسته به مقدار α این شکل حدی با دامنه متفاوت رخ می دهد. به همین دلیل است که نمیتوان نقطه $x_e = 0$ را بازاء αهای منفی یک نقطه تعادل پایدار نامید.

معرفی chaos

در سیستم های خطی تغییرات کوچک و شرایط اولیه موجب بروز تغییرات کوچک در خروجی خواهد شد. اما در سیستم های غیرخطی میتوان به ازاء تغییرات کوچک در شرائط اولیه پایداری بنام chaos را شاهد بو که طی آن خروجی سیستم نسبت به تغییرات کوچک در شرائط اولیه بسیار مساوی است.

ویژگی مهم chaos غیرفایل پیش بینی بودن خروجی سیستم است به گونه ای که اگر حتی ما یک مدل واقعی از عملکرد سیستم غیرخطی و یک کامپیوتر بسیار دقیق داشته باشیم، نمیتوان پاسخ سیستم را در یک بازه زمانی طولانی پیش بینی کرد.

در حرکات chaotic (وضعیت)، نحوه ارتباط بین ورودی و خروجی سیستم کاملاً واضح و مشخص است و تنها عدم قطعیت های کوچکی در مدل سیستم ورودی و یا شرایط اولیه وجود دارد.

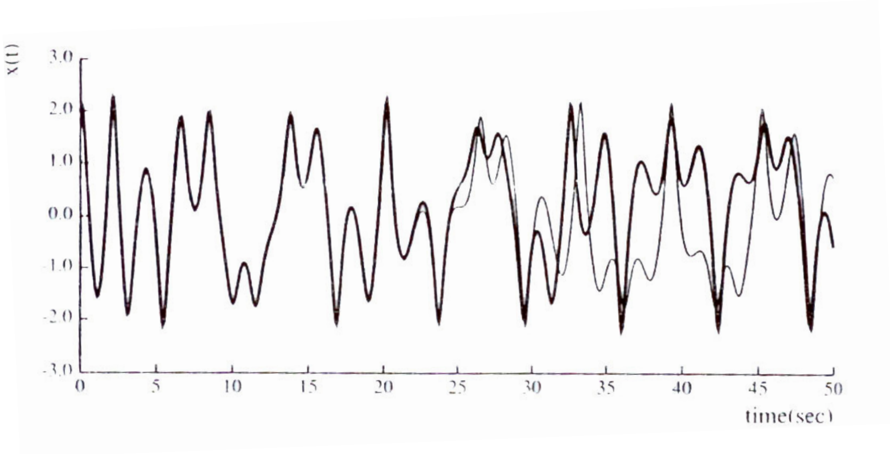
بعنوان مثال به سیستم غیرخطی زیر توجه کنید

$$\ddot{x} + 0.1\dot{x} + x^5 = 6\sin t$$

اگر $x(0) = 2$ و $\dot{x}(0) = 3$ منحنی نازک تر اگر $x(0) = 2.01$ و $\dot{x}(0) = 3.01$ باشد منحنی ضخیم تر پاسخ سیستم خواهد بود که ملاحظه می شود پس از یک بازه زمانی طولانی کاملاً با هم متفاوت می شوند.

علت اصلی این پدیده، حضور عامل شدیداً غیرخطی x^5 در معادله دیفرانسیل سیستم است.

پدیده chaotic در بسیاری از پدیده های فیزیکی قابل رؤیت است.

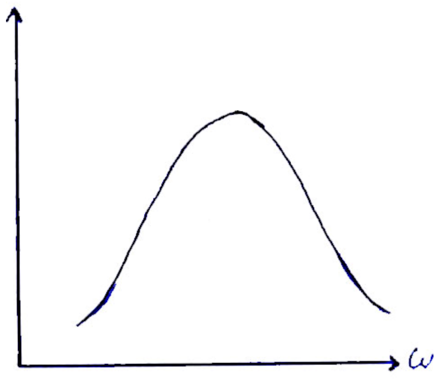


بعنوان نمونه میتوان عبور سیال در خط لوله با وضعیت آشفته (turbulence) و با حرکت حلزونی دور خارج شده از یک عود معطر را نام برد.

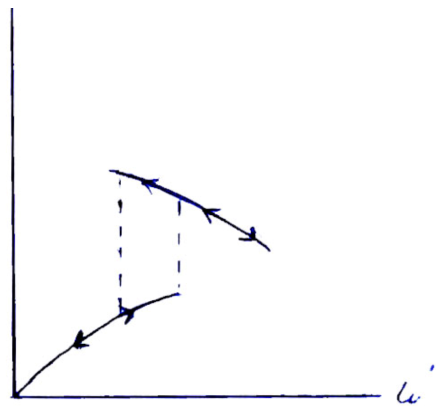
یا آنکه در سیستم های خطی بازاء ورودی سینوسی به خروجی حتماً سینوسی و با همان فرکانس ورودی خواهد بود اما در سیستم های غیرخطی، ورودی سینوسی، خروجی سینوسی، فرکانس های متفاوت از ورودی و همچنین خروجی هایی با رفتار chaotic را بروز می دهد.

معرفی Jump resonance

اگر یک فیلتر B.P را در نظر گیریم که مثلاً با OP-AMP ساخته شده باشد. چنانچه OP-AMP به اشباع نرود منحنی پاسخ فرکانسی آن مطابق شکل «الف» و چنانچه OP-AMP به اشباع رود منحنی پاسخ فرکانسی آن مطابق شکل «ب» خواهد بود که اصطلاحاً به آن Jump resonance می گویند.



الف


ب

پدیده غیرخطی شکل «ب» را به هیچ وجه نمی توان با یک سیستم خطی مدل کرد.

چگونگی مدل سازی سیستمهای غیرخطی

۱) استفاده از فضای حالت غیرخطی

هرگاه داشته باشیم

$$\dot{x} = f(x, u, t)$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_3 \end{pmatrix} \quad , \quad f = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix}$$ بردار توابع غیرخطی

۲) نمایش فضای حالت از روی معادله دیفرانسیل غیرخطی

$$\frac{d^n y}{dt^n} = h[t, y, \dot{y}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}, u, \dot{u}, \ldots]$$

$$\begin{matrix} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} = \dot{x}_1 \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} = \dot{x}_{n-1} \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \\ h(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \dot{u}, \ldots) \end{pmatrix}$$

سؤال

الف) آیا میتوان مجموعه معادلات فوق را حل کرد یعنی پاسخی برای $x(t)$ داشت

ب) آیا $x(t)$ منحصر بفرد است

ج) حل $x(t)$ در چه ناحیه ای قابل قبول است

مثال ۱

$$\dot{x} = \operatorname{sgn}(x)$$

این معادله در محدوده خاصی جواب با مشتق پیوسته ندارد.

مثال ۲

$$\dot{x} = \frac{1}{2x}$$

$x=+\sqrt{t}\quad,\quad x=-\sqrt{t}$ پاسخهای معادله

بنابراین معادله دیفرانسیل حل منحصر به فرد ندارد

مثال ۳

$\dot{x}=1+x^2$

برای حل این معادله تعریف نقطه تعادل الزامی است

نقاط تعادل: نقاطی است که در آن سیستم به شرایط ماندگار رسیده و در نتیجه تغییرات متغیرهای حالت صفر است.

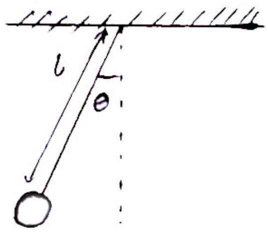
$$\dot{x}=f(x,u,t)\ \overset{\text{نقاط تعادل}}{\Rightarrow}\ f(x,u,t)=0$$

و چون u معلوم است $\leftarrow\ f(x,t)=0$

سیستم غیرخطی متغیر با زمان $\dot{x}=f(x,u,t)$ در زمان t_0 دارای بردار x_0 به عنوان نقطه تعادل است.

اگر $f(x_0,t)=0\ \ \forall t\ge t_0$

مثال:



معادله دیفرانسیل حاکم بر میزان جابجایی θ به صورت زیر است.

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$$

اگر تعریف کنیم

$$\begin{array}{l}x_1=\theta\\ x_2=\dot{\theta}\Rightarrow \dot{x}_1=x_2\end{array}\Rightarrow\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\ \underbrace{-\frac{g}{l}\sin x_2}_{f(x,t)}\end{pmatrix}$$

$$f(x,t)\equiv 0\Rightarrow\begin{pmatrix}x_2\\ -\frac{g}{l}\sin x_1\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\rightarrow x_2=0\quad,\quad -\frac{g}{l}\sin x_1=0\rightarrow x_1=k\pi$$

در حالت کلی سیستم های غیرخطی نقاط تعادل زیادی دارند که باید در مورد پایـداری و ناپایـداری آنهـا بحث شود.

تعریف نقطه تعادلی ایزوله

x_0 نقطه تعادلی ایزوله است اگر در ε همسایگی x_0 نقطه تعادل دیگری نباشد.

نکته: در سیستم خطی $\dot{x} = Ax$ اگر A ریشه کامل داشته باشد، $x = 0$ تنها نقطه تعادلی سیستم است و بنابراین ایزوله می باشد.

و اگر A دارای ریشه کامل نباشد برای معادله بی نهایت جواب داریم.

نقطه تعادل : $$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}_{A} x = 0 \Rightarrow \underbrace{x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \ , \quad x = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\text{دو نقطه تعادل}}$$

ریشه ماتریس A کامل نیست چرا که

$$|A| = (1\times 4) - (2\times 2) = 0$$

پایداری نقطه تعادل

در سیستمهای غیرخطی تعادل و پایداری تعریف متفاوتی نـسبت بـه سیـستم هـای خطـی دارد، در ایـن سیستمها وضعیت پایداری در دو وضعیت

۱- شرائط اولیه

۲- ورودی

بصورت متفاوت تحلیل می شود و برخلاف سیستمهای خطی نمیتوان در این مورد یک نظریه کلـی ارائـه داد.

خطی کردن حول نقطه تعادل

به سیستم غیرخطی مرتبه ۲ مقابل دقت کنید

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \quad f_1(0,0) = 0$$
$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \text{'} f_2(0,0) = 0$$

و فرض کنید مبداء نقطه تعادل سیستم غیرخطی موجود باشد.

اگر فرض کنیم متغیرهای حالت سیستم حول نقطه کار تغییرات کوچکی داشته باشند.

لذا باتوجه به بسط تیلور میتوان نوشت

$$f_1(X_1,X_2)=\frac{\partial f_1}{\partial X_1}\bigg|_{X=0}x_1+\frac{\partial f_1}{\partial X_2}\bigg|_{X=0}x_1+f_1(0,0)+f_1^*(X_1,X_2)$$

$$f_2(X_1,X_2)=\frac{\partial f_2}{\partial X_1}\bigg|_{X=0}x_1+\frac{\partial f_2}{\partial X_2}\bigg|_{X=0}x_1+f_2(0,0)+f_2^*(X_1,X_2)$$

در عبارات فوق $X=0\equiv\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ نقطه تعادل

تغییرات کوچک X_1 حول مبداء $= x_1$

تغییرات کوچک X_2 حول مبداء $= x_2$

بنابراین روابط f_1 و f_2 به شکل زیر درخواهد آمد

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{pmatrix}=\left.\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{pmatrix}\right|_{x=0}\begin{pmatrix}x_1\\x\end{pmatrix}$$

نکته: باید دقت داشت که اگر تابع غیرخطی f پیوسته باشد میتوان نقطه تعادل را به مبداء انتقال داد.

برای یک سیستم خطی مرتبه ۲ فرض کنید که $\hat{x}_1$ و $\hat{x}_2$ نقطه تعادل باشند.

$$\begin{matrix}\dot{x}_1=f_1(x_1x_2)\\\dot{x}_2=f_2(x_1x_2)\end{matrix}\Rightarrow f_i(\hat{x}_1,\hat{x}_2)=0 \qquad i=1,2$$

داریم $\quad x_1=\hat{x}_1+x_1 \quad , \quad x_2=\hat{x}_2+x_2$

$$\Rightarrow(\hat{x}_1+x_1)=f_1(\hat{x}_1+x_1,\hat{x}_2+x_2)=g_1(x_1,x_2)$$
$$\dot{x}_1=g_1(x_1,x_2)$$

$$,\quad(\hat{x}_2+x_2)=f_2(\hat{x}_1+x_1,\hat{x}_2+x_2)=g_2(x_1,x_2)$$
$$\dot{x}_2=g_2(x_1,x_2)$$

بنابراین تابع غیرخطی $f_i(x_1,x_2)$ با خطی سازی حول نقطه کار $\hat{x}_2$ و $\hat{x}_1$ به تـابع $g_i(x_1,x_2)$ تبـدیل گردید.

بخش اول

آنالیز سیستمهای غیرخطی

در این بخش هدف ارائه ابزاری متفاوت جهت آنالیز سیستمهای کنترل غیرخطی است

به چند دلیل آنالیز سیستمهای غیرخطی حائز اهمیت است

۱) آنالیز تئوری سیستم معمولاً نسبت به کنکاش در تعیین مشخصه های سیستم کم هزینه تر است

۲) چون شبیه سازی سیستم های غیرخطی بسیار مهم می باشد لذا باید آنالیز تئوریک سیتسم غیرخطی از قبل انجام شده باشد.

قاعدتاً شبیه سازی کورکورانه سیستم منجر به نتایج غیرواقعی از عملکرد سیستم خواهد شد و به همین دلیل آنالیز سیستم غیرخطی در شبیه سازی بسیار حائز اهمیت می باشد.

۳) طراحی کنترل کننده های سیستم غیرخطی شدیداً مبتنی بر اطلاع دقیق از نحوه عملکرد سیستم و یا به عبارتی آنالیز دقیق سیستم غیرخطی می باشد و طبیعتاً آنالیزهای غیرخطی غیردقیق منجربه طراحی کنترل کننده های ناکارآمد خواهد شد.

باتوجه به توضیح فوق آنالیز سیستمهای غیرخطی خیلی ساده نمی باشد در ادامه به معرفی مختصر سه روش آنالیز مختلف می پردازیم و در فصل های آتی به تفصیل در مورد آنها بحث خواهیم کرد

۱) آنالیز صفحه فاز (Phase Plane)

یک جواب تحلیلی برای معادله دیفرانسیل یابیم، به صورت گرافیکی پاسخ معادله را می یابیم نتیجه کار یک سری مسیرهای حرکتی از متغیرهای حالت سیستم در یک صفحه دوبعدی بنام صفحه فاز است که به ما اجازه مشاهده الگوهای حرکتی سیستم را می دهد.

تئوری لیاپانوف

تئوری اساسی لیاپانوف که توسط آقای لیاپانوف lyapunov ارائه شد شامل دو روش می باشد.

- **روش غیرمستقیم یا روش خطی سازی**

- **روش مستقیم**

روش اول بیان می دارد که خواص پایداری سیستم در مجاورت بسیار نزدیک نقطه تعادل سیستم الزاماً شبیه سیستم خطی تقریب زده شده ای است که در آن ناحیه کوچک رفتار سیستم غیرخطی را توصیف می کند.

روش دوم یا مستقیم یکی از ابزارهای بسیار قوی در آنالیز سیستمهای غیرخطی است. معمولاً هرگاه صحبت از روش لیاپانوف به میان می آید منظور همان روش مستقیم است.

این روش به گونه ای به مفهوم انرژی در یک سیستم مکانیکی مربوط می شود. چرا که در یک سیستم مکانیکی، اگر کل انرژی مکانیکی سیستم در کل زمان ها روند نزولی داشته باشد ، حرکت وضعیت پایداری را خواهد داشت.

ایده اصلی در این روش به منظور مطالعه پایداری سیستم غیرخطی، ساخت یک تابع اسکالر انرژی بنام تابع لیاپانوف برای سیستم بوده و اینکه ببینیم آیا این تابع روند نزولی دارد.

محدودیت اصلی در این روش یافتن تابع لیاپانوف است که برای هر سیستم غیر خطی کار ساده ای نیست.

توابع توصیف describing functions

این روش، یک تکنیک تقریبی جهت مطالعه سیستمهای غیرخطی است. ایده اصلی در این روش آن است که مؤلفه های غیرخطی در سیستم غیرخطی با مؤلفه های خطی معادل تقریب زده شود، و سپس روش های حوزه فرکانسی جهت آنالیز سیستم منتجه به کار رود.

یکی از ویژگی های این روش، تعیین سیکل های حدی موجود در سیستم غیرخطی است. ایـن روش هـم برای سیستمهای درجه پائین و هم درجه بالا کارآیی مناسـب را دارد و تکنیـک یـافتن تـابع توصـیف در آن کاملاً مشابه است.

فصل دوم

آنالیز صفحه فاز

آنالیز صفحه فاز یک روش گرافیکی جهت مطالعه سیستمهای مرتبه ۲ است که توسط Henri Poincare ابداع شد.

روش صفحه فاز خواص مفیدی دارد که عبارتند از

۱) **توصیف گرافیکی ارائه شده**، این قابلیت را به ما می دهد که بدون در دست داشتن پاسخ تحلیلی معادلات غیر خطی، نحوه عمل سیستم غیر خطی از حیث تغییر در متغیرهای حالت بازاء شرایط اولیه متفاوت را تصور کنیم.

۲)روش صفحه فاز مختص سیستم های غیر خطی با عوامل غیر خطی آرام Smooth نبوده و برای سیستم های غیر خطی با عوامل غیر خطی سخت نیز به خوبی کار می کند.

۳) بسیاری از سیستم های عملی کنترل، قابلیت تقریب زده شدن به سیستمهای درجه ۲ را دارند و به همین دلیل روش صفحه فاز در مورد آن ها نیز قابل اجرا است.

مفاهیم آنالیز صفحه فاز

به مجموعه معادلات حالت سیستم مرتبه ۲ نا متغییر با زمان (Autonomous) زیر توجه کنید.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \qquad \text{(۲-۱)} \qquad \textbf{سیستم Autonomous}$$

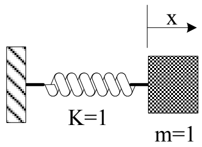
x_2, x_1 متغیر های حالت و f_2, f_1 توابع غیر خطی فضای حالت می باشند.

بطور هندسی، فضای حالت این سیستم صفحه ای است با محورهای مختصات x_2, x_1 که من بعد ما این صفحه را صفحه فاز (phase plane) می گوییم.

چنانچه تغییرات x_2 را بر حسب x_1 در زمان های مختلف بیابیم منحنی خاصی در صفحه $x_2 - x_1$ بدست می آید.

که اصطلاحاً به آن مسیر صفحه فاز (phase plane trajectory) می گویند . خانواده ای که از مسیرهای صفحه فاز مختلف به ازاء شرایط اولیه متفاوت بدست آمده اند را phase portrait می گویند.

مثال: **phase portrait سیستم جرم و فنر**



برای ساختار شکل روبرو معادله دیفرانسیل خطی زیر را داریم.

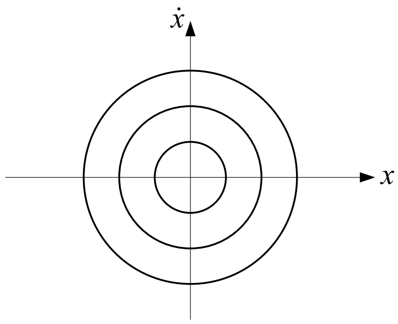
$$\ddot{x} + x = 0$$

فرض کنید که جرم m در حالت سکون و در موقعیت اولیه $x_{\circ}$ باشد که در این صورت جواب به صورت زیر خواهد بود .

$$x(t) = X_{\circ} \cos t$$
$$\Rightarrow \dot{x}(t) = -X_{\circ} \sin t$$

اگر x یک متغیر حالت و متغیر حالت دیگر $\dot{x}$ باشد از ترکیب دو معادله فوق داریم.

$$x^2 + \dot{x}^2 = x_{\circ}^2$$



که چنانچه x یک محور از مختصات و $\dot{x}$ محور دیگر باشد، منحنی توصیف کننده رابطه فوق، دایره ای به شعاع $x_{\circ}$ است . که هر دایره قاعدتاً مربوط به شرط اولیه ای بخصوص می باشد. مجموعه دوایر بدست آمده اصطلاحاً phase portrait سیستم جرم و فنر نامیده می شود.

ملاحظه می گردد که مسیر حالت های بدست آمده، نه هرگز به مبداء صفحه فاز و نه هرگز به بی نهایت میل نمی کنند و این بدان معنی است که سیستم همواره در وضعیت پایدار مرزی است. و دامنه نوسانات خروجی به مقدار شرایط اولیه سیستم وابسته است.

مفهوم نقاط منفرد (singular points)

یکی از مفاهیم اساسی در آنالیز صفحه فاز، نقطه منفرد است که در حقیقت همان نقطه تعادل سیستم تلقی می شود و به بیان دیگر نقطه ای از صفحه ای است که در آنجا خروجی سیستم مقدار ثابتی داشته و تغییرات آن صفر میباشد یعنی $\dot{x} = \circ$ بنابراین با توجه به دسته معادلات (۱-۲) داریم

$$f_1(x_1, x_2) = \circ \ , \ f_2(x_2, x_1) = \circ \qquad (2-2)$$

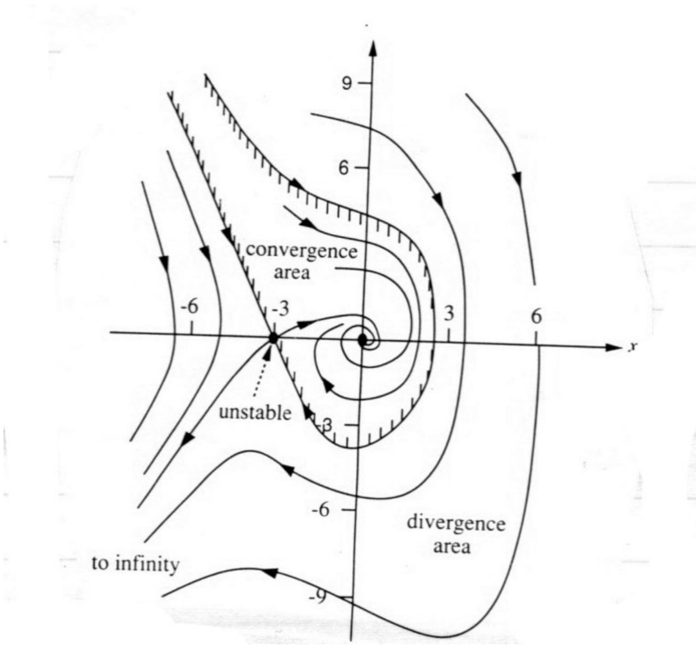
ازحل دو معادله فوق می توان نقاط تعادل را یافت.

برای یک سیستم خطی تنها یک نقطه منفرد وجود دارد اگر چه در بعضی از حالت ها میتوان مجموعه ای پیوسته از نقاط تعادل را برای یک سیستم خطی نیز داشت.

در یک سیستم غیر خطی اغلب بیش از یک نقطه تعادل وجود دارد.

$$\ddot{x} + \circ.6\dot{x} + 3x + x^2 = 0 \qquad (2-3)$$

نقاط تعادل عبارتند از : $(-3,0)$ و $(0,0)$



شکل مقابل phase portrait مربوطه را نشان می دهد.

لازم به ذکر است که جهت تعیین نقاط تعادل در معادله، ۳-۲ بجای $\dot{x}$ صفر قرار داده ایم لذا

$$\circ + \circ + 3x + x^2 = \circ \ \rightarrow \ x = \circ$$

یا $x = -3$

در ضمن شیب مسیر حالت در هر نقطه از صفحه که جزء جواب باشند عبارتست از: $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1,x_2)}{f_1(x_1,x_2)}$

اگر توابع f_2, f_1 توابع تک مقدار 0 (singular valued) باشند بنابراین برای هر شیب به ازاء هر نقطه تنها یک جواب داریم پس مسیرهای حالت نباید با هم برخوردی داشته باشند. در نقطه تعادل داریم $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\circ}{\circ}$ که قاعدتاً

نا مفهوم است.

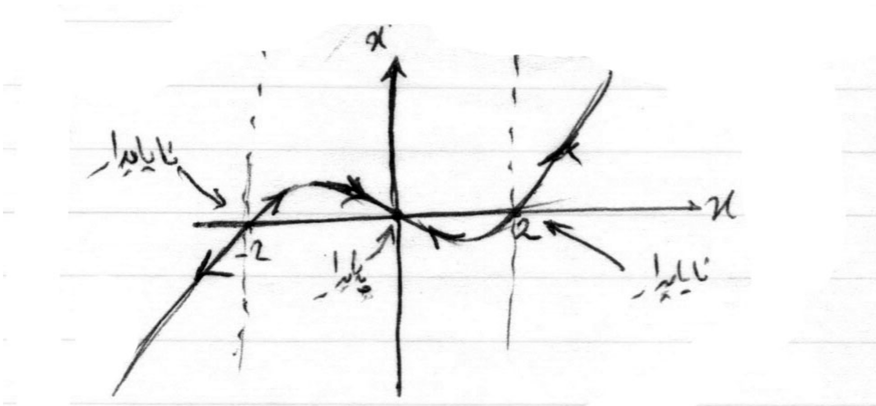
بدلیل نا مشخص بون شیب مسیر حالت در نقاط تعادل آنها را بعنوان نقطه منفرد (نقطه تکین) می نامیم.

پایداری سیستم های خطی منحصر به ماهیت نقطه منفرد آن می باشد.

مثال: در سیستم $\dot{x} = -4x + x^3$، phase portrait را ترسیم کنید.

نقاط منفرد :: $-4x + x^3 = \circ \;\rightarrow\; x = 0 \;,\;\; x = 2 \;\;,\;\; x = -2$

نمایش phase portrait در زیر ارائه شده است.



نحوه تولید phase portrait

روش های مختلف تولید phase portrait عبارتند از:

- روش تحلیلی Analytical
- روش isoclines
- روش delta
- روش Lienard
- روش pell

از روش تحلیلی جهت سیستم های خطی تکه ای (piece- wise linear) استفاده می شود.

از روش isocline در رابطه، با سیستمهائی که حل آنها به صورت تحلیلی مشکل است استفاده خواهد شد.

رسم مسیر حالت باروش تحلیلی

در این روش با حذف متغیر زمان و نمایش مجموعه معادلات حالت سیستم به فرم زیر، به دنبال پاسخ خواهیم بود.

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1,x_2)}{f_1(x_1,x_2)}$$

رسم مسیر حالت برای مثال جرم و فنر

$$\ddot{x} + x = 0$$

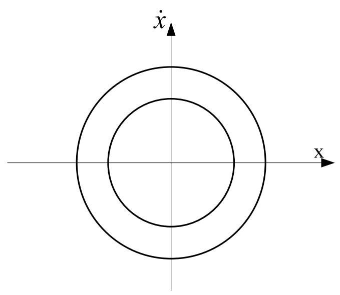
$$\ddot{x} = (d\dot{x}/dx)\,(dx/dt)$$

با تعریف جایگزینی آن در معادله اولیه سیستم داریم:

$$\dot{x}\,\frac{d\dot{x}}{dx} + x = 0$$

با انتگرال گیری از طرفین معادله داریم:

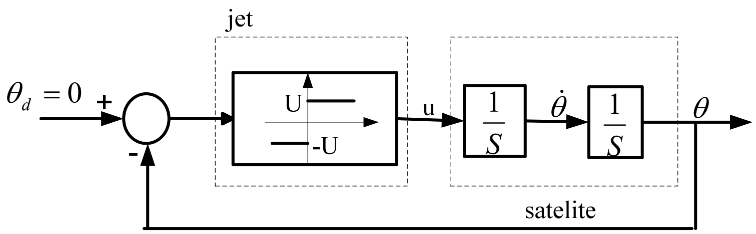
$$\dot{x}^2 + x^2 = x_0^2$$



که در نتیجه مسیر حالت دایره ای به شعاع x_0 (x_0 همان شرائط اولیه سیستم است) می باشد.

رسم مسیر حالت برای سیستم کنترل ماهواره

شکل مقابل بلوک دیاگرام یک سیستم کنترل ماهواره را نشان می دهد که موقعیت آن توسط دو جهت دهنده تعیین می گردد.

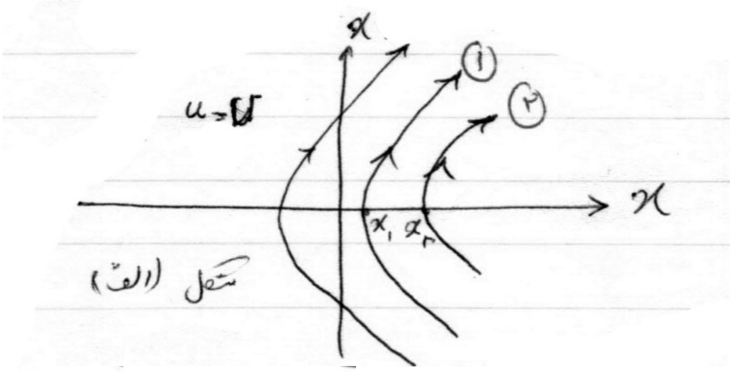


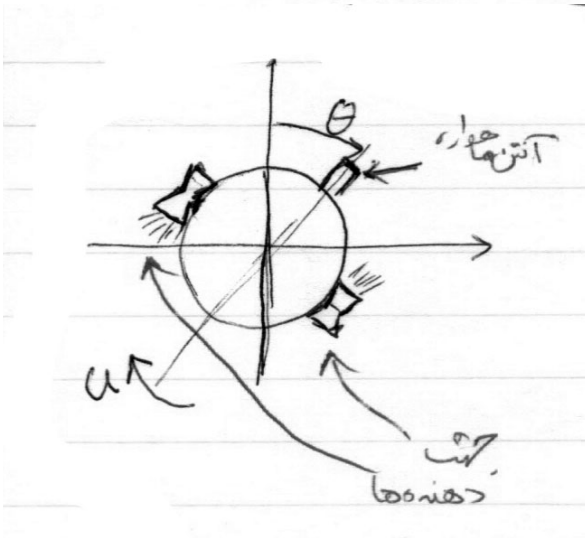
هدف سیستم کنترل $\theta d = 0$

$$u(t)=\begin{cases}-u & \theta > 0\\ u & \theta < 0\end{cases}$$

اگر $\ddot{\theta} = u \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}\,\dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta} = u \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = ud\,\theta$

سهمی های میسر حالت توسط معادله $\dot{\theta}^2 = 2u\theta + c_1$ تعیین می گردنـد و مـسیرهای حالـت مطـابق شـكل زیـر خواهند بود.

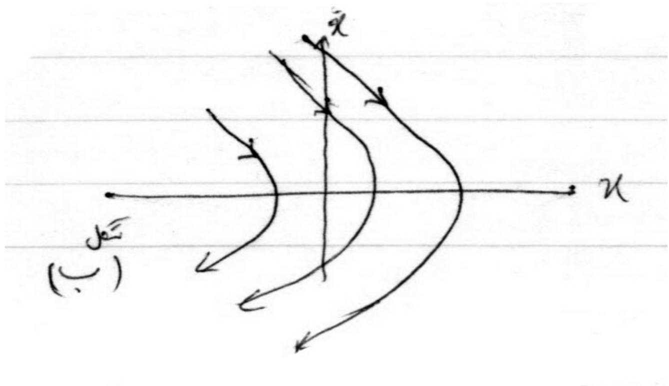




فرض كنید كه در $t = 0$, θ برابر x_1 و $\dot{\theta} = 0$. پس با اعمال $u = U$، x زیاد شده و $\ddot{x}$ نیز زیاد می شود. اگر $u = -u$ گردد جهت چرخش آنتن معكوس خواهد شد یعنی داریم

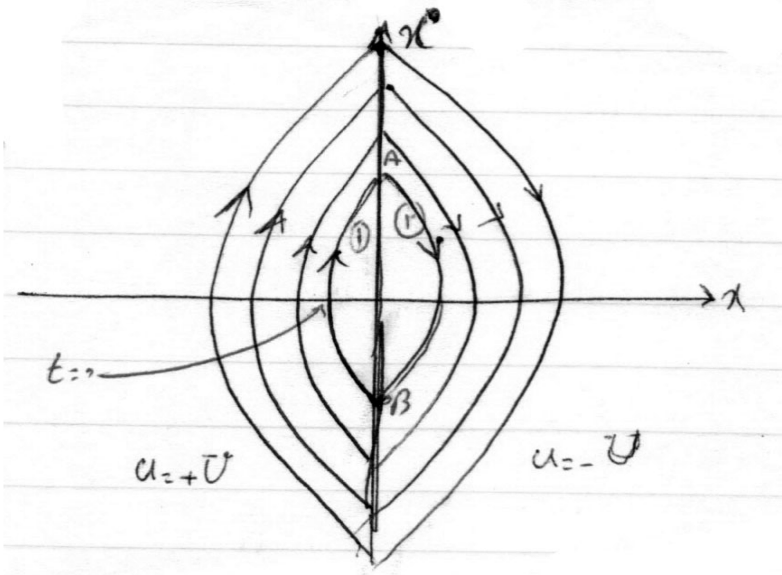
$$\dot{\theta}^2 = -2u\,\theta + c_1$$

و بنابراین phase portrait سیستم به شكل زیر خواهد شد



مسیرهای حالت به دست آمده قرینه شکل (الف) خواهند بود.

با تلفیق منحنی های شکل الف و ب، شکل زیر حاصل خواهد شد.



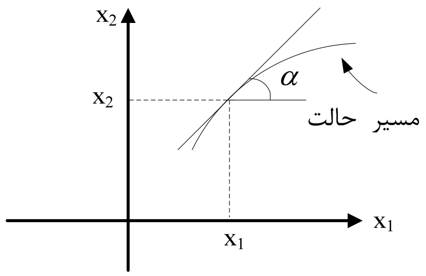
شکل فوق بیان می کند که اگر فرض شود در لحظه $t=0$، θ غیر صفر و منفی باشد (منحنی ۱) آنگاه طبق بلوک دیاگرام سیستم سیگنال خطا مثبت شده و لذا $u=+U$ خواهد شد پس، θ به سمت صفر میل می کند (نقطه A) . حال اگر θ مثبت شود چون سرعت مثبت است آنگاه سیگنال خطا منفی شده و لذا $u=-U$ خواهد بود (منحنی ۲) و موجب خواهد شد که θ روند صعودی داشته باشد تا اینکه در نهایت مجدداً θ مساوی صفر گردد (نقطه B) در این حالت اگر مجدداً θ قدری منفی شود پروسه فوق دوباره تکرار می گردد و این بدان معنی است که ماهواره یک حرکت پریودیک داشته و اصطلاحاً به نوسان می افتد. مطابق آنچه که در جرم و فنر داشتیم.

روش Isoclines

معادلات حالت غیر خطی سیستم

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$$



شیب مماس بر منحنی مسیر حالت در نقطه x_1 و x_2 از رابطه زیر تعیین می گردد.

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} = \alpha$$

اگر نسبت فوق را α بنامیم، آنگاه یک Isocline عبارت خواهد بود از مکان هندسی نقاطی که دارای یک شیب مشخص هستند. برای یک isocline با شیب α داریم

$$f_2(x_1, x_2) = \alpha f_1(x_1, x_2)$$

نقاط بر روی منحنی $f_2(x_1, x_2) = \alpha f_1(x_1, x_2)$ دارای شیب مشابه α هستند.

در روش Isocline، phase portrait سیستم در دو مرحله تعیین می گردد

- ✓ در مرحله اول مجموعه ای از جهت مماس ها بر روی مسیرهای حالت ترسیم می گردد.
- ✓ در مرحله دوم مسیرهای حالت از مجموعه جهت های به دست آمده تشکیل خواهد شد.

مثال جرم و فنر

اگر تعریف کنیم

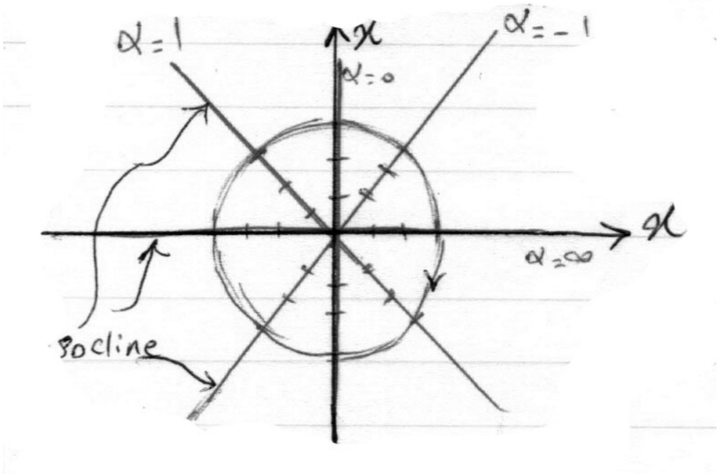
$$\ddot{x} + x = 0 \qquad \left.\begin{array}{l} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_1}{x_2}$$

بنابراین معادله Isocline به فرم زیر است.

$$x_1 + \alpha x_2 = 0$$

معادله یک خط راست در صفحه $x_2 - x_1$ با شیب $-1/\alpha$ است



۱- خطوط با شیب های مختلف طبق معادله $x_2 = -\frac{1}{\alpha}x_1$ ترسیم شده و پاره خط های کوچکی عمود بر آنها ترسیم می گردد که عملاً قسمت هایی از مسیر حالت هستند.

۲- مسیر حالت از هر نقطه ای در صفحه شروع شده و با متصل کردن پاره خط های کوچک متوالی بگونه ای که شیب لازم رعایت گردد ترسیم می شود.

مثال: با روش isocline ، مسیر حالت برای سیستم غیر خطی $\ddot{x} + 0.2\left(x^2 - 1\right)\dot{x} + x = 0$ را ترسیم کنید

حل: میتوان نوشت

$$x_1 = x$$
$$x_2 = \dot{x} \rightarrow \dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - 0.2\left(x_1^2 - 1\right)x_2$$

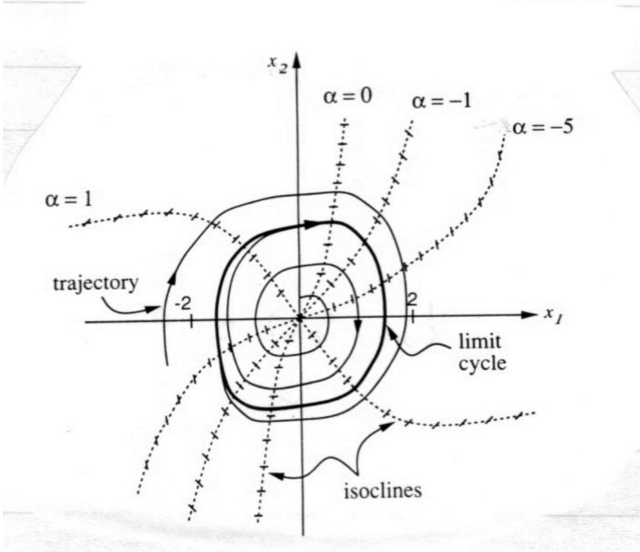
معادله isocline

$$\frac{\overset{\circ}{x}_2}{\overset{\circ}{x}_1} = \frac{-x_1 - 0.2\left(x_1^2 - 1\right)x_2}{x_2} = \alpha$$

بنابراین نقاط بر روی منحنی

$0.2(x_1^2-1)x_2+x_1+\alpha x_2=0$

دارای شیب مشابه α خواهند بود.



باید توجه داشت که به ازای هر نقطه ای از صفحه فاز که خارج یا داخل سیکل حدی باشد مسیر حالت به سمت سیکل حدی همگرا خواهد شد.

نکات مهم در رسم isoclines

۱) مقیاس محورهای x_1 و x_2 باید کاملاً مشابه باشد.

۲) در نواحی که مشتق $\frac{dx_2}{dx_1}$ خیلی شدید تغییر کند جهت رسم بهتر phase portrait الزاماً باید isocline بیشتری را ترسیم کرد.

آنالیز صفحه فاز سیستم های خطی

یک سیستم درجه ۲ را مورد مطالعه قرار می دهیم

فرم عمومی سیستم درجه ۲ خطی عبارت است از

$$\dot{x}_1 = ax_1 + bx_2 \qquad (a-1)$$
$$\dot{x}_2 = cx_1 + dx_2 \qquad (a-2)$$

با مشتق گیری از $(a-1)$ز و جایگزینی $(a-2)$ آن خواهیم داشت

از طرفی داریم:

$$\ddot{x}_1 = a\dot{x}_1 + b\dot{x}_2 \qquad (a-3)$$
$$b\dot{x}_2 = bcx_1 + d(\dot{x}_1 - ax_1) \qquad (a-4)$$

بنابراین رابطه $(a-3)$ با کمک رابطه $(a-4)$ به فرم زیر در خواهد آمد

$$\ddot{x}_1 - (a+b)\dot{x}_1 + (ad-bc)x_1 = \circ$$

ساختار فوق یک معادله دیفرانسیل درجه ۲ در فرم همگن را نشان می دهد که ریشه های معادله مشخصه آن عبارتند از

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d \ \pm\ \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}$$

حالت اول λ_2,λ_1 هر دو حقیقی و هم علامت باشند

فرض کنید داریم

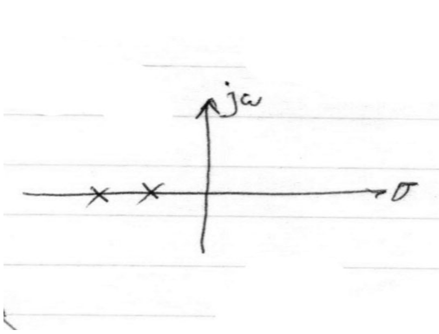
$$\dot{x}_1 = \lambda_1 \ x_1$$
$$\dot{x}_2 = \lambda_2 \ x_2$$

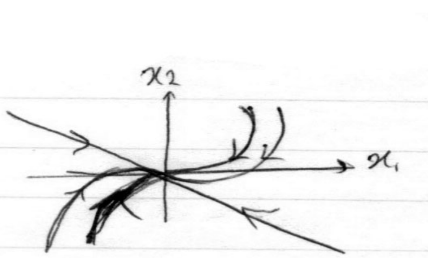
$$x_1(t) = x_{10}\ e^{\lambda_1 t} \quad , \quad x_2(t) = x_{20}\ e^{\lambda_2 t} \qquad *$$

با حذف t از مجموعه فوق داریم

$$x_2 = x_{20}\left(\frac{x_1}{x_{10}}\right)e^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

۱) اگر λ_2,λ_1هر دو منفی باشند، طبق مجموعه روابط * x_2,x_1 هر دو با گذشت زمان کوچک شده و به سمت صفر میل می کنند

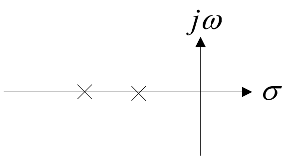


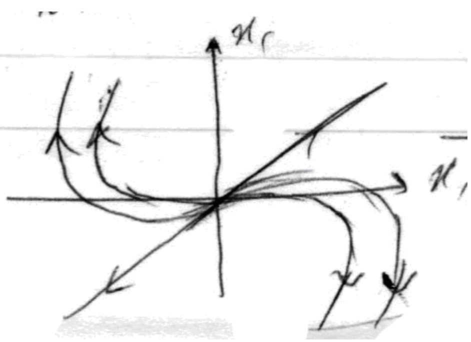


نوع مسیر در شکل سمت راست بستگی به مقدار عددی λ_1 و λ_2 دارد

در این حالت اصطلاحاً می گوییم یک گره پایدار بوجود آمده است (stable node)

۳) اگر λ_2,λ_1 هر دو مثبت باشند آنگاه طبق روابط ⁕، x_2,x_1 با گذشت زمان به سمت بی نهایت میل خواهند کرد.

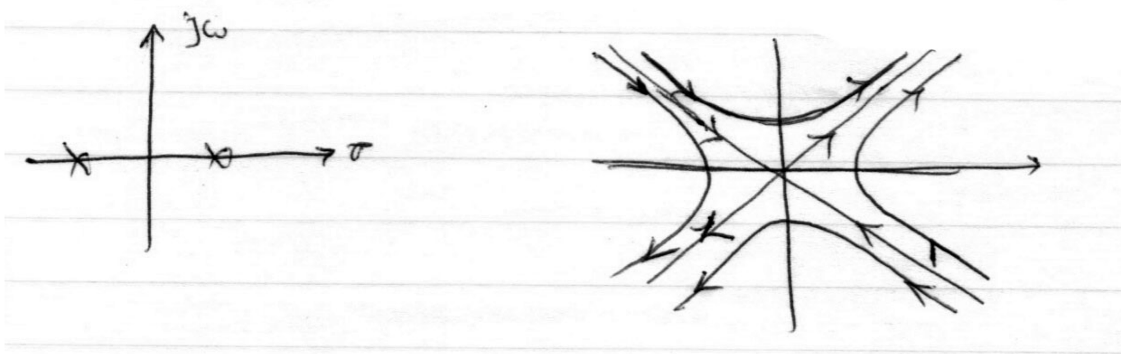




در این حالت اصطلاحاً می گوییم یک گره ناپایدار به وجود آمده است.

(حالت دوم) λ_2,λ_1 هر دو حقیقی و مختلف العلامه باشد

این حالت را که اصطلاحاً نقطه زین اسبی (saddle point) می گوییم در شکل زیر نشان داده شده است.



به خاطر منفی بودن یکی از مقادیر مشخصه، تقریباً تمامی مسیرهای حالت به سمت بی نهایت واگرا می شوند.

تمرین: phase portrate سیستم ⁕ را در و ضعیتی که $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ است را برای یک مثال نمونه ترسیم کنید.

(یکبار با $\lambda>0$ و یکبار با $\lambda<0$ بحث کنید.)

حالت سوم) مقادیر مشخصه مختلط باشند

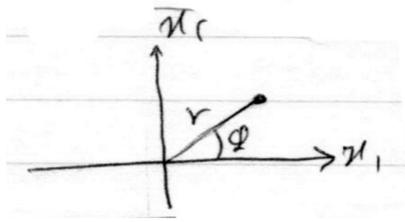
۱) جزء حقیقی مقداری منفی است

در این حالت اگر فرض شود مجموعه معادلات حالت سیستم بدین صورت باشد به گونه ای که حتماً مقادیر ویژه مختلط به دست آید.

$$\dot{x}_1 = \alpha x_1 + \beta x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\beta x_1 + \alpha x_2$$

آنگاه اگر نمایش فضای حالت را در فرم قطبی ارائه کنیم (با تبدیلات زیر)

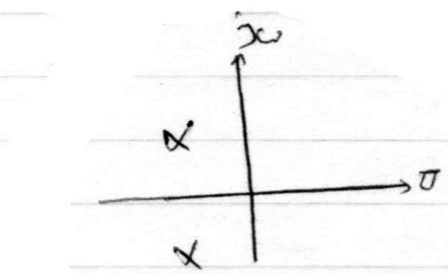
$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$
$$\varphi = tg^{-1}\ \frac{x_2}{x_1}$$

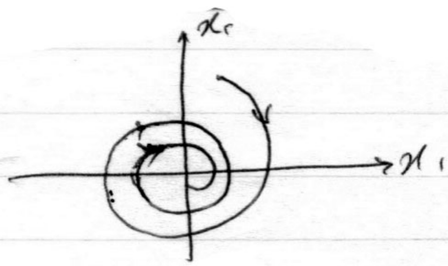


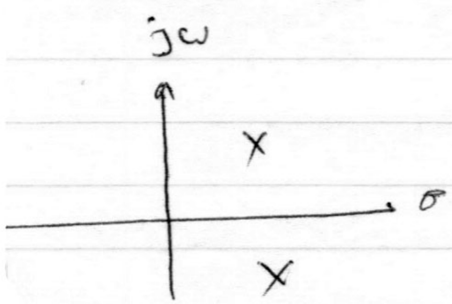
با مشتق گیری از معادلات فوق داریم.

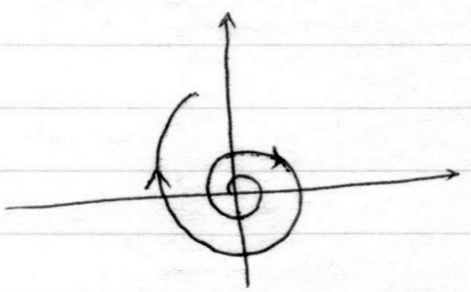
$$\dot{r} = \alpha\, r(t)$$
$$\dot{\varphi} = -\beta$$

بسته به علامت α یکی از دو وضعیت زیر پدید می آید.



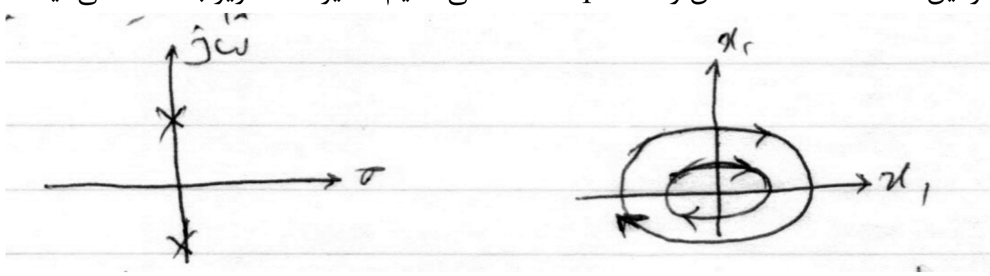






حالت خاص $\alpha = 0$

در این حالت که اصطلاحاً آن را center point می نامیم مسیر حالت زیر به دست می آید



در این حالت نقطه منفرد سیستم مرکز بیضی های به وجود آمده است

باید توجه داشت که مشخصه پایداری سیستم های خطی منحصراً توسط طبیعت نقطه یا نقاط منفرد سیستم بیان می گردد و این مطلب برای سیستم های غیر خطی صحیح نیست

سیستم غیر خطی مقابل را حول نقطه کار خطی کرده بازاء مقادیر متفاوت k در رابطه با مسیر حالت آن بحث کنید.

$$\ddot{y} - k(1 - y^2)\dot{y} + y = 0$$
$$x_1 = y$$
$$x_2 = \dot{y}$$
$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + k(1 - x_1^2)x_2$$
$$\text{نقطه تعادل} \begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \quad \Rightarrow \; x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \quad \Rightarrow \; x_1 = 0 \end{cases}$$

اگر سیستم را حول نقطه کار خطی کنیم داریم

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1-2kx_1x_1 & k\left(1-x_1^2\right)\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

بازاء نقاط تعادل، A به صورت زیر در می آید

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & k\end{pmatrix}$$

برای تعیین مقادیر ویژه

$$\det(\lambda I-A)=0$$

$$\to \lambda^2-k\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\frac{k\pm\sqrt{k^2-4}}{2}$$

بنابراین میتوان گفت

اگر $0<k<2 \Rightarrow$ مقادیر ویژه مختلط اند $\rightarrow$ مارپیچ ناپایدار

اگر $k>2 \Rightarrow$ مقادیر ویژه حقیقی و مثبت هستند $\rightarrow$ گره ناپایدار

مثال ۲: مدل زیستی ultera-lotka در این مدل رشد صید و صیاد تابعی غیر خطی از یکدیگرند.

اگر تعریف کنیم

$x_1 =$ تعداد صید

$x_2 =$ تعداد صیاد

آنگاه داریم

$$\frac{\dot{x}_1}{x_1}=g_1(x_2) \qquad g_1: a-bx_2$$

$$a,b,c,d>0$$

$$\frac{\dot{x}_2}{x_2}=g_2(x_1) \qquad g_2: cx_1-d$$

بنابراین میتوان نوشت

$$\dot{x}_1=(a-bx_2)\,x_1$$
$$\dot{x}_2=(cx_1-d)\,x_2$$

با یافتن نقاط تعادل داریم

$$x_{e_1} = \begin{bmatrix} \circ \\ \circ \end{bmatrix} \qquad , \qquad x_{e_2} = \begin{bmatrix} d/c \\ a/b \end{bmatrix}$$

یعنی دو نقطه تعادل داریم، با خطی سازی حول نقطه خواهیم داشت

در این حالت برای مقادیر ویژه داریم

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{xe_1} = \begin{pmatrix} a & \circ \\ \circ & -d \end{pmatrix}$$

$$(\lambda - a)(\lambda + d) = \circ$$

$$\lambda_1 = a \quad , \quad \lambda_2 = -d$$

بنابراین نقطه تعادل سیستم به فرم زین اسبی است

همچنین با خطی سازی حول نقطه تعادل x_{e_2} داریم

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -b\frac{d}{c} \\ a\frac{c}{d} & 0 \end{pmatrix}$$

و برای مقادیر ویژه خواهیم داشت

$$\lambda^2 + ad = \circ \quad \Rightarrow \lambda = \pm \ j\sqrt{ad}$$

بنابراین در این حالت نقطه تعادل سیستم به فرم center point است

تکلیف ۱)

مجموعه معادلات روبرو بنام Lorance attractor

موسوم است آنها را حول نقطه تعادل خطی کنید

$$\dot{x}_1 = \delta(x_2 - x_1)$$

$$\dot{x}_2 = (1 + \lambda - x_3)\, x_1 - x_2$$

$$\dot{x}_3 = x_1 x_2 - b\, x_3 \qquad \delta, \lambda, b > \circ$$

تکلیف ۲)

با توجه به مجموعه معادلات غیر خطی زیر نقاط تعادل را تعیین و نوع آنها را مشخص کنید.

$$\dot{x}_1 = 0/3 - 0/1\ x_1 + x_2 - 0/188\ \ x_1^2 x_2 - 0/75\ x_2^3$$

$$\dot{x}_2 = 0/25\ x_1 - 0/1\ x_2 + 0/047\ {}_1^3 + 0/188\ \ x_1 x_2^2$$

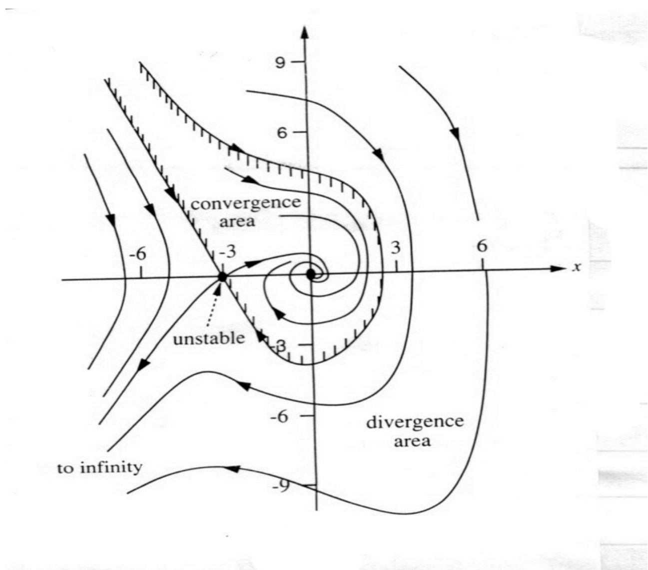
آنالیز صفحه فاز سیستمهای غیر خطی

نکات مهم در آنالیز صفحه فاز سیستمهای غیر خطی

۱) از آنجائیکه رفتار سیستم های غیر خطی در حول نقطه کار شبیه به یک سیستم خطی خواهد بود بنابراین آنالیز صفحه فاز سیستم های غیر خطی به گونه ای شبیه آنالیز صفحه فاز سیستم های خطی است

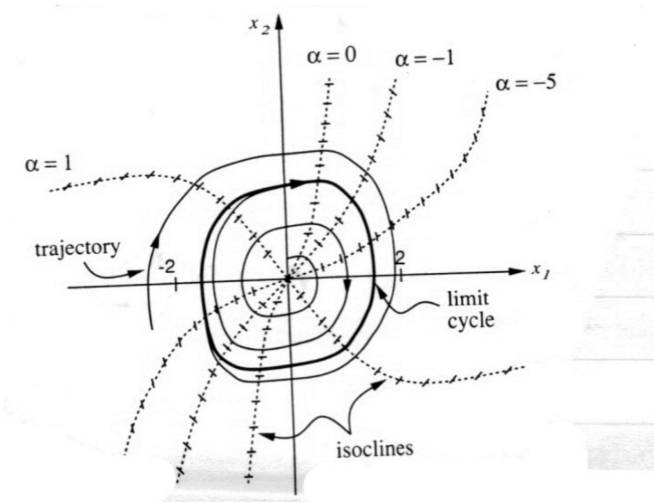
۲) بدلیل وجود نقاط تعادل متعدد در سیستم های غیر خطی، این سیستمها رفتار بسیار پیچیده تری را نسبت به سیستمهای خطی در صفحه فاز از خود نشان می دهند. وجود سیکل های حدی نیز میتواند بر این پیچیدگی بیفزاید.

مطالعه رفتارهای محلی سیستم های غیر خطی



نقطه منفرد $(0,0)$ رفتاری شبیه یک مارپیچ پایدار و نقطه منفرد$(-3,0)$ شبیه یک نقطه زین اسبی عمل می نماید با این شباهت میتوان استنتاج کرد که میتوان با خطی سازی سیستم های غیر خطی حول نقطه منفرد، نوع رفتار نقطه منفرد را تعیین کرد.

سیکل های حدی Limit cycles



یادآوری می کنیم که سیکل های حدی از ویژگی های منحصر به فرد سیستم های غیر خطی هستند

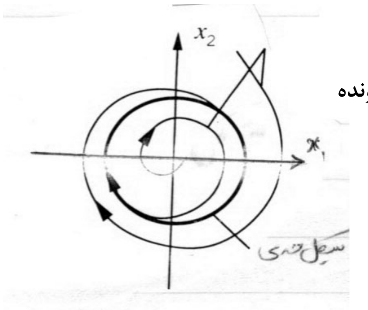
صفحه فاز، یک سیکل حدی به عنوان یک منحنی بسته مجزا تعریف می گردد

باید توجه داشت که بسته بودن مسیر حالت در سیکل حدی بیانگر رفتار پریودیک سیستم غیر خطی است و ایزوله بودن سیکل حدی نمایشگر طبیعت حدی سیکل می باشد و این یعنی آنکه مسیرهای حالت نزدیک سیکل حدی یا به آن همگرا می شوند و یا واگرا دقت داشته باشید که با توجه به توصیف فوق، نمیتوان مسیرهای حالت بسته موجود در سیستم خطی جرم و فنر بدون عامل میرا کننده را بعنوان سیکل حدی معرفی نمود چرا که این مسیرهای بسته ایزوله نیستند

براساس نحوه‌ی حرکت و چگونگی مسیرهای حالت در اطراف سیکل حدی سه نوع سیکل حدی قابل تعریف است

۱) سیکل های حدی پایدار

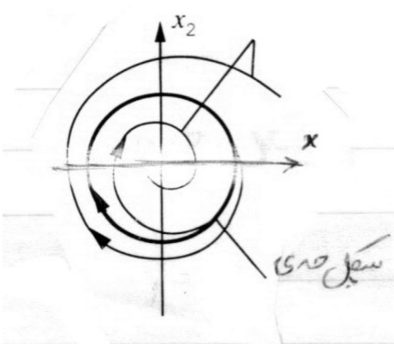
در این نوع سیکل حدی به تمام مسیرهای حالت در مجاورت سیکل حدی زمانی که $t \to \infty$ میل می کند به روی سیکل حدی همگرا می گردد



مسیرهای حالت همگرا شونده

۲) سیکل های حدی ناپایدار

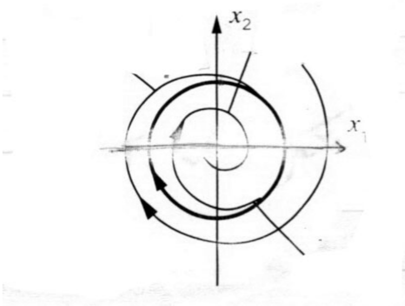
در این نوع، تمام مسیرهای حالت در مجاورت سیکل حدی زمانی که $t \to \infty$ میل می کند از سیکل حدی واگرا می گردد.



مسیرهای حالت واگرا شونده

۳) سیکل های حدی نیمه پایدار

در این نوع، بعضی از مسیرهای حالت در مجاورت سیکل حدی، از آن واگرا و بعضی دیگر به سیکل حدی همگرا می گردد.



مثال : برای یک سیستم غیرخطی داریم

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1\left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 x_2\left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right)$$

هدف تعیین رفتار سیکل حدی بوجود آمده در سیتم فوق است

جهت توصیف phase portrait سیستم فوق، با انجام یک تبدیل و ارائه مختصات قطبی داریم

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad , \; \theta = tg^{-1}\,\frac{x_2}{x_1}$$

با مشتق گیری از طرفین معادله داریم

$$\frac{dr}{dt} = -r\left(r^2 - 1\right)\; , \; \frac{d\theta}{dt} = -1$$

طبق معادله فوق اگر $r = 1$ باشد آنگاه $\dot{r}(t) = \circ$ شده و این بدان معنی است که با گذشت زمان مقدار r ثابت است یعنی دایره ای به شعاع واحد و چون $\frac{d\theta}{dt}$ نیز ثابت است. یعنی سرعت جابجائی متغیرهای حالت بر روی دایره ثابت است.

بنابراین پریود جابجائی متغیرهای حالت به روی دایره، برابر $\frac{1}{2\pi}$ ثانیه خواهد بود $\left(|\omega| = 1 \;\; {}^{rad}\!/_{s}\right)$

و این همان مفهوم سیکل حدی است

اگر $r < 1$ باشد آنگاه $\dot{r}(t) > \circ$ بوده و این بدان معنی است که مسیرهای حالت داخل سیکل حدی به سمت سیکل حدی همگرا می گردد

و اگر $r > 1$ باشد آنگاه $\dot{r}(t) < \circ$ بوده و این بدان معنی است که مسیرهای حالت خارج از سیکل حدی به سمت سیکل حدی همگرا خواهد شد

بنابراین سیکل حدی مورد بحث پایدار است

تکلیف) برای مثال قبل توسط کامپیوتر phase portrait را ارائه دهید

تکلیف) برای سیستم شکل زیر نشان دهید که سیکل حدی بوجود آمده نیمه پایدار است

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1\left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right)^2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2\left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right)^2$$

بررسی وجود سیکل های حدی

برای مهندسین کنترل پیش بینی سیکل های حدی بسیار حائز اهمیت است

تعاریف

a) N معرف تعداد گره ها، مراکز و مارپیچ ها ئی است که توسط سیکل حدی محاط شده اند

b) s تعداد نقاط زین اسبی محصور شده توسط سیکل حدی

قضیه pioncare

اگر در یک سیستم درجه ۲ تا متغیر با زمان، یک سیکل حدی موجود باشد آنگاه $N = S + 1$

این قضیه بعضی مواقع به عنوان قضیه index نیز معرفی می گردد

یک نتیجه ساده این قضیه آن است که یک سیکل حدی بایستی لااقل یک نقطه تعادل را در بر گیرد.

قضیه Bendixson

اگر D یک ناحیه پیوسته ساده باشد آنگاه برای سیستم

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$$

چنانچه $\nabla f(x) = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \neq 0$ بوده و تغییر علامت ندهد، آنگاه درون D سیکل حدی وجود ندارد

مثال

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_1 x_2^2$$

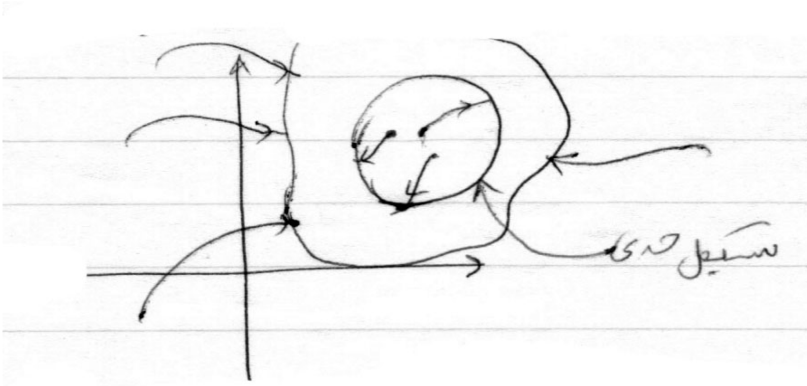
$\dot{x}_2 = x_1 + x_1^2 x_2$

$\nabla f(x) = x_2^2 + x_1^2 \neq 0$

$\nabla f(x)$ بازاء $x_1 \neq 0$ یا $x_2 \neq 0$، مخالف صفر بوده و تغییر علامت نیز نمی دهد بنابراین در این سیستم سیکل حدی وجود ندارد

قضیه Poincare- Bendixson

سیستمی با مجموعه معادلات $\dot{X} = f(X)$ و مسیر بسته از صفحه $X_2 - X_1$ را در نظر بگیرید اگر هیچ نقطه تعادلی درون ناحیه بسته نباشد و تمام مسیرهای حالت به درون ناحیه باشد آنگاه در این ناحیه سیکل حدی وجود دارد به شکل زیر نگاه کنید



کنترل غیرخطی

فصل سوم

اصول تئوری لیاپانوف Lyapunov

در بین خواص مختلف سیستمهای کنترل، اولین و مهم ترین آنها، مسئله پایداری می باشد.

در هر سیستم کنترل چه خطی و چه غیر خطی، بررسی مسئله پایداری بسیار حائز اهمیت بوده و بایستی به دقت مورد مطالعه قرار گیرد.

با این تفاوت عمده که در مورد سیستمهای خطی، پایداری برای کل سیستم تعریف می شود و در سیستمهای غیر خطی، پایداری نقطه تعادل مورد بررسی قرار می گیرد و در ضمن این امکان وجود دارد که سیستمی غیرخطی بازاء شرط اولیه ای پایدار و بازاء ورودی خاصی ناپایدار باشد.

هدف اصلی از ارائه این فصل و فصل بعدی ارائه تئوری پایداری لیاپانوف و کاربرد آن در آنالیز و طراحی سیستمهای غیرخطی می باشد.

قبل از پرداختن به تعاریف پایداری برحسب لیاپائوف مجبوریم به چند تعریف بپردازیم:

چند تعریف

سیستمهای non – Autonomous

سیستم $\dot{x}=f(x)$ را non – Autonomous می گوئیم اگر تابع f به زمان وابسته باشد.

نکته: طبیعت متغیر با زمان بودن سیستمهای کنترل یا به ذات پروسه سیستم مربوط می باشد. و یا به قانون کنترلی سیستم یک پروسه متغیر با زمان همراه با دینامیک

$$\dot{x}=f(x,u) \qquad (1)$$

را در نظر بگیرید. اگر کنترل کننده این سیستم به زمان وابسته باشد مثلا $u = g\ (x\ t)$ آنگاه سیستم (۱) متغیر با زمان نامیده می شود.

بعنوان مثال اگر داشته باشیم

$$\dot{x} = -2x + u \qquad (2)$$

و

$$u = -\sqrt{x}\cos t$$

در این حالت سیستم (۲) یک سیستم غیرخطی متغیر با زمان یا non – Autonomous است.

تفاوت اصلی بین سیستمهای متغیر با زمان و نامتغیر با زمان

مسیر حالت در سیستمهای نامتغیر با زمان مستقل از زمان اولیه می باشد با آنکه در سیستمهای متغیر با زمان اصلا اینطور نیست.

در فصل بعد خواهیم دید که اختلاف فوق ما را ملزم می کند که در تعریف مفهوم پایداری برای سیستمهای متغیر با زمان، زمان اولیه مطلقا تاثیر گذار است و به همین دلیل آنالیز سیستمهای متغیر با زمان بسیار پیچیده تر از سیستمهای نامتغیر با زمان است.

نقاط تعادل

در بعضی از سیستمها، مسیر حالت تنها به یک نقطه منحصر می گردد که آن را اصطلاحا نقطه تعادل می نامیم.

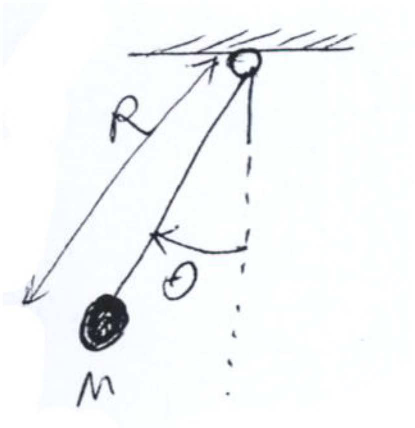
باید توجه داشت که بسیاری از مسائل پایداری به طور ذاتی نسبت به نقاط تعادلشان فرمولیزه می شوند.

تعریف نقطه تعادل

حالت x^* را یک حالت تعادل (equilibrium State) یا نقطه تعادل سیستم می نامیم اگر وقتی برای یکبار x (t) برابر x^* می گردد برای زمان های بعدی نیز در همان مقدار x^* باقی بماند.

از نقطه نظر ریاضی یعنی آنکه $f\left(x^*\right)=0$ باشد.

مثال: بررسی نقطه تعادل در یک پاندول



به شکل مقابل توجه کنید.

شکل مقابل یک پاندول به جرم M و شعاع نوسان R را نشان می دهد، تغییرات زاویه θ از معادله زیر تبعیت می کند.

$$M\,R^2\,\ddot{\theta}+b\,\dot{\theta}+M\,g\,R\,Sin\,\theta=0$$

در معادلهٔ فوق b همان ضریب اصطکاک ویسکوزیته ناشی از حرکت جرم M در هوا است و g شتاب جاذبه زمین

با تعریف متغیرهای حالت $x_1=\theta\ ,\ x_2=\dot{\theta}$ خواهیم داشت:

$$\dot{x}_1=x_2$$

$$\dot{x}_2=-\frac{b}{M\,R^2}\,x_2-\frac{g}{R}\,Sin\,x_1$$

بنابراین نقاط تعادل عبارتند از: $x_2=0\ ,\ Sin\,x_1=0$ یعنی نقاط تعادل عبارت خواهند بود:

$$\begin{pmatrix} 0,[2\pi] \\ 0 \end{pmatrix} \qquad , \qquad \begin{pmatrix} \pi,[2\pi] \\ 0 \end{pmatrix}$$

که معرف نقاطی است که پاندول در موقعیت عمودی بالا یا پایین قرار می گیرد.

حرکت نامی (Nominal motion)

در بعضی از مسائل عملی کنترل، بجای آنکه پایداری سیستم حول یک نقطه تعادل مورد بررسی قرار گیرد. پایداری حرکتی سیستم مورد مطالعه خواهد بود.

و این بدان معنی است که چنانچه سیستم قدری دچار اغتشاش شود این سوال مطرح خواهد بود که آیا همچنان نزدیک به مسیر حرکتی اولیه اش باقی خواهد ماند یا نه؟ (حرکت یک هواپیما را می توان مثالی از این نوع نام برد)

در چنین مواردی با یک سری روابط ریاضی می توان تحلیل پایداری سیستم را به پایداری حول نقطه متعادل تبدیل کرد.

البته با ذکر این نکته که در چنین وضعیتی سیستم جدید، نامتغیر با زمان خواهد بود.

برای سیستمی با معادله $\dot{x}=f(x)$ فرض کنید که x^* یک جواب صحیح می باشد $x^*(t)$ را که به شرط اولیه x_0 وابسته است مسیر حالت حرکتی نامی سیستم می نامیم. $x^*(0)=x_0$

حال فرض کنید شرط اولیه سیستم قدری دچار اغتشاش شده و به صورت زیر در آمده

$$x(0)=x_0+\delta x_0$$

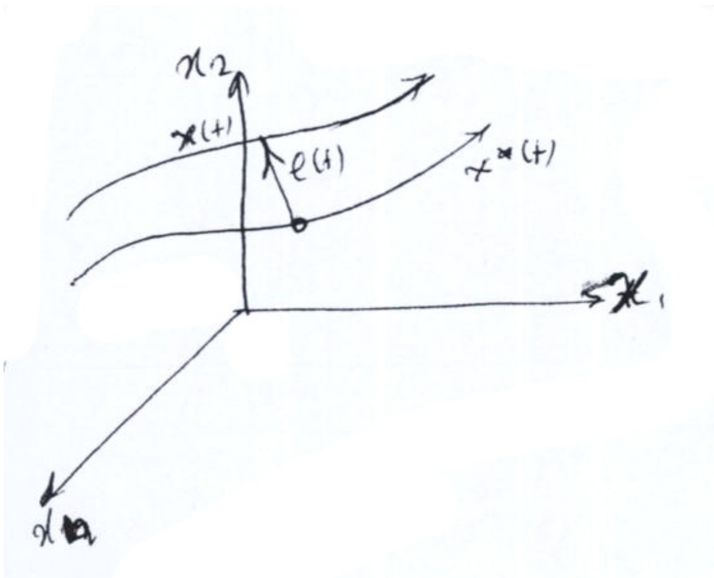
در این حالت خطای حرکت را به فرم زیر تعریف می کنیم:

$$e(t)=x(t)-x^*(t)$$

که $x(t)$ پاسخ بازاء شرط اولیه جدید است.

شمایی از دو پاسخ $x^*(t)$ و $x(t)$ در زیر نشان داده شده است.

شکل مقابل مربوط به یک فضای حالت n بعدی (n تعداد متغیرهای حالت است.)



باید توجه داشت که

$$\dot{x}^* = f\left(x^*\right) \qquad , \qquad x(0) = x_0$$

$$\dot{x} = f(x) \qquad , \qquad x(0) = x_0 + \delta x_0$$

و e (t) در معادله دیفرانسیل متغیر با زمان زیر صادق خواهد بود.

$$\dot{e} = f\left(x^* + e, t\right) - f\left(x^*, t\right) = g(e, t)$$

با شرط اولیه $e(0) = \delta x_0$

از آنجایی که g (0 , t) = 0 است، بنابراین با یک سیستم دینامیکی جدید سروکار داریم که در آن e(t) متغیر حالت و تابع g جایگزین تابع f گردیده است و نقطه تعادل سیستم نیز در مبدأ می باشد.

با توجه به توضیحات فوق، عملا برای سیستم اولیه به جای مطالعه تغییرات x (t) از $\dot{x}(t)$ ، کافی است که سیستم دینامیکی جدیدی با متغیر حالت e (t) و نقطه تعادل صفر را مورد بررسی قرار دهیم.

<u>نکته۱:</u> هر سیستم نامتغیر با زمان غیرخطی با یک مسیر حرکتی نامی به یک سیستم متغیر با زمان معادل و با نقطه متعادل صفر، مربوط می گردد.

نکته۲: برای هر سیستم نامتغیر با زمان خطی با یک مسیر حرکتی نامی، می توان یک سیستم نامتغیر با زمان معادل، همراه با نقطه تعادل صفر را جایگزین کرد.

مفهوم پایداری

در این بخش مفاهیم مختلف پایداری از جمله پایداری مجانبی (asymptotic stability) پایداری نمائی (exponential stability)، پایداری مجانبی مطلق را برای سیستم های نامتغیر با زمان ارائه خواهیم داد.

تعریف چند علامت ریاضی

★ B_R معرف ناحیه ای کروی گون در فضای حالت که در آن $\|x\| < R$

★ S_R کره ای در فضای حالت که با ضابطه $\|x\| = R$ تعریف شده است.

مفاهیم اساسی پایداری و ناپایداری

تعریف: حالت تعادل $x = 0$ را پایدار گوئیم اگر برای هر $R > 0$ ، $r > 0$ وجود داشته باشد به نحوی که اگر $\|x(0)\| < r$ آنگاه برای تمام زمانهای $t > 0$ داشته باشیم $\|x(t)\| < R$. در غیر این صورت سیستم را ناپایدار گوئیم (پایداری براساس مفهوم لیاپانوف)

تعریف پایداری فوق که بنام پایداری براساس مفهوم لیاپانوف نیز نامیده می شود به این معنی است که برای یک سیستم پایدار که شروع کار سیستم بسیار نزدیک به مبداء باشد آنگاه مسیر حالت سیستم نیز به مبداء بسیار نزدیک خواهد بود.

اگر بخواهیم کلاسیک تر صحبت کرده باشیم می توان گفت :

تعریف فوق بیان می دارد که مبداء در یک سیستم غیر خطی پایدار است اگر مسیر حالت شروع شده از هر نقطه دلخواه نزدیک به مبدأ و با گذشت زمان از ناحیه کروی گون به شعاع R خارج نگردد.

ناحیه r (R) می تواند به گونه ای انتخاب شود که بازاء هر شرط اولیه در داخل آن، تضمین کننده عدم خروج مسیر حالت از ناحیه B_R باشد.

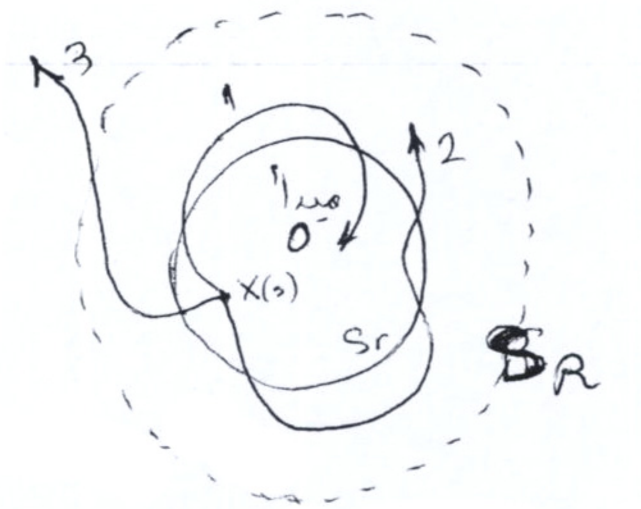
شکل هندسی زیر توصیف کننده بیان فوق است.

به این شکل دقت کنید

پایدار مجانبی = منحنی ۱

پایدار مرزی = منحنی ۲

ناپایدار = منحنی ۳



نمایش ریاضی تعریف اساسی پایداری

$$\forall R>0, \exists r>0 , \| x(0) \| < r \Rightarrow \forall t \geq 0 , \| x(t) \| < R$$

یعنی شرط لازم و کافی برای پایداری نقطه تعادل صفر آن است که بازاء هر $R > 0$ ، $r > 0$ وجود داشته باشد به نحوی که اگر نرم $x(0)$ کوچکتر از r باشد آنگاه بازاء جمیع $x > 0$ ، حتما نرم $x(t)$ کوچکتر از R گردد.

تذکر۱): $\| x(t) \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

تذکر۲): ناحیه کرون گون در فضای سه بعدی معنا و مفهوم دارد اما در فضای n بعدی برای ما تصورش غیرممکن است اما نظر ریاضی ارائه ناحیه کروی گون در فضای n بعدی صحیح است.

مفهوم ناپایداری را نیز می توان به صورت زیر تعریف کرد که نقطه تعادل یک سیستم ناپایدار است اگر دست کم یک گوی به شعاع R (B_R) وجود داشته باشد به نحوی که برای هر $r > 0$ (هر قدر هم

کوچک) این امکان همواره وجود داشته باشد که مسیر حالت حالت شروع شده در داخل B_r، با گذشت زمان گوی B_R را ترک کند.

نکته ای که ذکر آن ضروری است این می باشد که ناپایداری نقطه تعادل امری نامطلوب می باشد چرا که در سیستمهای غیر خطی عموما ناپایداری موجب بروز تشکیل سیکل حدی خواهد شد که نتیجه طبیعی آن صدمات مکانیکی و یا الکتریکی در سیستم خواهد بود.

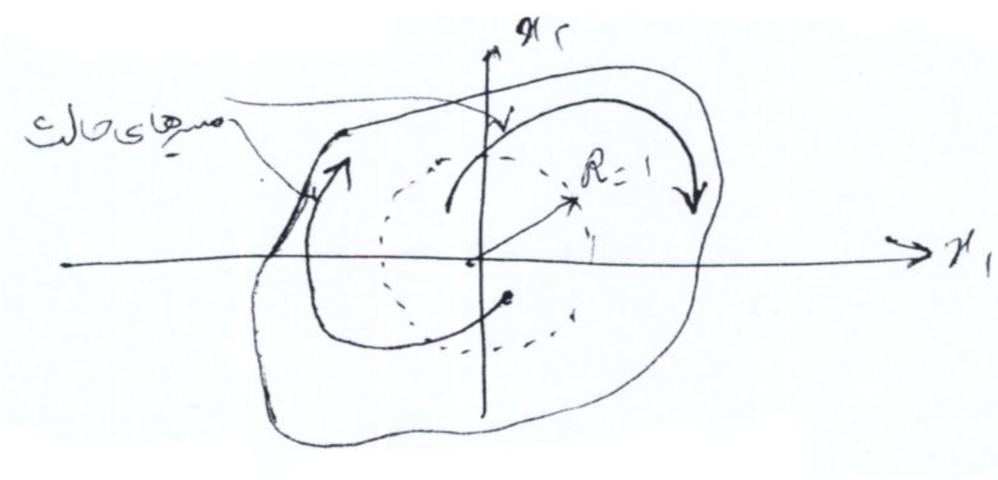
در سیستمهای خطی اگر نقطه تعادلی ناپایدار باشد آنگاه اندازۀ متغیرهای حالت سیستم با گذشت زمان مرتبا بزرگ خواهد شد که اصطلاحا به این پدیدۀ Blowing up می گوئیم. اما در سیستمهای غیرخطی عدم پایداری یک نقطه تعادل امکان دارد Blowing up را بوجود نیاورد و در نهایت مسیر حالت به یک سیکل حدی محدود شود.

مثال: برای اسیلاتور van der pole وضعیت پایداری نقطه تعادل آن را مورد بررسی قرار دهید:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + \left(1 - x_1^2\right) x_2$$

این سیستم یک نقطه تعادل در مبداء دارد.

همانگونه که در فصل ۲ اشاره شد تمام مسیرهای حالت که از یک نقطه غیر صفر شروع شود به یک سیکل حدی محدود خواهد شد به شکل زیر توجه کنید.



(ناپایداری مبداء در نوسان ساز Van der pol)

با توجه به این شکل می توان گفت که اگر ناحیه R به اندازهٔ کافی کوچک انتخاب گردد (کوچکتر از محدودهٔ سیکل حدی) آنگاه مسیرهای حالت شروع شونده نزدیک به مبدأ از ناحیه R خارج خواهند شد و این همان مفهوم ناپایداری است.

تفاوت اصلی بین دو مفهوم پایداری و ناپایداری در اینجا روشن می شود که:

اگر چه حالت سیستم به تعبیری در اطراف نقطه تعادل ابقاء می شود اما میزان این نزدیکی اختیاری نیست و این عدم اختیار در حقیقت وجه تمایز اصلی بین پایداری و ناپایدرای است.

مفاهیم پایداری مجانبی و پایداری نمائی

آیا پایداری بر حسب لیاپانوف جهت مطالعه سیستمها کفایت نمی کند که مجبوریم پایداری مجانبی یا نمائی را تعریف کنیم.

به این مثال توجه کنید:

وقتی وضعیت یک ماهواره از موقعیت نامی اش منحرف می گردد ما نه تنها می خواهیم که ما هواره وضعیتش را در محدودهٔ از پیش تعریف شده حفظ کند (پایداری لیاپانوف) بلکه می خواهیم که ماهواره

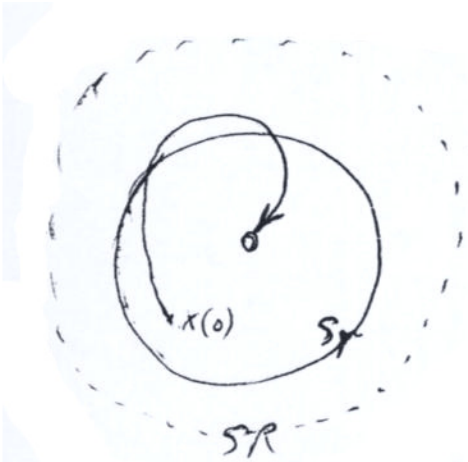
وضعیت قبل از انحراف را مجددا باز یابد و به تدریج در همان موقعیت و وضعیت قرار گیرد (یعنی پایداری مجانبی)

تعریف پایداری مجانبی

نقطه تعادل صفر را پایدار مجانبی می گوئیم اگر اولا پایدار باشد (در مفهوم لیاپانوف) و ثانیا اگر $\|x\|$ بازاء هر $r > 0$ کوچکتر از r باشد آنگاه زمانی که $t \to \infty$ میل می کند $x(t) \to 0$ میل کند.

شکل زیر گویای مفهوم پایداری مجانبی است.

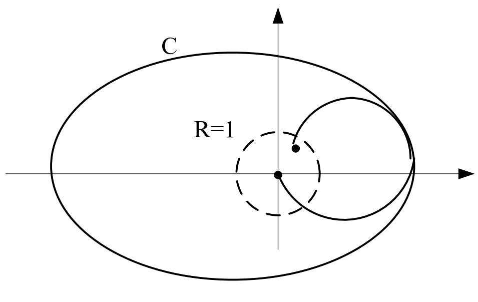
ناحیه B_r را که بازاء دایره S_r بوجود آمده ناحیه جذب نقطه تعادل می نامند البته باید دقت داشت که ناحیه جذب، بزرگترین محدودهٔ ممکن تعریف می گردد.



نکته بسیار مهم:

حرکت مسیر حالت به سمت مبدأ همواره مفهوم پایداری مجانبی را ندارد.

به عنوان مثال در یک سیستم غیر خطی بازاء هر شرط اولیه غیر صفری حرکت مسیر حالت به شکل زیر است.



یعنی هر مسیر حالتی که در داخل ناحیه $R = 1$ شروع شود حتما از این ناحیه خارج و پس از تماس با ناحیه C به مبدا بر می گردد.

ظاهرا نقطه تعادل مبدا در وضعیت پایدار مجانبی است اما باید دقت داشت که این سیستم اصلا در مفهوم لیاپانوف، پایدار نیست چرا که مسیر حالت از دایرهٔ R خارج شده است.

در بعضی از سیستمهای مهندسی حتی همگرا شدن مسیر حالت به سمت نقطه تعادل صفر کفایت نکرده و سرعت همگرایی مسیر حالت نیز قابل توجه می گردد و به همین دلیل مفهوم پایداری نمائی مطرح می گردد.

تعریف پایداری نمائی (exponential stability)

نقطه تعادل صفر را پایدار نمائی می گویند اگر اعداد مثبت α و λ به نحوی وجود داشته باشد که

$$\forall t>0 \quad , \quad \| x(t) \| \le \alpha \| x(0) \| e^{-\lambda t}$$

عبارت فوق باید در ناحیه B_r حول مبدا برقرار باشد.

عبارت ریاضی فوق بیان می کند که بردار حالت یک سیستم پایدار نمائی سریعتر از یک تابع نمائی بخصوص به سمت صفر میل می کند.

λ را نرخ همگرائی نمائی می نامیم.

بعنوان مثال پاسخ سیستم $\dot{x} = -\left(1 + Sin^2 x\right)x$ به طور نمائی و با نرخ همگرائی $\lambda = 1$ ، به سمت صفر میل خواهد کرد چرا که جواب آن به قرار زیر است:

$$x(t) = x(0)\ \exp\left(-\int_0^t \left[1 + Sin^2\left(x(\tau)\right)\right] d\tau \right)$$

بنابراین

$$\| x(t) \| \le \| x(0) \|\ e^{-t}$$

باید توجه داشت که پایداری نمائی الزاما پایداری مجانبی را نتیجه می دهد اما عکس این مطلب صادق نیست.

مثال زیر را در نظر بگیرید:

مثال:

$$\dot{x}=-x^2 \qquad , \qquad x(0)=1$$

جواب معادله فوق به صورت

$$x=\frac{1}{1+t}$$

می باشد می توان بخوبی دریافت که پاسخ فوق کندتر از هر پاسخ نمائی $e^{-\lambda t}$ استه که در آن $\lambda > 0$ باشد. بنابراین سیستم فوق پایدار مجانبی هست اما پایدار نمائی نیست.

تعریف پایداری مطلق (همه جانبه) global Stability

اگر پایداری مجانبی یا نمائی در یک سیستم <u>به ازای هر شرط اولیه ای</u> برقرار باشد آنگاه خواهیم گفت که نقطه تعادل به طور همه جانبه پایدار مجانبی یا نمائی است.

و یا به تعبیر دیگر، از هر نقطه که فضای حالت سیستم رها شود، سیستم به مبداء مختصات منتهی شود.

به عنوان مثال سیستمی با مدل

$$\dot{x}=-x+x^2$$

وقتی حول نقطه $x = 0$ خطی می شود سیستمی با معادله زیر حاصل می گردد

$$\dot{x}=-x$$

جواب این معادله به صورت $x(t)=x_0\, e^{-t}$ (x_0 شرط اولیه سیستم است)

که کاملا واضح است در این وضعیت سیستم پایدار مجانبی است.

اما اگر پاسخ سیستم در فرم اولیه و غیر خطی آن به دست آید خواهیم داشت.

$$x(t)=\frac{x_0\, e^{-t}}{1-x_0+x_0\, e^{-t}}$$

که بازاء شرایط اولیه متفاوت می تواند پاسخ واگرا نیز داشته باشد.

پس می گوئیم سیستم در فرم خطی بطور جامع پایدار مجانبی است اما سیستم اولیه پایدار همه جانبه نخواهد بود.

در ادامه بحث ارتباط بین پایداری سیستم خطی شده با سیستم غیرخطی اولیه مورد بررسی قرار می گیرد.

قضیه: روش خطی سازی لیاپانوف

۱- اگر سیستم خطی شده مطلقا پایدار باشد (تمامی مقادیر ویژه ماتریس A سیستم دارای قسمت حقیقی منفی باشند) آنگاه نقطه تعادل برای سیستم غیر خطی اولیه پایدار مجانبی خواهد بود.

۲- اگر سیستم خطی شده ناپایدار باشد (دست کم یکی از مقادیر ویژه ماتریس A دارای قسمت حقیقی مثبت باشد) آنگاه نقطه تعادل برای سیستم غیرخطی اولیه ناپایدار خواهد بود.

۳- اگر سیستم خطی شده پایدار مرزی باشد (دست کم یکی از مقادیر ویژه ماتریس A روی محور $j\omega$ بود و سایر مقادیر ویژه همگی سمت چپ محور $j\omega$ واقع شوند) آنگاه پایداری، ناپایداری و یا پایداری مجانبی سیستم غیر خطی اولیه کاملا نامشخص است.

روند تحلیلی فوق محدودیت هایی در طراحی سیستم های کنترل اعمال می کند. چرا که با خطی سازی حول نقطه تعادل این بحث پیش می آید که سیستم خطی شده تا چه محدوده ای حول نقطه کار همچنان می تواند رفتار خطی از خود بروز دهد و اگر پایدار منظور شده است آیا همچنان پایدار بماند.

لذا تحلیل پایداری به روش خطی سازی لیاپانوف دارای نواقصی می باشد که در ادامه بحث روش مستقیم لیاپانوف جهت رفع نواقص مطرح شده معرفی می گردد.

روش مستقیم لیاپانوف Lyapunov's Direct Method

فلسفه اصلی روش مستقیم لیاپانوف در ارائه بیان ریاضی این پدیدهٔ فیزیکی است که:

اگر انرژی یک سیستم مکانیکی یا الکتریکی به طور پیوسته تحلیل رود آنگاه سیستم چه خطی و چه غیرخطی بایستی الزاما به یک نقطه تعادل همگرا گردد.

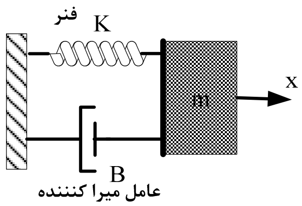
بنابراین نتیجه می گیریم که

پایداری یک سیستم طبق روش مستقیم لیاپانوف توسط بررسی تغییرات یک تابع اسکالر منفرد امکان پذیر است.

بعنوان مثال

سیستم جرم- فنر- عامل میرای غیرخطی که در شکل مقابل ترسیم شده است را در نظر بگیرید در اینجا عوامل میرای و فنر هر دو توابعی غیر خطی از x هستند و داریم

$$m\ddot{x}+b\dot{x}|\dot{x}|+k_0 x+k_1 x^3=0$$



نیروی فنر با ضابطه $k_0 x+k_1 x^3$ و نیروی مزاحم عامل میراکننده، با رابطه $b\dot{x}|\dot{x}|$ به دست می آید.

جرم m به مقدار زیادی به سمت راست کشیده شده و سپس رها گردد.

این سئوال مطرح است که آیا حرکت منتجه یک حرکت پایدار است یا خیر؟

پاسخ به این سوال به سادگی امکان پذیر نیست چرا که در حقیقت پاسخ معادله فوق به طور کامل در اختیار نمی باشد. خطی سازی معادله نیز به کار نخواهد آمد چرا که شروع به کار سیستم خارج از ناحیه خطی عملکرد سیستم است و حتی می توان به مواردی رسید که پاسخ وضعیت پایدار مرزی را نشان می دهد.

اما با مطالعه و تست انرژی سیستم می توان در رابطه با الگوی حرکتی جرم m مواردی را بیان کرد.

انرژی مکانیکی کل سیستم عبارتست از مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل یعنی

$$V(x)=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\int_0^x (k_0x+k_1x^3)\,dx=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}k_0x^2+\frac{1}{4}k_1x^4$$

با مقایسه تعاریف پایداری و انرژی مکانیکی سیستم به موارد زیر می رسیم:

۱- انرژی صفر، نقطه تعادل $x=0$ و $\dot{x}=0$ را نتیجه می دهد.

۲- پایداری مجانبی، همگرائی انرژی مکانیکی به سمت صفر را ملزم می کند.

۳- ناپایداری سیستم به معنی افزایش انرژی مکانیکی است.

یعنی خواص پایداری سیستم توسط تغییرات انرژی مکانیکی سیستم مشخص می گردد.

باید توجه داشت که به طور فیزیکی نیز می توان دریافت که انرژی سیستم مکانیکی جرم، فنر و عامل میراکننده با گذشت زمان تحلیل رفته و بالاخره صفر خواهد شد.

با مشتق گیری از تابع انرژی V(x) خواهیم داشت

$$\dot{V}(x)=m\dot{x}\ddot{x}+\left(k_0x+k_1x^3\right)\dot{x}$$

عبارت فوق با توجه به معادله دیفرانسیل اولیه سیستم برابراست با

$$\dot{V}(x)=\dot{x}\left(-b\dot{x}|\dot{x}|\right)=-b|\dot{x}|^3$$

که با توجه به مثبت بودن ضریب b، $\dot{V}(x)$ همواره منفی است و این بدان معنی است که انرژی سیستم در حین حرکت در حال کم شدن است تا جائیکه مثلا $\dot{x}=0$ گردد و اصطلاحا جرم m سرعتی نداشته باشد.

از مثال فوق می توان این گونه نتیجه گیری کرد که مشتق تابع انرژی سیستم می تواند معیاری در تشخیص پایداری سیستم باشد بدون آنکه پاسخ واقعی سیستم را بدانیم و یا آنکه به تعاریف و فضای مشکل پایداری سیستم غیر خطی متوسل گردیم.

در ادامه به نحوه انتخاب تابع انرژی یا تابع لیاپانوف خواهیم پرداخت

توابع مثبت معین و توابع لیاپانوف

از خواص تابع انرژی ارائه شده برای مثال بخش قبل می توان به دو مورد اشاره کرد:

۱- این تابع همواره مثبت است مگر آنکه x و $\dot{x}$ برابر صفر باشد.

۲- با توجه به تغییرات x و $\dot{x}$ در معادله سیستم، تابع انرژی همواره نزولی است.

تابع مثبت معین

تابع پیوسته و اسکالر V(x) را مثبت معین ناحیه ای Locally positive definite می گوئیم.

اگر $V(0) = 0$ بوده و در ناحیه B_R بازاء جمیع $x \neq 0$ ، V(x) مثبت باشد (x: بردار حالت سیستم است) و اگر در تمام ناحیه فضای حالت سیستم خاصیت فوق برقرار باشد و $V(0) = 0$ گردد آنگاه تابع را مثبت معین همه جانبه globally positive definite می گویند.

در بعضی از کتب تعریف فوق با اضافه کردن پارامتر زمان به صورت زیر پیشنهاد می گردد.

تعریف مجدد تابع مثبت معین

تابع پیوسته و اسکالر V(t,x) که از $\Re^n$ به $\Re$ تعریف شده است را مثبت معین ناحیه ای گویند اگر تابع غیر نزولی (non – decreasing)، α (p) با ویژگی زیر

$\alpha(p)>0 \quad , \ \alpha(0)=0 \qquad \alpha(p)=\{\Re \to \Re\}$

به گونه ای یافت شود که دو شرط زیر برقرار باشد

۱) $v(t,0)=0 \qquad \forall t \geq 0$

۲) $v(t,x) \geq \alpha(\|x\|) \qquad \forall t \geq 0 \ , \forall x \text{ in a } \ B_R$

نکته: ناحیه B_R ناحیه ای است که در آن $\|x\|<r$ می باشد.

<u>مثال ۱:</u>

$$v(t,\, x_1, x_2)=t+x_1^2+x_2^2$$

در اینجا داریم:

$$v(t,0)=t \neq 0$$

بنابراین این تابع شرط اول را پاسخگو نبوده و لذا مثبت معین نیست.

<u>مثال ۲:</u>

$$v(t,\, x_1, x_2)=e^t\left(x_1^2+x_2^2\right)$$

برای این تابع شرط اول برقرار است

و اگر تابع α (p) را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\alpha(p)=p^2$$

آنگاه می توان نوشت

$$\alpha(\|x\|)=x_1^2+x_2^2$$

که به ازاء محدودهٔ بخصوصی همواره می توان نوشت:

$$v(t,\, x_1, x_2) \geq x_1^2+x_2^2$$

بنابراین تابع $v(t,\, x_1, x_2)=t+x_1^2+x_2^2$ مثبت معین ناحیه ای است.

نکته: در عمل تست اینکه تابع لیاپانوف $v(t, x)$ از طریق بدست آوردن تابع α مناسب، از نوع Lpdf (Locally Positive Definite Function) یا gpdf (Globally Positive Definite Function) است، دشوار می باشد لذا قضیه زیر را ارائه می دهیم

قضیه : شرط لازم و کافی برای آنکه تابع W(x) , Lpdf باشد آن است که:

۱) $W(0) = 0$

۲) $W(x) > 0 \qquad \forall x \in B_R \quad , \quad x \neq 0$

همچنین W(x)، gpdf است اگر

۱) $W(0) = 0$

۲) $W(x) > 0 \qquad \forall\ x \neq 0$

۳) $v(x) \to \infty$ اگر $\|x\| \to \infty$

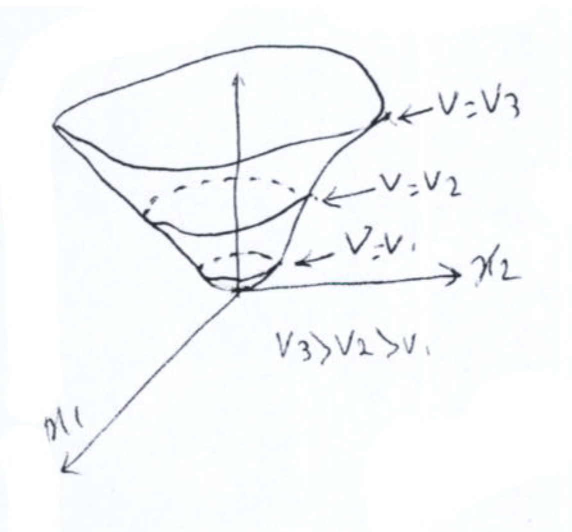
با ارائه قضیه فوق حال به کمک قضیه زیر روش تشخیص Lpdf بودن تابع لیاپانوف را مطرح می کنیم.

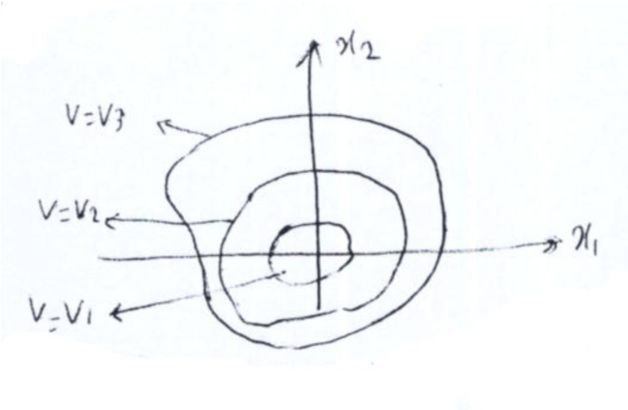
قضیه: تابع لیاپانوف V (t , x) را Lpdf می گوئیم اگر یک تابع Lpdf، همچون W (x) وجود داشته باشد که

$$v(t,x) \geq W(x) \qquad \forall\ t \geq 0 \qquad , \forall\ x \in B_R$$

مفهوم هندسی توابع مثبت معین ناحیه ای

شکل مقابل یک تغییر هندسی از تابع مثبت معین V (x) را ارائه می دهد.





اگر کانتورهای V_3, V_2, V_1 را در صفحه $x_1 - x_2$ نمایش دهیم شکل زیر حاصل خواهد شد.

چند تعریف مختصر دیگر که در آینده نیز بکار می آید را مطرح می کنیم.

۱) تابع V(x) را منفی معین می گوئیم اگر V(x) – مثبت معین باشد.

۲) تابع V(x) را مثبت نیمه معین می گوئیم اگر V (0) = 0 و V (x) ≥ 0 برای x # 0

۳) تابع V (x) را منفی نیمه معین گوئیم اگر V (x) – مثبت نیمه معین باشد.

حال باید به این سئوال پاسخ داد که

چه تابعی به عنوان لیاپانوف به منظور تشخیص پایداری سیستمهای غیرخطی مناسب است؟

برای پاسخ به این سوال تعریف زیر را ارائه می دهیم

تعریف

اگر در ناحیه B_R و تابع V (x) با مشتقات جزئی پیوسته، مثبت معین بوده و در ضمن مشتقات زمانی آن در طول هر مسیر حالتی منفی نیمه معین باشد یعنی

$$\dot{V}(x) \leq 0$$

آنگاه V (x) تابع لیاپانوف مناسب برای سیستم $\dot{X} = f(x)$ خواهد بود.

نکته: مشتق زمانی V (x) به صورت زیر حساب می شود:

$$\dot{V} = \frac{dV(x)}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial v}{\partial x} f(x)$$

قضایای پایداری نقطه تعادل

به منظور تشخیص نوع پایداری نقطه تعادل با استفاده از تابع لیاپانوف، قضایای زیر را برای تشخیص انواع پایداری مورد بررسی قرار می دهیم

قضیه (۱): پایداری محلی

اگر در یک ناحیه B_R، تابع اسکالر V(x) با مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته وجود داشته باشد به نحوی که

- V(x) در ناحیه B_R، مثبت معین باشد.
- $\dot{V}(x)$ در ناحیه B_R، منفی نیمه معین باشد.

آنگاه نقطه تعادل صفر پایدار است.

همچنین اگر $\dot{V}(x)$ در ناحیه B_R بطور محلی منفی معین باشد آنگاه نقطه تعادل صفر پایدار مجانبی است.

برای اثبات این قضیه به کتاب slotin مراجعه شود.

مثال: برای سیستمی با معادلات

$$\ddot{\theta}+\dot{\theta}+Sin\theta=0$$

نشان دهید که نقطه تعادل $\theta = 0$ دارای پایداری محلی است.

حل: اگر تابع لیاپانوف را به صورت $V(x)=(1-Cos\theta)+\dot{\theta}^2/2$ اختیار کنیم. میتوان دید که شرایط پایداری محلی را برآورده می کند چرا که برای ناحیه مخصوص B_R ، داریم : $V(x)>0$

و $\dot{V}(x)=\dot{\theta}Sin\theta+\dot{\theta}\ddot{\theta}=-\dot{\theta}^2<0$

مثال: برای سیستمی با مجموعه معادلات روبرو

$$\dot{x}_1=x_1\left(x_1^2+x_2^2-2\right)-4\ x_1\ x_2^2$$

$$\dot{x}_2 = 4x_1^2x_2 + x_2\left(x_1^2 + x_2^2 - 2\right)$$

نشان دهید که نقطه تعادل دارای پایداری مجانبی است.

حل: نقطه تعادل در مبدأ صفحه $x_2 - x_1$ است. تابع مثبت معین V (x) را به صورت زیر می نویسیم:

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$
$$\dot{V} = 2\left(x_1^2 + x_2^2\right)\left(x_1^2 + x_2^2 - 2\right)$$

در ناحیه دو بعدی بخصوصی، مشخصا $\dot{V}$ منفی معین است. ناحیه مورد بحث عبارتست از:

$$B_R = \left(x_1^2 + x_2^2\right) \langle\ 2$$

بنابراین نقطه تعادل صفر پایدار مجانبی است.

قضیه۲: پایداری همه جانبه global Stability

با فرض وجود تابع اسکالر V، مشتقات مرتبه اول جزئی پیوسته بنحوی که

- V (x) مثبت معین باشد (در تمام ناحیه فضای حالت)
- $\dot{V}(x)$ منفی معین باشد (در تمام ناحیه فضای حالت)
- وقتی $\|x\| \to \infty$ آنگاه $V(x) \to \infty$ کند

آنگاه نقطه تعادل صفر پایدار مجانبی همه جانبه است.

دلیل اضافه کردن شرط سوم

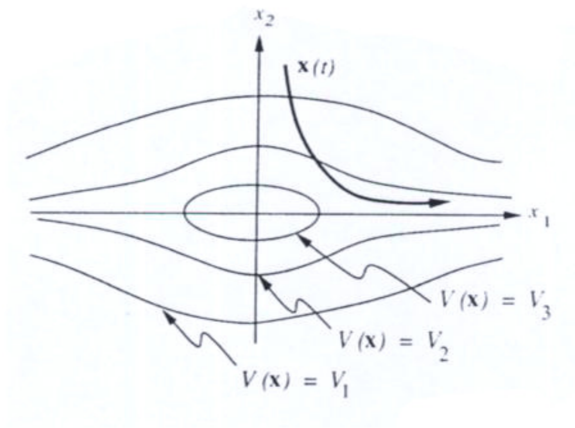
حصول اطمینان از بسته بودن کانتورهای $V(x) = V_\alpha$

قاعدتا اگر منحنی ها (کانتورها) بسته نباشند. این امکان وجود دارد که علیرغم تمایل متغیرهای حالت به سمت مقادیر کوچکتر V_α مسیر حالت از نقطه تعادل منحرف گردد.

به عنوان مثال برای تابع $V=\left[\dfrac{x_1^2}{1+x_1^2}\right]+x_2^2$

منحنی V (x) بازاء $V (x) = V_\alpha$ و برای $V_\alpha > 1$ یک منحنی باز است.

شکل زیر توصیفی گرافیکی از بیان فوق است ملاحظه می گردد که حالت سیستم وقتی به سمت بی نهایت میل می کند V (x) نیز به سمت بی نهایت میل خواهد کرد.



$$V_1 < V_2 < V_3$$

V (x) در ناحیه بسیار وسیعی همواره مثبت می باشد.

حال اگر کانتورها همگی بسته بودند آنگاه شرط سوم برقرار نمی شد و نقطه تعادل پایدار مجانبی همه جانبه نمی بود.

<u>مثال</u>: برای سیستمی غیر خطی با ضابطه $\dot{x}+C(x)=0$

که C (x) تابعی پیوسته از x بوده و در شرط زیر صادق است.

$x.C(x) \succ 0$ برای $x \neq 0$

و $C(0) = 0$

نشان دهید که نقطه صفر پایدار مجانبی همه جانبه است.

<u>حل :</u>

اگر تابع لیاپانوف به صورت زیر اختیار گردد.

$$V(x)=x^2$$
$$\dot{V}(x)=2x\dot{x}=-2xC(x)$$

بنابراین $\dot{V}(x)$ بازاء جمیع x ها در فضای حالت منفی خواهد بود اگر X # 0 باشد.

از طرفی تابع V به طور شعاعی نامحدود است (یعنی وقتی $x\to\infty$ آنگاه $V(x)\to\infty$ پس نقطه تعادل صفر پایدار مجانبی همه جانبه است.

توجه کنید که $\dot{V}$ فقط می تواند در نقطه تعادل صفر شود و در نقاط دیگر نباید این مسئله رخ دهد.

مثال: پایداری نقطه تعادل صفر را برای سیستم تعادل مورد بررسی قرار دهید

$$\dot{x}_1=x_2$$
$$\dot{x}_2=-x_2+(2+Sint)\,x_1$$

حل:

پیشنهاد می گردد که چون در سیستم تابع پریودیک وجود دارد، در تابع لیاپانوف نیز عامل پریودیک موجود باشد.

$$V(t,x)=x_1^2+\frac{x_2^2}{2+Sin\,t}$$

$$\dot{V}(t,x)=2x_1\dot{x}_1+\frac{2x_2\dot{x}_2}{2+Sint}+\frac{-x_2^2\,Cost}{(2+Sint)^2}$$

$$=-x_2^2\,\frac{4+2Sint+Cost}{(2+Sint)^2}$$

با توجه به لحظات مختلف زمانی می توان نشان داد که

$$\dot{V}(t,x)<0 \qquad\qquad \forall\ x\neq 0,\ \forall\ t$$

پس $-\dot{V}$ مثبت معین همه جانبه است چرا که برای نقطه تعادل $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dot{V}$ نیز صفر است.

پس می توان گفت که نقطه تعادل پایدار مجانبی همه جانبه است.

در ضمن براحتی می توان دید که شرط سوم نیز برقرار است.

چند نکته

۱- برای یک سیستم مشخص، تنها یک تابع لیاپائوف وجود نداشته و مطمئنا می توان توابع لیاپائوف متعددی را یافت.

یعنی اینکه اگر V تابع لیاپائوف مناسب سیستم مفروض باشد آنگاه تابع V_1 با ضابطه $V_1 = \rho V^{\alpha}$ نیز یک تابع لیاپائوف خواهد بود.

الف) مثبت معین بودن V، مثبت معین بودن V_1 را نتیجه می دهد

ب) مثبت معین بودن یا مثبت نیمه معین بودن $-\dot{V}$، مثبت معین یا مثبت نیمه معین بودن $-\dot{V}_1$ را نتیجه خواهد داد.

ج) نامحدود بودن شعاعی V (اگر ممکن باشد)، نامحدود بودن شعاعی (radial unboundness) V_1 را نتیجه خواهد داد.

۲- برای یک سیستم مفروض، انتخاب یک تابع لیاپائوف بخصوص چه بسا بتواند نتایج دقیق تری را نسبت به سایر توابع لیاپائوف بدست دهد.

به عنوان نمونه برای مثالِ حرکت پاندول، عملا به تابع لیاپائوف یک مفهوم فیزیکی داده و تابع انرژی را که ترکیب انرژی پتانسیل و جنبشی سیستم بود معرفی کردیم. اگر تابع لیاپائوف به فرم زیر که مفهوم فیزیکی روشنی نیز ندارد معرفی شود.

$$V(x) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\dot{\theta} + \theta\right)^2 + 2\left(1 - Cos\,\theta\right)$$

آنگاه عبارت $\dot{V}(x)=-\left(\dot{\theta}^2 + \theta\, Sin\,\theta\right)$ به صورت ناحیه ای، کوچکتر یا مساوی صفر است و یا به عبارتی منفی معین می باشد.

۳- قضایای مطرح شده در بحث آنالیز لیاپائوف همگی از نوع شرط کافی هستند و این بدان معنی است که اگر به ازاء یک تابع لیاپائوف، شرط $\dot{V}\leq 0$ برقرار نگردد آنگاه نمی توان در رابطه با پایداری یا ناپایداری نقطه تعادل سیستم نتیجه گیری کرد و تنها می توان گفت که باید تابع لیاپائوف جدیدی را باید مورد آزمایش قرار داد.

قضایای مجموعه نامتغیر

چنانچه به خاطر داشته باشید جهت پایداری مجانبی محلی نقطه تعادل الزاما باید تابع اسکالر V، که از متغیرهای حالت تعریف شده است دارای دو ویژگی زیر باشد.

۱) V (x) مثبت معین باشد.

۲) $\dot{V}(x)$ منفی معین باشد.

در اغلب موارد $\dot{V}(x)$ منفی نیمه معین بوده و قاعدتا طبق قضایای مربوط به نقاط تعادل، نمی توان پایداری مجانبی نقطه تعادل را نتیجه گیری کرد.

بعنوان نمونه در مثال جرم، فنر و عامل میرا کننده غیرخطی که قبلا مطرح گردید دیدیم که مشتق تابع انرژی سیستم به صورت زیر در آمد.

$$\dot{V}(x)=m\,\dot{x}\,\ddot{x}+\left(k_0\,x+k_1\,x^3\right)\dot{x}=\dot{x}\left(-b\,\dot{x}\,|\,\dot{x}\,|\,\right)=-b\,|\,\dot{x}\,|^3$$

در آن مثال متغیرهای حالت عبارت بودند از

$$x_1=x \qquad , \qquad x_2=\dot{x}$$

یعنی

$$\dot{V}(x_1,x_2)=-b\,|\,x_2\,|^2$$

از تعاریف قبل داشتیم که شرط لازم برای آنکه $-\dot{V}(x)$ مثبت معین باشد آن است که

$-\dot{V}(x)=0$ برای $x=0$

و

$-\dot{V}(x)\neq 0$ برای $x\neq 0$

اما در اینجا ملاحظه می گردد که $-\dot{V}(x)$ به ازاء نقطه $x=(\alpha\ ,\ 0)$ که قاعدتا مخالف صفر است، نیز صفر می گردد چرا که $-\dot{V}(x)$ فقط به x_2 وابسته است و x_1 هر عددی می تواند باشد.

پس $-\dot{V}(x)$ مثبت نیمه معین است و نمی توان گفت که در این مثال بر اساس قضایای نقطه تعادل، نقطه $(0\ ,\ 0)$ پایدار مجانبی است. با آنکه می دانیم سیستم مورد مثال پایدار مجانبی هست و بالاخره انرژی آن تحلیل خواهد رفت.

در چنین شرائطی خوشبختانه راه حل دیگری وجود دارد تا بتوان در رابطه با پایداری مجانبی نقطه تعادل نتیجه گیری کرد و آن استفاده از قضایای مجموعه نامتغیر می باشد.

این قضایا به مجموعه قضایای La Salle معروف می باشند.

تعریف مجموعه نامتغیر

برای یک سیستم دینامیکی، مجموعهٔ G را نامتغیر می گوئیم اگر هر مسیر حالت سیستم که از داخل G شروع می شود برای تمامی زمان های بعدی همچنان در G بماند.

هر نقطه تعادلی خود یک مجموعه نامتغیر است، همچنین ناحیه جذب هر نقطه تعادل نیز یک مجموعه نامتغیر است و برای یک سیستم نامتغیر با زمان، هر مسیر حالت در فضای حالت خود یک مجموعه نامتغیر است . سیکل های حدی نیز به عنوان مجموعه نامتغیر نیز قابل قبول هستند.

قضیه مجموعه نامتغیر محلی

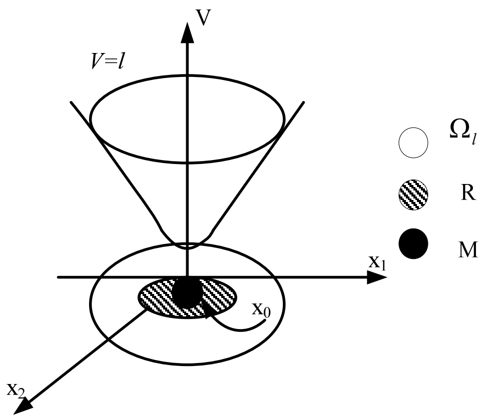
سیستم نامتغیر با زمان $\dot{x}=f(x)$ را در نظر بگیرید که در آن f پیوسته می باشد، همچنین تابع V (x) که اسکالر بوده و مشتقات اول جزئی آن نیز پیوسته است را در نظر بگیرید.

حال اگر فرض کنیم که

a) به ازاء $l>0$ ، ناحیه Ω_L که با ضابطه $V(x)<l$ تعریف شده، محدود بوده و

b) به ازاء تمام x های در Ω_l , $\dot{V}(x)\leq 0$ باشد.

چنانچه R عبارت از مجموعه نقاطی از Ω_l باشد که در آنجا $\dot{V}(x)=0$ است و M بزرگترین مجموعه نامتغیر در R باشد، آنگاه هر پاسخ x (t) که در Ω_l شروع گردد با گذشت زمان و میل کردن آن به سمت بی نهایت، حتما به ناحیه M همگرا خواهد شد.



نکتهٔ مهم : در قضیه فوق باید به این نکته توجه کرد که M می تواند اجتماع مجموعه های نامتغیری همچون نقاط تعادل و سیکل های حدی باشد.

در حالت خاص اگر مجموعهٔ R خود نامتغیر باشد (اگر $\dot{V}=0$ آنگاه برای زمان های آینده $\dot{V}$ نیز متحد با صفر است) آنگاه M = R است.

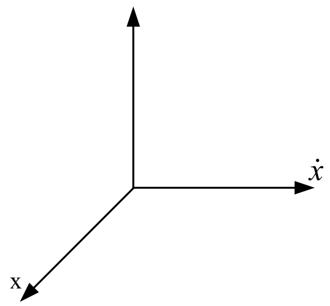
مثال : پایداری مجانبی سیستم جرم، فنر و عامل میراکننده غیر خطی را بررسی کنید.

در بخش های قبل به هنگام بررسی این مثال دیدیم که برای تابع لیاپائوف تعریف شده $\left(x\right)\dot{V}-$، مثبت نیمه معین است و لذا طبق قضایای نقطه تعادل، تنها پایداری مرزی سیستم محقق است، با آنکه می دانیم این سیستم در عمل همواره به نقطه تعادل همگرا می گردد.

حال می خواهیم به کمک آنچه در بحث قضیه مجموعه نامتغیر آموختیم پایداری مجانبی سیستم را تعیین کنیم. برای اینکار کافی است که نشان دهیم ناحیه M شامل تنها یک نقطه می باشد.

اگر مجموعه R را مجموعه حالت های با سرعت صفر $\left(\dot{x}=0\right)$ تعریف کنیم نشان خواهیم داد که بزرگترین مجموعه نامتغیر در R یعنی مجموعهٔ M ، همان مبدأ صفحه مختصات است.

در حال حاضر مجموعه R همان محور x ها است.



حال فرض کنیم که M شامل نقطه ای با موقعیت غیر صفر x نیز باشد.

در این صورت شتاب سیستم در آن نقطه عبارتست از:

$$\ddot{x}=-\left(\frac{k_0}{m}\right)x-\left(\frac{k_1}{m}\right)x^3$$

که همواره مخالف صفر است (چون $x \neq 0$)، شتاب غیر صفر یعنی داشتن سرعت. پس هر مسیر حالتی از سیستم، مطمئنا از R خارج خواهد شد و برای مجموعه M نیز همین مورد صادق است و این دقیقا با تعریف اولیه، در تناقض خواهد بود.

پس M غیر از مبدأ، چیز دیگری نخواهد بود و این همان پایداری مجانبی است.

در مثال بعد می خواهیم این نکته را بررسی کنیم که آیا می توان ناحیه جذب یک نقطه تعادل را با قضیه مجموعه نامتغیر تعیین کرد.

مثال : برای یک سیستم غیرخطی پایدار تابع لیاپائوف با ضابطه $V\left(x\right)=x_1^2+x_2^2$ تعریف شده است.

اگر ناحیه Ω_l را در صفحه $x_1 - x_2$، ناحیه ای در نظر بگیریم که در آن $V(x) < 1$ باشد آنگاه با توجه به تعریف $V(x)$ و ذکر این نکته که مشتق $V(x)$ تنها در مبداء صفر خواهد شد بنابراین R به تنهایی مبدا صفحه مختصات می باشد و در نتیجه یک مجموعه نامتغیر محسوب می گردد چرا که مبداء خود یک نقطه تعادل سیستم است.

با توجه به اینکه تمامی شرائط لازم طبق قضیه مجموعه نامتغیر محلی برقرار است لذا هر مسیر حالت شروع شونده داخل دایره Ω_l، به سمت مبداء همگرا خواهد شد بنابراین ناحیه جذب نقطه تعادل توسط قضیه مجموعه نامتغیر تعیین شده است.

<u>مثال</u> : بررسی سیکل حدی جذب کننده

به سیستم زیر دقت کنید.

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1^7 \left[x_1^4 + 2x_2^2 - 10 \right]$$
$$\dot{x}_2 = -x_1^3 - 3x_2^5 \left[x_1^4 + 2x_2^2 - 10 \right]$$

در این مثال خواهیم دید که علی رغم منفی نیمه معین مشتق تابع لیاپائوف، اما سیستم دارای پایداری مجانبی است و هر مسیر حالتی در نهایت به یک سیکل حدی محدود می گردد.

مجموعه نقاطی که توسط معادله زیر بیان می شوند یک مجموعه نامتغیر را تشکیل می دهند.

$$x_1^4 + 2x_2^2 = 10$$

(که معادله یک مسیر بیضی گون است)

چرا که مشتق آن یعنی $\frac{d}{dt}\left(x_1^4 + 2x_2^2 - 10\right) = -\left(4x_1^{10} + 12x_2^6\right)\left(x_1^4 + 2x_2^2 - 10\right)$ بر روی خود مجموعه صفر است.

از طرفی باید توجه داشت که حرکت بر روی این مسیر، معادلات زیر را به دست می دهد.

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1^3$$

اگر مسیر حالت بدست آمده توسط دو معادله حالت جدید را ترسیم کنیم یک سیکل حدی بدست خواهد آمد که متغیرهای حالت بر روی آن و در جهت حرکت عقربه ساعت جابجا می شوند.

آیا این سیکل حدی قابلیت جذب مسیرهای حالت را دارد؟

اگر پاسخ این سوال مثبت باشد یعنی آنکه سیستم اولیه دارای پایداری مجانبی است جهت پاسخگوئی، یک تابع لیاپائوف کاندید را به شکل زیر تعریف می کنیم.

$$V = \left(x_1^4 + 2x_2^2 - 10 \right)^2$$

با توجه به تعریف V، و قضیه مجموعه نامتغیر، به ازاء هر l مثبت ناحیه Ω_l، که سیکل حدی را محاط می کند، یک ناحیه محدود خواهد بود همچنین با محاسبه مشتق V داریم

$$\dot{V} = -8\left(x_1^{10} + 3x_2^6 \right)\left(x_1^4 + 2x_2^2 - 10 \right)^2$$

$\dot{V}$ همواره منفی است مگر آنکه

$$x_1^{10} + 3x_2^6 = 0 \qquad \text{یا} \qquad x_1^4 + 2x_2^2 = 10$$

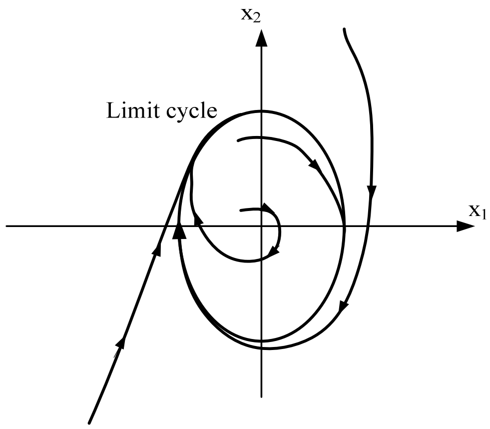
که در این صورت $\dot{V}$ مساوی صفر می گردد.

معادله سمت چپ معرف سیکل حدی است و معادله سمت راست معرف مبداء صفحه مختصات خواهد بود.

طبق قضیه مجموعه نامتغیر چون هر سیکل حدی و هم مبداء بعنوان مجموعه نامتغیر، پذیرفتنی هستند، پس M عبارتست از اجتماع این دو مجموعه.

در نهایت با توجه به اینکه $\dot{V}$ کوچکتر یا مساوی صفر شده است لذا تمام میرهای حالت در Ω_l به سمت سیکل حدی یا مبداء همگرا خواهد شد و این خود به مفهوم پایداری مجانبی محلی خواهد بود.

به شکل زیر توجه کنید.



تمرین : به کمک نرم افزار MATLAB به طور کامل مثال فوق را مورد بررسی قرار داده در رابطه با پایداری یا ناپایداری سیکل حدی و نقطه 0 بحث کنید.

قضیه مجموعه نامتغیر global

سیستم نامتغیر با زمان $\dot{x}=f\left(x\right)$ با تابع f پیوسته و تابع اسکالر V (x) را که مشتقات اول جزئی آن نیز پیوسته است در نظر بگیرید اگر فرض کنیم که:

- برای تمام ناحیه فضای حالت $\dot{V}\left(x\right)\leq 0$ و
- وقتی $\left\|x\right\|\to\infty$ آنگاه $V\left(x\right)\to\infty$

حال اگر R مجموعه کلیه نقاطی باشد که در آن $\dot{V}\left(x\right)=0$ و M بزرگترین مجموعه نامتغیر در R ، آنگاه تمام جواب های سیستم $\dot{x}=f\left(x\right)$ به مجموعه M همگرا خواهند شد.

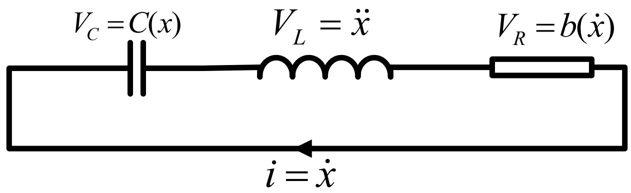
با توجه به بیان فوق آنچه که در مثال قبل آورده شد عملا نشان می دهد که سیکل حدی ارائه شده که نماینده مجموعه M است به طور همه گیر (global) پایدار است.

مثال: سیستمی با معادله $\ddot{x}+b\left(\dot{x}\right)+c\left(x\right)=0$ را که در آن b و c توابعی با ضابطه زیر هستند در نظر بگیرید.

اگر

$$\left.\begin{array}{lll} \dot{x}\,b(\dot{x})>0 & & \dot{x}\neq 0 \\ x\,c(x)>0 & \text{اگر} & x\neq 0 \end{array}\right\} \leftarrow \textit{Sign condition}$$

یک مدار RLC غیر خطی را نیز می توان توسط فرم معادله فوق بیان کرد.



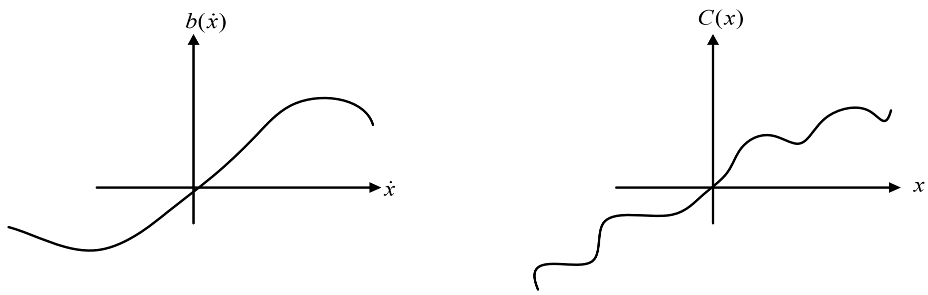
در این مثال می خواهیم نشان دهیم که نقطه تعادل صفر پایدار مجانبی خواهد بود اگر تابع مثبت معین V (x) را به شکل زیر تعریف کنیم.

$$V = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \int_0^x c(y)\,dy$$

که همان مجموعه انرژی ذخیره شده در سلف و خازن است، آنگاه

$$\dot{V} = \dot{x}\,\ddot{x} + c(x)\,\dot{x} = -\dot{x}\,b(\dot{x}) - \dot{x}\,c(x) + c(x)\dot{x} = -\dot{x}\,b(\dot{x}) \le 0$$

منفی بودن $\dot{V}$ به مفهوم اتلاف انرژی در سیستم بوده و از نقطه نظر فیزیکی همان مفهوم پایداری را دارد . (به شکل زیر توجه کنید.)



منحنی تغییرات $C(x)$ و $b(\dot{x})$

بنابراین با توجه به ضابطه $\dot{V}$، تنها اگر $\dot{x}=0$ باشد، $\dot{x}\,b(\dot{x})=0$ است و ظاهرا غیر صفر بودن x نیز ، اگر $\dot{x}=0$ باشد، می تواند $\dot{V}$ را صفر کند. پس می توان گفت که $-\dot{V}$ مثبت نیمه معین است و لذا در تعیین پایداری مجانبی مشکل داریم.

اما اگر بحث را اینطور ادامه دهیم که:

اگر $\dot{x}=0$ باشد آنگاه حتما x نیز مساوی صفر است چرا که

از روی منحنی $b(\dot{x})$ داریم اگر $\dot{x}=0$ باشد آنگاه $b(\dot{x})$ نیز صفر است با صفر شدن $b(\dot{x})$ در معادله دیفرانسیل اولیه سیستم به دست خواهیم آورد.

$$\ddot{x}+0+c(x)=0 \qquad \rightarrow \qquad \ddot{x}=-c(x)$$

اگر $x \neq 0$ باشد آنگاه عبارت فوق، غیر صفر است. بنابراین نتیجه خواهیم گرفت که سیستم نمی تواند نقطه تعالی غیر از $(0\ ,\ 0)$ را به دست آورد. و این بدان معنی است که با مجموعه R تعریف شده توسط ضابطه $\dot{x}=0$، بزرگترین مجموعه نامتغیر (یعنی M در R) عبارت است از مبداء صفحه مختصات.

لذا با کمک قضیه مجموعه نامتغیر توانستیم پایداری مجانبی محلی سیستم را تعیین کنیم.

آنالیز لیاپائوف سیستمهای خطی نامتغیر با زمان

همانگونه که در مورد سیستمهای غیرخطی بحث شد در اینجا می خواهیم با استفاده از تابع لیاپائوف، پایداری سیستمهای خطی را مورد تحلیل قرار دهیم. نخست چند تعریف

ماتریس های متقارن، نیمه متقارن (Skew – Symmetric)

۱- ماتریس مربع M را متقارن می گوئیم اگر $M=M^T$ باشد $\left(M_{ij}=M_{ji}\right)$

۲- ماتریس مربع M را نیمه متقارن می گوئیم اگر $M=-M^T$ باشد

<u>نکته۱:</u> هر ماتریس مربع M می تواند به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و نیمه متقارن نمایش داده شود. چرا که می توان نوشت

$$M=\frac{M+M^T}{2}+\frac{M-M^T}{2}$$

جمله اول یک ماتریس متقارن و جمله دوم یک ماتریس نیمه متقارن است.

<u>نکته۲:</u> تابع مربع هر ماتریس نیمه متقارن همواره برابر صفر است. چرا که

تابع مربع یا quadratic function ماتریس نیمه متقارن M برابر $x^T M x$ است که x هر بردار اختیاری $n \times 1$ می تواند باشد.

حال می توان نوشت

$$x^T M x = -x^T M^T x \qquad (M = -M^T \text{ چون})$$

چون عبارت سمت چپ یک اسکالر است می توان آنرا با ترانهادش جایگزین کرد یعنی

$$x^T M x = x^T M^T x = -x^T M x$$

یعنی نشان داده ایم که

$$x^T M x = -x^T M x$$

و این تنها در حالتی صفر است که $x^T M x = 0$ باشد.

نکته بسیار مهم: شرط لازم و کافی برای آنکه یک ماتریس نیمه متقارن باشد آن است که تابع مربع آن به ازاء هر x برابر صفر باشد.

در تحلیل های بعدی از عبارت $x^T M x$ به عنوان تابع لیاپائوف پیشنهادی برای آنالیز پایداری سیستمهای خطی استفاده خواهیم کرد.

<u>نکته:</u> هر تابع مربعی به فرم $x^T M x$ چه M ماتریس متقارن باشد یا نباشد را می توان همواره به صورت یک تابع مربع با یک ماتریس متقارن تبدیل نمود.

<u>تعریف ماتریس مثبت معین</u> : ماتریس مربع M را مثبت معین (pd) می گوئیم اگر:

$$x^T M x > 0 \text{ آنگاه } x \neq 0$$

و یا به عبارت دیگر M را مثبت معین می گوئیم اگر تابع مربع $x^T M x$ مثبت معین باشد.

مفهوم هندسی بیان فوق این است که زاویه بین بردار x و انتقال یافته آن یعنی Mx همواره کوچکتر یا مساوی 90° است.

نکته: یکی از شرایط لازم برای آنکه ماتریس مربع M ، مثبت معین باشد آن است که المان های قطر اصلی آن همگی مثبت باشند.

نکته: طبق قضیه Sylvester ، شرط لازم و کافی برای آنکه ماتریس مربع M مثبت معین باشد آن است که تمام minor های اصلی آن (یعنی $M_{11}\,, M_{11}\,M_{22} - M_{21}\,M_{12}\,, \ldots\,,$ دترمینال M) مثبت باشند.

و یا به طور معادل تمام مقادیر ویژه آن همگی مثبت باشند.

نکته: هر ماتریس مثبت معین M همواره به صورت زیر قابل تجزیه است.

$$M = u^T\,\Gamma U$$

که U ماتریس بردارهای ویژه ماتریس M بوده و داریم $u^T\,u = I$ و Γ ماتریس قطری است که مقادیر ویژه M بر روی قطر اصلی آن قرار دارند.

می توان نشان داد که $\lambda_{\min}$ کوچکترین مقدار ویژه M و $\lambda_{\max}$ بزرگترین آنها باشد آنگاه

$$\lambda_{\min}(M)\,\|x\|^2 \le X^T M\,x \le \lambda_{\max}(M)\,\|x\|^2$$

توابع لیاپائوف برای سیستم های خطی نامتغیر با زمان

برای سیستم خطی $\dot{x} = A\,x$ تابع لیاپائوف چند جمله ای منبع (quadratic function) زیر را پیشنهاد می دهیم

$$V = x^T\,p\,x$$

که P یک ماتریس مثبت معین متقارن می باشد.

با مشتق گیری از V در طول مسیر حالت سیستم داریم

$$\dot{V} = \dot{x}^T \; p\, x + x^T p\, \dot{x}$$

داریم $\dot{x} = A\, x$ بنابراین

$$\dot{x}^T = x^T A^T$$

با جایگزینی در $\dot{V}$ داریم

$$\dot{V} = x^T A^T p\, x + x^T p\, A\, x$$
$$= x^T \left(A^T p - p\, A \right) x$$

اگر تعریف کنیم
$$Q = -\left(A^T p + p\, A \right)$$

به معادله فوق اصطلاحا معادله لیاپائوف می گوئیم.)

خواهیم داشت
$$\dot{V} = -\, x^T Q\, x$$

اگر بتوان نشان داد که Q مثبت معین می باشد آنگاه می توان گفت که مبداء به طور همه جانبه (globally) پایدار مجانبی است.

با آنکه استنتاج فوق کاملا منطقی است اما می توان نمونه هایی را مثال زد که Q مثبت معین نیست اما سیستم پایدار است.

مثال : در یک سیستم درجه ۲ خطی ماتریس سیستم به قرار زیر است

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -8 & -12 \end{pmatrix}$$

اگر p را ساده ترین نوع ماتریس مثبت معین یعنی ماتریس واحد اختیار کنیم آنگاه برای Q داریم:

$$-Q = A^T p + p\, A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -24 \end{pmatrix}$$

ماتریس Q مثبت معین نیست.

در این حالت بر اساس P تعریف شده هیچ نتیجه خاصی بر روی پایداری سیستم استخراج نخواهیم کرد.

یعنی آنکه چون Q مثبت معین نشده نخواهیم گفت که سیستم ناپایدار است.

اتفاقا سیستم مورد سوال دارای مقادیر ویژه $S = -4$ و $S = -8$ است و لذا به طور همه جانبه پایدار مجانبی است.

یک راه بسیار مفید در مطالعه پایداری سیستم های خطی آن است که:

به جای انتخاب p و سپس یافتن Q ، نخست یک ماتریس مثبت معین Q را انتخاب کنیم و سپس از روی معادله $A^T p + p A = -Q$ ، p را یافته چنانچه p ، مثبت معین گردد آنگاه چند جمله ای $(1/2)\ x^T\ p\,x$ ، تابع لیاپائوف برای سیستم خطی بوده و در ضمن پایداری مجانبی سیستم نیز تضمین شده است.

در این رابطه به قضیه زیر دقت کنید.

قضیه : شرط لازم و کافی برای آنکه سیستم نامتغیر با زمان $\dot{x} = A x$ کاملا پایدار باشد آن است که برای هر ماتریس متقارن مثبت معین Q ، ماتریس منحصر بفرد p که جوابی از معادله لیاپائوف می باشد، مثبت معین و متقارن باشد.

اثبات : با توجه به توضیحات قبلی، به طور خودکار، شرط کافی بودن کاملا مشهود است، در ادامه شرط لازم بودن را مورد بررسی قرار می دهیم نخست نشان خواهیم داد که برای هر ماتریس مثبت معین Q همواره یک ماتریس مثبت معین p موجود خواهد بود به نحوی که در معادله لیاپائوف صدق کند.

پس از آن نشان خواهیم داد که به ازاء هر ماتریس Q ، ماتریس p منحصر به فرد نیز هست.

اگر Q یک ماتریس مثبت معین باشد و قرار دهیم

$$P=\int_0^{\infty} \exp\left(A^T t\right) Q \exp(At) dt$$

می توان نشان داد که چنانچه A مطلقا پایدار باشد (دارای مقادیر ویژه منفی باشد) انتگرال فوق وجود داشته و بخاطر مثبت معین بودن Q ، p نیز مثبت معین است از طرفی می توان نشان داد که

$$-Q=\int_{t=0}^{\infty} d\left[\exp\left(A^T t\right) Q \exp(At)\right]$$

با بسط عبارت داخل انتگرال داریم

$$-Q=\int_{t=0}^{\infty}\left[A^T \exp\left(A^T t\right) Q \exp(At)+\exp\left(A^T t\right) Q \exp(At) A\right] dt$$

چون A پایدار است پس جملات e^{At} و $e^{A^T t}$ زمانی که $t \rightarrow \infty$ میل می کند صفر خواهد شد

پس می توان نوشت $\quad Q=A^T p+p A$

منحصر به فرد بودن p را نیز می توان با جواب دیگری از معادله لیاپائوف مثل e^{At} بررسی کرد. یعنی داریم:

$$\begin{aligned}
P_1 &= -\int_{t=0}^{\infty} d\left[\exp\left(A^T t\right)\left(A^T P_1+P_1 A\right) \exp(At)\right] \\
&= \int_{t=0}^{\infty}\left[\exp\left(A^T t\right)\left(A^T P_1+P_1 A\right) \exp(At)\right] dt \\
&= \int_0^{\infty} \exp\left(A^T t\right) Q \exp(At)\, dt = P
\end{aligned}$$

برای مثال قبل مجددا به بررسی پایداری خواهیم پرداخت

$$Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

و برای P داریم

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \qquad\qquad p_{12} = p_{21}$$

با تشکیل معادله لیاپائوف داریم

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -8 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

* به دست خواهیم آورد

$$p_{11} = 5 \qquad\qquad p_{12} = p_{22} = 1$$

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

این ماتریس مثبت معین است بنابراین سیستم به طور همه جانبه پایدار مجانبی است.

روش های پیشنهادی برای تعیین تابع لیاپانوف

روش Krasovskii

از این روش جهت تعیین تابع لیاپائوف برای سیستمهای غیرخطی نامتغیر با زمان استفاده می شود.

قضیه Krasovskii

برای یک سیستم غیرخطی با ضابطه $\dot{x} = f(x)$ که نقطه تعادل آن مبدا و می باشد و با تعریف ماتریس ژاکوبین A (x) به صورت زیر

$$A(x) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

اگر ماتریس $F = A + A^T$ در یک همسایگی Ω از مبدا، منفی معین باشد آنگاه نقطه تعادل مبداء پایدار مجانبی است. تابع لیاپائوف برای این سیستم عبارت است از:

$$V(x) = f^T(x)\, f(x)$$

اگر Ω کل ناحیه فضای حالت سیستم باشد و زمانی که $\| x \|$ به سمت بی نهایت میل می کند، V (x) نیز به سمت بی نهایت میل کند، آنگاه نقطه تعادل به صورت همه جانبه پایدار مجانبی است.

مثال : سیستم غیرخطی زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x}_1 = -6x_1 + 2x_2 \qquad \equiv \; \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3 \qquad \equiv \; \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -6-6x_2^2 \end{pmatrix}$$

$$F = A + A^T \rightarrow F = \begin{pmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -12-12x_2^2 \end{pmatrix}$$

چون F منفی معین است (همه minor های آن مثبت نیستند). پس طبق قضیه krasovskii نقطه مبداء پایدار مجانبی است.

در ضمن تابع لیاپائوف نمونه عبارتست از: $f^T f$

$$f = \begin{pmatrix} -6x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow V = f^T f = (-6x_1 + 2x_2)^2 + \left(2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3\right)^2$$

قضیه Krasovskii تعمیم یافته

برای سیستم غیر خطی $\dot{x} = f(x)$ همراه با نقطه تعادل در مبداء و ماتریس ژاکوبین A (x) ، شرط کافی برای آنکه مبداء پایدار مجانبی باشد آن است که ماتریس های مثبت معین متقارن P و Q وجود

داشته باشد به نحوی که ماتریس F (x) با ضابطه زیر و برای هر $X \neq 0$ ، در همسایگی Ω از مبداء، منفی نیمه معین باشد.

$$F(x) = A^T P + P A + Q$$

در این حالت تابع لیاپائوف مربوطه عبارت $V(x) = f^T P f$ تعریف خواهد شد.

روش گرادیان متغیر

مبنای این روش آن است که گرادیان یک تابع لیاپائوف ناشناخته در اختیار است و سپس با انتگرال گیری از آن، تابع لیاپائوف مورد نظر تعیین خواهد شد. این روش برای سیستم های مرتبه پایین بسیار موفقیت آمیز می باشد.

اگر V (x) تابع لیاپائوف باشد بنابراین مشتق خود به صورت زیر مربوط خواهد شد.

$$V(x) = \int_0^x \nabla v \, dx$$

که

$$\nabla v = \left[\frac{\partial v}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial v}{\partial x_n} \right]^T$$

به منظور استخراج یک تابع لیاپائوف منحصر به فرد از روی ∇v، الزاما در تابع گرادیان بایستی شرط curl به قرار باشد یعنی

$$\frac{\partial \nabla v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \nabla v_j}{\partial x_i} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

دقت داشته باشید که منظور از ∇v_i ، i امین مولفه از تابع ∇v یعنی $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ می باشد.

به عنوان نمونه اگر تعداد متغیرهای حالت ۲ باشد، آنگاه شرط curl بیان می دارد که

$$\frac{\partial \nabla v_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \nabla v_2}{\partial x_1}$$

ساده ترین انتخاب جهت تابع گرادیان فرم چند جمله ای آن است

$$\nabla V_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j$$

که a_{ij} ها ضرائبی هستند که باید تعیین گردند. با توجه به توضیحات فوق الگوریتم یافتن تابع لیاپائوف V به صورت زیر خواهد بود.

۱) فرض کنیم که المانهای مختلف ∇v به شکل زیر یا هر فرم دیگری تعریف شده باشند

$$\nabla V_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j$$

۲) ضرائب a_{ij} را به گونه ای تعیین کنیم که شرط curl برقرار باشد (a_{ij} ها می توانند توابعی از متغیرهای حالت باشند)

۳) در تعیین a_{ij} ها این محدودیت اعمال گردد که $\dot{V}$ منفی نیمه معین شود

۴) با انتگرال گیری از $\dot{V}$، تابع V تعیین گردد.

۵) مثبت معین بودن V تست گردد.

نظر به برقراری شرط curl ، لذا نتیجه انتگرال گیری از مسیر انتگرال گیری کاملا مستقل است و لذا به هنگام انتگرال گیری به گونه زیر عمل می شود.

$$V(x) = \int_0^{x_1} \nabla V_1(x_1, 0, \ldots, 0)\, dx_1 + \int_0^{x_2} \nabla V_2(x_1, x_2, 0, \ldots, 0)\, dx_2 + \ldots$$

$$+ \int_0^{x_n} \nabla V_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_n$$

مثال : با روش گرادیان متغیر تابع لیاپائوف را برای سیستم غیرخطی زیر بیابید.

$$\dot{x}_1 = -2\, x_1$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + 2x_1 x_2^2$$

گرادیان تابع لیاپائوف را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\nabla v_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2$$

$$\nabla v_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2$$

با فرض برقراری شرط curl

$$\frac{\partial \nabla v_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \nabla v_2}{\partial x_1}$$

$$\rightarrow a_{12} + x_2 \frac{\partial a_{12}}{\partial x_2} = a_{21} + x_1 \frac{\partial a_{21}}{\partial x_1}$$

با انتخاب

$$a_{11} = a_{22} = 1 \qquad , \qquad a_{12} = a_{21} = 0$$

خواهیم داشت

$$\nabla v_1 = x_1 \qquad , \qquad \nabla v_2 = x_2$$

بنابراین $\dot{V}$ عبارتست از:

$$\dot{V} = \nabla v \, \dot{x} = \left(\nabla v_1 \quad \nabla v_2\right) \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 + 2x_1 x_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{V} = -2x_1^2 - 2x_2^2 \left(1 - x_1 x_2\right)$$

کاملا مشخص است که $\dot{V}$ در ناحیه $(1 - x_1 x_2) > 0$ همواره منفی معین است.

لذا V (x) به صورت زیر به دست می آید:

$$V(x) = \int_0^{x_1} x_1 \, dx_1 + \int_0^{x_2} x_2 \, dx_2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$$

تابع V (x) مثبت معین بوده و لذا پایداری مجانبی محلی مبداء تضمین شده است.

دقت داشته باشید که طبق این روش میزان توابع لیاپائوف مختلفی را به دست آورد.

بعنوان مثال اگر داشتیم

$$a_{11} = 1 \quad , \quad a_{12} = x_2^2$$

$$a_{21} = 3x_2^2 \quad , \quad a_{22} = 3$$

تابع لیاپائوف جدیدی به دست می آمد که شرائط پایداری را نیز برآورده می کرد.

پایان فصل سوم

فصل چهارم

تئوری پیشرفته پایداری

در فصل قبل، آنالیز لیاپائوف برای سیستمهای نامتغیر با زمان (Autonomous) مورد مطالعه قرار گرفت. نظر به اینکه در عمل اکثر سیستمها متغیر با زمان (non – Autonomous) هستند لذا مطالعه و آنالیز پایداری آنها نیز حائز اهمیت است.

در این فصل همچنین پس از مطالعه آنالیز پایداری سیستمهای متغیر زمان، مفاهیم دیگری از تئوری پیشرفته پایداری مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

مفهوم پایداری برای سیستمهای متغیر با زمان

در فصل قبل اشاره ای مختصر به بحث پایداری سیستمهای متغیر با زمان گردید اما در این فصل بیشتر مطلب را مورد مطالعه قرار می دهیم.

رفتار سیستمهای متغیر با زمان به زمان شروع کار سیستم یعنی t_0، وابسته بوده و لذا در تعاریف پایداری این زمان باید لحاظ شود.

از طرف دیگر مفهوم جدیدی به نام یکنواختی (uniformity) جهت مشخص کردن رفتار سیستمهای متغیر با زمان الزامی است که در ادامه آن را نیز مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

مثالی ساده از یک سیستم نامتغیر با زمان

<u>مثال</u> : به سیستم مقابل توجه کنید.

$$\dot{x}=-\frac{a(t)x}{1+x^2}$$

این سیستم دارای یک نقطه تعادل در $x = 0$ است و به ازاء جمیع t های بزرگتر از صفر این نقطه تعادل برقرار است.

اما اگر سیستم را به فرم زیر تغییر دهیم

$$\dot{x}=\frac{-a(t)x}{1+x^2}+b(t)$$

آنگاه نمی توان گفت که به ازاء $b(t) \neq 0$ سیستم دارای نقطه تعادل است و قاعدتا آنالیز چنین سیستمهایی با آنچه تا کنون داشته ایم متفاوت است.

تعمیم مفاهیم پایداری سیستم های نامتغیر با زمان جهت سیستم های متغیر با زمان

در این بخش مفاهیم پایداری، ناپایداری و پایداری مجانبی را برای سیستم های متغیر با زمان ارائه می کنیم دقت داشته باشیم که در کلیه مفاهیم، پارامتر زمانی t_0 دخالت خواهد داشت.

تعریف ۱ : نقطه تعادل 0 در لحظه t_0 را پایدار می گوئیم اگر برای هر $R > 0$ ، یک اسکالر مثبت همچون r که تابعی از R و t_0 است وجود داشته باشد به نحوی که اگر

$$\|x(t_0)\| < r \qquad \Rightarrow \qquad \|x(t)\| < R \qquad \forall \quad t \geq t$$

در غیر این صورت نقطه تعادل ناپایدار است.

تعریف۲ : نقطه تعادل 0 در لحظه t_0 پایدار مجانبی است اگر دو شرط زیر برقرار باشد:

الف) پایدار باشد.

ب) اگر $r(t_0) > 0$ وجود داشته باشد که به ازاء آن $\|x(t_0)\| < r(t_0)$ گردد آنگاه زمانی که $t \to \infty$ میل می کند، $\|x(t)\| \to 0$ میل کند.

پایداری مجانبی الزام می دارد که به ازاء هر زمان اولیه t_0، همواره یک ناحیه جذب برای مسیرهای حالت وجود داشته باشد.

تعریف ۳ : نقطه تعادل 0 پایدار نمائی است اگر دو ضریب مثبت α و λ موجود باشند بنحوی که برای مقادیر به اندازه کوچک $x(t_0)$، داشته باشیم.

$$\|x(t)\| \leq \alpha \|x_0\| e^{-\lambda(t=t_0)} \qquad \forall \quad t \geq t_0$$

تعریف ۴ : نقطه تعادل 0 پایدار مجانبی همه جانبه است اگر به ازاء $x(t_0)$ زمانی که $t \to \infty$ میل می کند $x(t) \to 0$ میل کند.

مثال : به سیستم مرتبه اول روبرو دقت کنید.

$$\dot{x}(t) = -a(t)\, x(t)$$

جواب این معادله به قرار زیر است:

$$x(t) = x(t_0)\exp\left[-\int_t^{\lambda} a(\tau)\,d\tau\right]$$

با توجه به تعاریف ارائه شده برای پایداری، اگر $a(t) \geq 0$ باشد به ازاء $t \geq t_0$ آنگاه عبارت $\int_{t_0}^{\lambda} a(\tau)\,d\tau = +\infty$ و در نتیجه سیستم به طور مجانبی پایدار است.

این سیستم همچنین پایدار نمائی است اگر عدد مثبت T به نحوی وجود داشته باشد که به ازاء جمیع $t \geq 0$ ، داشته باشیم

$$\int_t^{x+T} a(\tau)\,d\tau \geq \gamma$$

که γ یک ثابت مثبت است.

معرفی مفهوم یکنواختگی (uniformity) در پایداری

در بخش های قبل وابستگی مفاهیم مختلف پایداری را به زمان شروع کار سیستم (t_0) نشان دادیم. در سیستمهای غیرخطی یکنواختی روند پاسخ نیز حائز اهمیت است و عموما هر چه روند پاسخ سیستم یکنواخت تر باشد. مقاومت سیستم در قبال اغتشاش بیشتر خواهد بود.

باید دقت داشت که چون نحوه پاسخ در سیستمهای متغیر با زمان، شدیدا به زمان t وابسته است لذا زمان t بر روی یکنواختی اثر گذار خواهد بود و به همین دلیل می توان گفت که در سیستم های نامتغیر با زمان تمام خواص پایداری، دارای ویژگی یکنواختی نیز هستند.

تعریف ۵: نقطه تعادل 0 را به طور محلی پایدار یکنواخت می گوئیم اگر اسکالر r در تعریف ۱ مستقل از t_0 انتخاب گردد یعنی $r = r(R)$

دقت داشته باشید که دلیل واقعی جهت معرفی مفهوم پایداری یکنواخت آن است که سیستمهای با پایداری بسیار ضعیف در بازه زمانی $t > t_0$ را از طبقه بندی سیستمهای پایدار خارج کنیم.

در ضمن اگر سیستم دارای پایداری مجانبی یکنواخت باشد می توان گفت که لحظه شروع به کار سیستم (لحظه t_0) خیلی بر روی روند همگرائی حالت سیستم تاثیرگذار نیست.

تعریف ۶: نقطه تعادل در مبداء پایدار مجانبی یکنواخت محلی است اگر:

الف) پایدار یکنواخت باشد.

ب) گوی جذبی همچون B_{R_0} که شعاعش مستقل از t_0 است وجود داشته باشد به نحوی که هر مسیر حالتی از سیستم با حالت اولیه ای در B_{R_0}، در لحظهٔ t_0 و به طور یکنواخت به مبداء (0) همگرا گردد.

در حقیقت وقتی که همگرائی مسیرهای حالت بر حسب t_0 به طور یکنواخت صورت گیرد، آنگاه برای تمام مقادیر R_1 و R_2 که $0<R_2<R_1\leq R_0$ و پریود زمانی مثبت T به R_1 و R_2 وابسته است وجود دارد. به نحوی که به ازاء $t\geq 0$ اگر $\|x(t_0)\|<R_1$ آنگاه به ازاء جمیع $t\geq t_0+T(R_1,R_2)$ داریم $\|x(t)\|<R_2$

و این بدان معنی است که مسیر حالت شروع شده در ناحیه B_{R_1} پس از گذشت زمان T که مستقل از t_0 است به ناحیه کوچکتر B_{R_2} همگرا خواهد شد.

نتیجه :

پایداری مجانبی یکنواخت همواره پایداری مجانبی را نتیجه می دهد اما عکس آن همواره درست نیست.

مثال زیر این مورد را تشریح می کند.

مثال : سیستم درجه اول مقابل را در نظر بگیرید.

$$\dot{x}=-\frac{x}{1+t}$$

حل عمومی سیستم عبارت است از

$$x(t)=\frac{1+t_0}{1+t}\,x(t_0)$$

همانگونه که ملاحظه می شود این پاسخ به طور مجانبی به سمت صفر همگرا می گردد اما نحوهٔ همگرائی یکنواخت نیست و این بدان دلیل است که سرعت همگرائی به t_0 وابسته است.

نکته: با بکارگیری تعریف ۳ می توان نشان داد که پایداری نمائی سیستم های غیرخطی منجر به پایداری مجانبی یکنواخت خواهد شد.

نکته: مفهوم پایداری مجانبی یکنواخت همه جانبه را می توان با تعویض ناحیه جذب B_{R_0} با کل ناحیه فضای حالت، توصیف کرد.

آنالیز لیاپائوف برای سیستم های متغیر با زمان:

روش مستقیم لیاپائوف

قبل از بیان روش لازم است که به چند تعریف بپردازیم

توابع مثبت معین متغیر با زمان و توابع نزولی

تعریف ۷: تابع متغیر با زمان و اسکالر $V(x\ ,\ t)$ را مثبت معین محلی گوئیم اگر $V(0,t) = 0$ و یک تابع مثبت معین نامتغیر با زمان همچون $V_0(x)$ بنحوی وجود داشته باشد که

$$\forall \quad t \geq t_0 \ \Rightarrow V(x,t) \geq V_0(x)$$

به بیان دیگر شرط لازم برای آنکه یک تابع متغیر با زمان، مثبت معین محلی باشد آن است که بر یک تابع مثبت معین محلی نامتغیر با زمان غالب باشد.

نکته: تمامی تعاریفی که قبلا برای توابع مثبت نیمه میعن و منفی معین و منفی نیمه معین جهت سیستمهای نامتغیر با زمان ارائه شد در اینجا با وارد کردن پارامتر t صحیح می باشد.

تعریف ۸: تابع اسکالر $V(x\ ,\ t)$ نزولی نامیده می شود اگر دو شرط زیر برقرار باشد

الف) $V(0\ ,\ t) = 0$

ب) تابع مثبت معین $V_l(x)$ (نامتغیر با زمان) بنحوی وجود داشته باشد که

$$\forall \quad t \geq t_0 \ \Rightarrow V(x,t) \geq V_l(x)$$

مثال : مثبت معین بودن تابع $V(x\ ,\ t)$ را مورد بررسی قرار دهید

$$V(x,t) = \left(1 + Sin^2 t\right)\left(x_1^2, x_2^2\right)$$

کاملا مشخص است که شرط اول $V(0 , t) = 0$ برقرار است.

از طرفی با توجه به محدود بودن $-1 \le Sin t \le 1$ پس می توان گفت که

$$V(x,t) \rangle\ x_1^2 + x_2^2 \qquad\qquad \left[V_0(x) = x_1^2 + x_2^2\right]$$

همچنین این تابع نزولی است چرا که به ازاء تابع $V_L(x) \le 2\left(x_1^2 + x_2^2\right)$ می توان نوشت

$$V(x, t) \le 2\left(x_1^2 + x_2^2\right)$$

قضیه لیاپائوف برای پایداری سیستم های متغیر با زمان

نخست به تعریف توابع کلاس K و مطالعه یک قضیه فرعی می پردازیم

تعریف تابع کلاس K: تابع پیوسته α که از R^+ به R^+ تعریف شده است را از کلاس K و یا متعلق به کلاس K می نامیم اگر

1) α (0) = 0

2) α (p) > 0 $\qquad \forall\ p>0$

3) α غیر نزولی باشد.

<u>**قضیه فرعی:**</u> تابع $v(x , t)$ مثبت معین محلی (همه جانبه) است اگر و فقط اگر تابع α از کلاس K وجود داشته باشد بنحوی که

1) $V(0 , t) = 0$

2) $V(x , t) \ge \alpha (\| x \|)$

روابط فوق باید به ازاء جمیع $t \ge 0$ و x های متعلق به ناحیه B_{R_0} (یا تمام فضای حالت) صحیح باشد.

همچنین تابع $V(x , t)$ را محلی یا (همه جانبه) نزولی گوئیم اگر و فقط اگر تابع β از کلاس K وجود داشته باشد بنحوی که به ازاء جمیع $t \ge 0$ و جمیع $X \in B_{R_0}$ (یا تمام ناحیه فضای حالت) رابطه زیر برقرار باشد.

$$V(x\,,t) \le \beta\,(\,\|\,x\,\|\,)$$

اثبات :

نخست اثبات قسمت اول یعنی بررسی مثبت معین بودن:

شرط کفایت از تعریف کاملا مشخص است چرا که $\alpha(\|\,x\,\|)$ خود یک تابع مثبت معین اسکالر نامتغیر با زمان خواهد بود. پس به اثبات لازم بودن شرط می پردازیم.

فرض می کنیم که تابع مثبت نا متغیر با زمانی همچون $V_0(x)$ به نحوی که $V(x,t) \ge V_0(x)$ وجود داشته باشد. نشان خواهیم که تابع α از کلاس $\boldsymbol{K}$ وجود خواهد داشت که رابطه

$$V(x, t) \ge \alpha(\|\,x\,\|) \qquad (۱)$$

برقرار باشد

تابع $\alpha\,(p)$ را به قرار زیر تعریف می کنیم.

$$\alpha(p) = \inf_{p \,\le\, \|x\| \,\le\, R} V_0(x) \qquad (۲)$$

بنابراین $\alpha\,(0) = 0$ بوده و α یک تابع پیوسته غیر نزولی است. در ضمن از آنجائیکه $V_0(x)$ یک تابع پیوسته بوده و بجز در 0 ، مخالف صفر است پس $\alpha(p)$ برای $p > 0$ همواره مثبت است.

بنابراین α از کلاس $\boldsymbol{K}$ بوده و رابطه (۲)، رابطه (۱) را توصیف می کند. برای اثبات قسمت دوم قضیه فرعی، به کتاب های کنترل غیرخطی مراجعه کنید.

قضیه : اگر فرض کنیم که در همسایگی نقطه تعادل 0 ، تابع اسکالر $V(x\,,\,t)$ با مشتقات اول جزئی وجود داشته باشد و یک تابع α از کلاس $\boldsymbol{K}$ بنحوی موجود بوده که به ازاء هر x مخالف صفر شرایط زیر برقرار باشند یعنی

$$V(x\,,t) \ge \alpha\,(\,\|\,x\,\|\,) > 0 \qquad (۱)$$

$$\dot{V}(x,t) \le 0 \qquad (۲a)$$

آنگاه نقطه تعادل صفر پایدار لیاپائوف خواهد بود.

از طرفی اگر تابع اسکالر β از نوع کلاس $\mathcal{K}$ بنحوی وجود داشته باشد که

$$V(x\,,\,t) \le \beta\,(\,\|\,x\,\|\,) \qquad (۳)$$

آنگاه نقطه تعادل 0 پایدار یکنواخت است.

همچنین اگر شروط (۱) و (۳) برقرار بوده و شرط (۲a) با عبارت زیر جایگزین گردد

$$\dot{V} \le -\gamma\left(\|\,x\,\|\right) < 0 \qquad (۲b)$$

که γ یک تابع اسکالر دیگر از نوع کلاس $\mathcal{K}$ است. آنگاه نقطه تعادل صفر پایدار مجانبی یکنواخت خواهد بود.

و اگر شروط ۱، ۲b و ۳ در کل فضای حالت برقرار باشند و

$$\lim_{x\to\infty} \alpha\left(\|x\|\right) \to \infty$$

آنگاه نقطه تعادل 0 پایدار مجانبی یکنواخت همه جانبه (global) است.

<u>مثال</u> : به سیستم شکل مقابل توجه کنید.

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) - e^{-2t}x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

پایداری مجانبی همه جانبه نقطه تعادل صفر این سیستم را بررسی کنید.

حل : تابع اسکالر V(x , t) را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$V(x,t) = x_1^2 + \left(t + e^{-2t}\right) x_2^2$$

این تابع مثبت معین هست چرا که این تابع نیز تابع مثبت نامتغیر با زمان $x_1^2 + x_2^2$ غالب است این تابع همچنین نزولی نیز هست چرا که تابع $x_1^2 + 2x_2^2$ بر آن غالب است.

از طرفی

$$\dot{V}(x,t) = -2\left[x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 (1 + 2e^{-2t})\right]$$

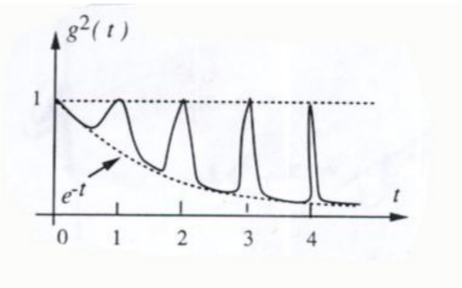
کاملا واضح است که داریم

$$\dot{V} \leq -2\left(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2\right) = -(x_1 - x_2)^2 - x_1^2 - x_2^2$$

بنابراین $\dot{V}$ منفی معین بوده و لذا نقطه 0 ، پایدار مجانبی همه جانبه است.

ذکر این نکته ضروری است که نتایج پایداری برای سیستمهای متغیر با زمان نسبت به سیستم های نامتغیر با زمان دارای ابهام بیشتری بوده و قدری ما را دچار مشکل می کند و بایستی در به کارگیری قضیه فوق دقت بیشتری را به عمل آورد. یادآوری می کنیم که در سیستم های نامتغیر با زمان ، مثبت معین بودن V و منفی معین بودن $\dot{V}$ جهت تحلیل پایداری کفایت می کرد.

مثال : پایداری نقطه صفر را برای سیستمی با ضابطه $\dot{x} = \dfrac{\dot{g}(t)}{g(t)} x$ بررسی کنید. با این فرض که $g^2(t)$ به فرم روبرو ر باشد.



نخست باید بدنبال انتخاب تابع لیاپائوف مناسب باشیم.

همانگونه که ملاحظه می گردد تابع g(t) باید پیوسته و مشتق پذیر باشد این تابع با تابع $e^{-t/2}$ در نقاطی منطبق بوده و در نقاطی که t دارای یک مقدار صحیح است، یک پیک با ضربان خواهد داشت.

(دقت داشته باشید در شکل $g^2(t)$ را داریم که $g^2(t)$ طبیعتا با $\left(e^{-t/2}\right)^2$ منطبق خواهد شد.)

فرض شده که پهنای ضربان بوجود آمده در مقادیر صحیح t، از جمله $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ کوچکتر است (n یک مقدار صحیح است) بنابراین انتگرال نامعین g^2 به صورت زیر بیان خواهد شد.

$$\int_0^{\infty} g^2(r)\, dr \,\langle\, \int_0^{\infty} e^{-r}\, dr + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

باید توجه داشت که اولین جمله سمت راست برابر یک و جمله دوم نیز برابر یک است.

اگر V(x, t) را به صورت زیر اختیار کنیم می توان مثبت معین بودن آن را تائید کنیم.

$$V(x,t)=\frac{x^2}{g^2(t)}\left[\, 3-\int_0^t g^2(r)dr \,\right]$$

چون V(x , t) بزرگتر از x^2 است پس V(x , t) مثبت معین است.

اگر مشتق $\dot{V}$ را حساب کنیم خواهیم داشت.

$$\dot{V}=-x^2$$

کاملا مشخص است که $\dot{V}$ منفی معین است بدین ترتیب ظاهرا پایدار مجانبی برقرار است اما جواب عمومی معادلهٔ $\dot{x}=\frac{\dot{g}(t)}{g(t)}\, x$ نیز به صورت زیر است:

$$x(t)=\frac{g(t)}{g(t_0)}\, x(t_0)$$

یعنی با توجه به شکل خاص g (t) ، زمانی که $t \to \infty$ میل می کند در زمان های صحیح t، پالس هایی با عرض بسیار کم وجود خواهد داشت و لذا نقطه تعادل پایدار مجانبی نیست.

مثال : برای سیستم شکل مقابل $\ddot{x}+\left(2+e^{t}\right)\dot{x}+x=0$

پایداری نقطه تعادل (0 , 0) را بررسی کنید.

حل : می خواهیم به ازاء یک شرط اولیه خاص پاسخ را بیابیم

اگر x(0) = 2 و $\dot{x}(0)=-1$ بوده و سیستم پایدار باشد الزاما بایستی با گذشت زمان، x (t) = 0 و $\dot{x}(t)=0$ شود.

چنانچه معادله دیفرانسیل را حل کنیم داریم

$$x(t)=1+e^{-t}$$

یعنی در بی نهایت $x(t)=1$ خواهد شد، پس نقطه تعادل صفر به ازاء شرط اولیه بخصوصِ اعمال شده پایدار نیست.

آنالیز لیاپائوف سیستم های متغیر با زمان خطی

آنچه که در آنالیز پایداری سیستم های LTI آموخته ایم. به هیچ عنوان در سیستم های متغیر با زمان کارآیی ندارد و در اینجا بایستی روش مستقیم لیاپائوف را به کار بست.

تعریف

سیستم متغیر با زمان $\dot{X}=A(t)X$ پایدار مجانبی است اگر برای تمام زمان ها، همه مقادیر ویژه ماتریس متقارن $A(t)+A^{T}(t)$، دارای مقدار حقیقی منفی باشند.

نتیجه گیری فوق را می توان با تعریف تابع لیاپائوف $V=x^{T}x$ به اثبات رساند. با این تعریف، V مثبت معین است و برای $\dot{V}$ نیز داریم

$$\dot{V}=x^{T}\dot{x}+\dot{x}^{T}x=x^{T}\left(A(t)x\right)+X^{T}A^{T}(t)x$$
$$=x^{T}\left(A(t)+A^{T}(t)\right)x$$

$A(t)+A^T(t)$ یک ماتریس متقارن و منفی معین است چرا که فرض شده مقادیر ویژه آن برای تمام زمان ها دارای مقدار حقیقی منفی است. پس

$$A(t)+A^T(t)\le -\lambda \qquad\qquad \lambda>0$$

$$\rightarrow \dot{V}\le -\lambda\, x^T x<0$$

بنابراین مشتق تابع لیاپائوف منفی معین است و حتما x به طور نمائی به سمت صفر خواهد رفت.

دقت داشته باشید که بیان فوق، شرط کافی را توضیح می دهد و امکان دارد سیستمی پایدار مجانبی باشد اما شرط مطرح شده در ماتریس $A(t)+A^T(t)$ را برآورده نکند.

بررسی پایداری در یک Perturbed System

به سیستم شکل مقابل توجه کنید $\dot{x}=(A_1+A_2(t))x$

که ماتریس A_1، Hurwitz است یعنی تمام مقادیر ویژه آن دارای قسمت حقیقی منفی هستند و همچنین ماتریس $A_2(t)$ دارای این ویژگی است که اگر $t\rightarrow\infty$ آنگاه $A_2(t)\rightarrow 0$ میل خواهد کرد. و همچنین $\int_0^\infty \|A_2(t)\|dt<\infty$

و این بدان معناست که انتگرال مورد بحث وجود داشته و معین است. در این حالت می توان گفت که سیستم اولیه به طور همه جانبه پایدار نمائی است.

مثال : پایداری سیستم غیرخطی متغیر با زمان روبرو را

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=-\left(5+x_2^5+x_3^8\right)x_1\\ \dot{x}_2&=-x_2+4x_3^2\\ \dot{x}_3&=-\left(2+Sin\ t\right)x_3\end{aligned}$$

مورد بررسی قرار دهید.

حل: مشتق متیغر حالت سوم فقط به همان متغیر وابسته است لذا معادله سوم را به عنوان یک سیستم تک متغیره بررسی می کنیم.

$$\dot{x}_3=-\left(2+Sin\,t\right)x_3$$

$$\dot{x}_3 \equiv \left(A_1 + A_2(t) \right) x_3 \qquad A_1 = -2 \quad \text{و} \quad A_2(t) = -Sin\, t$$

A_1 و A_2 دارای ویژگی بحث قبل هستند پس x_3 به طور نمائی به سمت صفر میل خواهد کرد بنابراین x_2 نیز به همین نحو به سمت صفر میل می کند این نتیجه برای x_1 نیز صادق است بنابراین کل سیستم به طور نمائی پایدار است.

سیستم های خطی مثبت Positive Linear Systems

در آنالیز و طراحی سیستم های غیر خطی تجزیه سیستم به زیر سیستم های خطی و غیر خطی بسیار مفید می باشد. اگر تابع تبدیل یا ماتریس انتقال زیر سیستم خطی اصطلاحا حقیقی مثبت Positive real باشد آنگاه به دلیل خواص مهم آن تابع لیاپانوفی به دست خواهد آمد که برای کل سیستم مناسب خواهد بود.

توابع تبدیل PR و SPR

تابع تبدیل مقابل را در نظر بگیرید.

$$R(s) = \frac{b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \cdots + b_0}{S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \cdots + a_1 S + a_0}$$

ضرائب چند جمله ای صورت و مخرج همگی حقیقی اند و $n \geq m$ است. $n - m$ را درجه نسبی سیستم می نامیم.

تابع تبدیل $G(s)$ را حقیقی مثبت (PR) می گوئیم اگر برای تمام $Re\,[s] > 0$ و $Re\{G(s)\} \geq 0$ باشد.

و آنرا اکیدا حقیقی مثبت Strictly Positive Real (SPR) گوئیم اگر برای مقادیر کوچک $\varepsilon > 0$ ، $G(s-\varepsilon)$ مثبت حقیقی باشد.

از نظر هندسی یعنی $G(s)$ ، هر نقطه از صفحه مختلط s را که دارای جزء حقیقی مثبت باشد به نیم صفحه راست صفحه مختلط $G(s)$ نگاشت می کند.

بعنوان مثال تابع تبدیل $G(s) = \frac{1}{s+\lambda}$ و به ازاء $\lambda > 0$ و مقدار مختلط S برابر با $\sigma + j\omega$ به صورت زیر است

$$G(s)=\frac{1}{(\sigma+\lambda)+j\omega}=\frac{\sigma+\lambda-j\omega}{(\sigma+\lambda)^2+\omega^2}$$

کاملا مشخص است که مثبت حقیقی G(s) به ازاء $\sigma \geq 0$ همواره مثبت است پس G(s) یک تابع حقیقی مثبت است.

تابع G(s) را می توان با انتخاب $\varepsilon=\frac{\lambda}{2}$ بعنوان یک تابع SPR نیز معرفی نمود.

قضیه : تابع تبدیل G(s) را SPR گوئیم اگر و فقط اگر

۱) G(s) یک تابع تبدیل اکیدا پایدار باشد.

۲) قسمت حقیقی G(s) در طول محور $j\omega$ اکیدا مثبت باشد یعنی

$$\forall \qquad \omega \geq 0 \ \rightarrow \mathrm{Re}\left[G(j\omega)\right]>0$$

قضیه فوق در حقیقت بیانگر شرط لازم، برای SPR بودن یک تابع تبدیل است.

در حقیقت ۲ شرط فوق معادل یا چهار ویژگی زیر هستند.

a) G(s) اکیدا پایدار باشد.

b) مسیر نایکوئیست به طور کامل در نیمه راست صفحه مختلط قرار گرفته و یا به طور معادل اختلاف فاز بین خروجی و ورودی سیستم به ازاء یک ورودی سینوسی کمتر از ۹۰ درجه است.

c) درجه نسبی (relative degree) G(s) یا صفر است یا یک

d) G(s) مینیمم فاز است.

تمرین : SPR بدون توابع تبدیل زیر را مورد بررسی قرار دهید.

$$G_1(s)=\frac{S-1}{S^2+2S+1} \qquad G_2(s)=\frac{S-1}{S^2-2S+1}$$

$$G_3(s)=\frac{1}{S^2+S+1} \qquad G_4(s)=\frac{S+1}{S^2+S+1}$$

$G_5(s)=\frac{1}{S}$ $\qquad\qquad$ $G_6(s)=\frac{1}{S-1}$

قضیه تابع تبدیل G(s) را حقیقی مثبت (PR) می گوئیم اگر و فقط اگر:

۱) G(s) پایدار باشد

۲) قطبهای G(s) بر روی محور $j\omega$ غیر تکراری باشند و مانده های مربوطه حقیقی و غیر منفی باشند.

۳) برای جمیع $\omega \geq 0$، همواره $\mathrm{Re}[G(j\omega)] \geq 0$

قضیه Kalman – Yakubovich(قضیه KY)

یکی از کاربردهای مهم قضیه KY ، تولید توابع لیاپائوف مناسب خواهد بود.

از قضیه KY برای توصیف توابع تبدیل PR نیز بدین صورت استفاده خواهد شد که ماتریس P باید مثبت معین و Q مثبت نیمه معین باشد. (از قضیه KY به عنوان قضیه حقیقی مثبت یا PR نیز یاد می کنند.)

نکته: در قضیه KY، سیستم مورد بحث باید حتما کنترل پذیر و پایدار مجانبی باشد.

ماتریس انتقال PR

برای سیستمهای چند ورودی چند خروجی ماتریس انتقال PR را به صورت زیر تعریف می کنیم.

ماتریس مربع G(s) را PR گوئیم اگر

۱) عناصر G(s) به ازاء مقادیر مثبت قسمت حقیقی S ($\mathrm{Re}\{s\}$) تحلیلی باشد.

۲) به ازاء $\mathrm{Re}\ \{s\} > 0$ ماتریس، $G(s)+G^T(s)$ مثبت نیمه معین باشد.

همچنین G(s) را SPR می گوئیم اگر $G(\delta-\varepsilon)$ برای $\varepsilon > 0$ ، از نوع PR باشد.

Passivity formalism

نظر به اینکه در ابتدای بحث تابع لیاپائوف، آنرا با انرژی سیستم مرتبط کردیم و چون انرژی ذخیره شده در اجزاء یک سیستم قابل جمع کردن است پس می توان گفت که تابع لیاپائوف یک سیستم مجموع توابع لیاپائوف اجزاء سیستم مرتبط می باشد.

قضیه Passivity قاعده ای را ارائه می کند که به کمک آن می توان تابع لیاپائوف را به صورت ترکیبی از توابع لیاپائوف زیر سیستم های آن بیان کرد.

این قضیه همچنین روشی را جهت تعیین تابع لیاپائوف سیستم های همراه با فیدبک پیشنهاد می دهد.

می دانیم که قانون بقای انرژی برای هر سیستم خطی یا غیرخطی همواره برقرار بوده و طبق آن داریم:

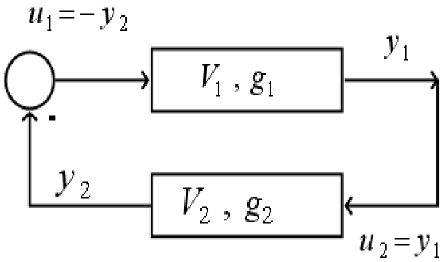
$\frac{d}{dt}$ (انرژی ذخیره شده) = (توان ورودی خارجی) + (توان تولیدی داخلی)

اگر برای یک سیستم u را ورودی و y را خروجی تعریف کنیم بنابراین حاصلضرب $y^T u$ بیانگر توان ورودی خارجی یعنی توانی که از خارج به سیستم اعمال شده است خواهد بود.

و توان تولیدی داخلی را اگر با حرف g (t) نشان دهیم بنابراین برای یک سیستم Passive طبق رابطه تعادلی انرژی داریم

$$\dot{V}(t)=y^T u-g(t)$$

توابع لیاپائوف برای بلوک دیاگرام ها



برای شکل مقابل و طبق اصل

بقای انرژی برای هر زیر سیستم داریم:

$$\dot{V}_2(t)=y_2^T u_2-g_2(t)$$

$$\dot{V}_1(t)=y_1^T u_1-g_1(t)$$

طبق رابطه موجود بین u_1 و y_2 و همچنین y_1 و u_2 می توان نوشت

$$\frac{d}{dt}[V_1(t)+V_2(t)]=-[g_1(t)+g_2(t)]$$

اگر تابع V_1+V_2 از پایین کراندار باشد (یک تابع مثبت باشد)

آنگاه می توان گفت

الف) اگر به ازاء هر $t \geq 0$ ، $0 \leq g_1(t)+g_2(t)$ باشد آنگاه V_1+V_2 از بالا کراندار خواهد بود

و $$\int_0^\infty \left[g_1(t)+g_2(t)\right]dt < \infty$$

ب) اگر علاوه بر ویژگی فوق g_1+g_2 به طور یکنواخت پیوسته باشند آنگاه زمانی که $t \to \infty$ میل می کند $\left[g_1+g_2\right]$ به سمت صفر میل خواهد کرد.

ج) اگر g_1 و g_2 هر دو غیر منفی و پیوسته یکنواخت باشند آنگاه زمانی که $t \to \infty$ میل می کند هر دو به سمت صفر میل می کنند.

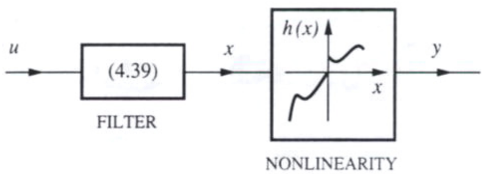
بهتر است به این نکته دقت داشته باشیم که بدون اعمال هیچ فرضیه ای بر روی V_1+V_2 یا g_1+g_2 می توان گفت که

اگر وقتی $t \to \infty$ میل می کند V_1+V_2 دارای حد معین باشد و g_1+g_2 نیز به طور یکنواخت پیوسته باشد آنگاه با میل کردن $t \to \infty$ ، $\left[g_1(t)+g_2(t)\right]$ به سمت صفر میل خواهد کرد.

برای سیستمی که توصیف کننده رابطه *بوده و در آن با توجه به توضیحات فوق V کرندار پایین و $g \geq 0$ باشد آنرا یک سیستم Passive گفته و اصطلاحا می گوئیم که بین u و y یک نگاشت غیر فعال (Passive) وجود دارد.

در ضمن یک سیستم را dissipative می گویند اگر $\int_0^\infty y^T(t)\,u(t) \neq 0$ آنگاه $\int_0^\infty g(t)\,dt > 0$ باشد

مثال : غیر فعال بودن سیستم شکل مقابل را بررسی کنید.



اطلاعات سیستم به قرار زیر است:

$$\dot{x} + \lambda(t)x = u$$

$y = G(x)$ و $\lambda(t) \geq 0$

حل : داریم

$$\frac{d}{dt}\int h(\xi)d\xi = h(x)\dot{x} = yu - \lambda(t)h(x)x$$

به ازاء تمام مقادیر x خواهیم

$$\lambda(t)\,h(x)\,dx \geq 0 \qquad \text{و} \qquad \int_0^x h(\xi)\,d\xi \geq 0$$

بنابراین با تعریف Passivity سازگار بوده و سیستم Passive تلقی می شود.

برای آنکه سیستم dissipative محسوب گردد باید $\lambda(t)$ دقیقا صفر نباشد و البته $\lambda(t)$ باید به فرم $\lambda[x(t)]$ باشد.

مثلا سیستم شکل مقابل

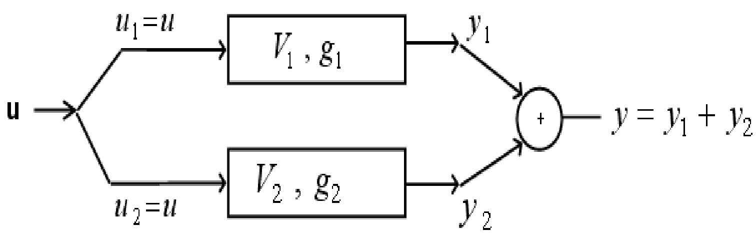
$$\dot{x} + x^3 = u$$

$$y = x - Sin^2 x$$

دارای یک نگاشت dissipdive از u به y است.

یکی از کاربردهای بحث فوق

در تعیین تابع لیاپائوف سیستم های ترکیبی موازی و همراه با فیدبک است. به شکل زیر توجه کنید:

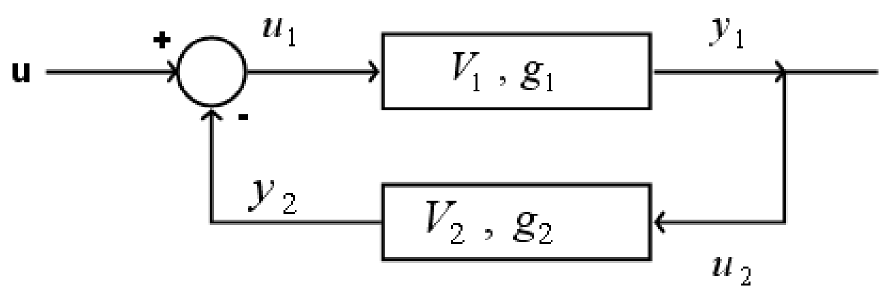


برای ترکیب موازی فوق داریم

$$y^T u = y_1^T u_1 + y_2^T u_2$$

$$= (y_1 + y_2)^T u$$

و برای شکل زیر



$$y^T u = y_1^T (u_1 + y_2) = y_1^T u_1 + y_1^T u_2 = y_1^T u_1 + u_2^T y_2$$

با توجه به روابط بدست آمده برای خروجی و ورودیِ ساختارِ سیستم های موازی و فیدبک، ملاحظه می گردد که حاصل $y^T u$ در هر دو ساختار با هم یکی است.

بنابراین به وضوح مشخص است که تابع لیاپانوف و تابع توان تولیدی داخلی در هر دو حالت با روابط زیر بیان می شوند: $V = V_1 + V_2 \quad , \quad g = g_1 + g_2$

بنابراین می توان گفت صرفنظر از نوع ترکیب موازی یا فیدبکِ زیر سیستم ها و همچنین خطی یا غیرخطی بودن آنها، تابع انرژی یا لیاپانوف سیستم و همچنین تابع توان تولیدی داخلی با روابط زیر بیان می شوند:

$$V = \sum V_i \quad , \quad g = \sum g_i$$

در ضمن باید به این مسئله نیز توجه کرد که Passive بودن یک المان هیچ ارتباطی با دامنه ورودی و یا خروجی آن ندارد. چرا که با افزایش بهره ورودی یا خروجی المان، به معنی ضرب همزمان تابع لیاپانوف V_i و تابع g_i در یک ضریب ثابت مشابه می باشد درچنین وضعیتی می گوئیم که تابع لیاپانوف سیستم برابر است با:

$$V = \sum_i \alpha_i V_i \quad , \quad g = \sum_i \alpha_i g_i$$

که α_i، حاصلضرب بهره ورودی و خروجی بلوک i می باشد.

Passivity در سیستم های خطی

یادآوری می کنیم که:

یک سیستم خطی SISO را PR (positive real) می گوئیم اگر این سیستم یا در وضـعیت پایداری مطلق باشد یا پایداری مرزی

حال چنانچه شرط زیر برقرار باشد یعنی

$$\forall \omega \geq 0 \quad , \quad \mathrm{Re}\left[G(j\omega)\right] \geq 0$$

بگونه ای که $G(s)$ تابع تبدیل سیستم باشـد، آنگـاه سیـستم را Passive مـی نـامیم. در ایـن حالت میتوان گفت که

$$\forall \omega \succ 0 \quad , \quad \left|\angle G(j\omega)\right| \leq \frac{\pi}{2}$$

در بیان ویژگی Passive بودن سیستمهای خطی بیان زیر نیز صحیح است که اگر و فقـط اگـر یک سیستم خطی SISO، مثبت حقیقی باشد (PR) آنگاه حتماً Passive نیز هـست بیـان فـوق برای یک سیستم SPR (بدون قطب روی محور $j\omega$) به شکل زیر ارائه می شود:

اگر دیاگرام نایکونیست اکیداً در نیم صفحه راست قرار گیرد یعنی:

$$\forall \omega \geq 0 \quad , \quad \mathrm{Re}\left[G(j\omega)\right] > 0$$

آنگاه سیستم را dissipative می نامند

برای سیستمهای MIMO تعاریف passivity و dissipativity به صورت زیر ارائه می گردد:

$$\forall \omega \geq 0 \quad \rightarrow \quad G(j\omega) + G^T(-j\omega) \geq 0 \quad ; \quad \text{passive سیستم}$$

$$\forall \omega \geq 0 \quad \rightarrow \quad G(j\omega) + G^T(-j\omega) > 0 \quad ; \quad \text{dissipative سیستم}$$

برهان Kalman-Yakubovich

در این مبحث می خواهیم نشان دهیم که برای سیستمهای خطی، ارتباط تنگاتنگی بین پایداری و passivity سیستمها وجود دارد.

یادآوری می کنیم که برای سیستمهای خطی پایدار به فرم $\dot{X} = AX$ و بازاء هر ماتریس متقارن مثبت Q ، ماتریس مثبت معین P به نحوی وجود خواهد داشت که $A^T P + PA = -Q$. در این حالت تابع لیاپانوف به فرم $V = \frac{1}{2} X^T PX$ انتخاب می گردد که مشتق آن عبارت خواهد بود از $\dot{V} = -\frac{1}{2} XQX$.

حال سیستم پایدار زیر را مورد بررسی قرار می دهیم.

$$\dot{X} = AX + BU \qquad , \qquad Y = CX$$

اگر همان تعریف قبلی را برای V بکار بریم.

$$V = \frac{1}{2} X^T PX$$

آنگاه داریم :

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \dot{X}^T PX + \frac{1}{2} X^T P\dot{X}$$

و یا

$$\dot{V} = \frac{1}{2} X^T A^T PX + \frac{1}{2} X^T PAX + \frac{1}{2} U^T B^T PX + \frac{1}{2} X^T PBU$$

و در نهایت خواهیم داشت .

$$\dot{V} = X^T PBU - \frac{1}{2} X^T QX$$

با توجه به تعریف $Y = CX$ ، اگر بین ماتریس های B و C رابطه $C = B^T P$ برقرار باشدعبارت فوق را یک نگاشت dissipative بین U و Y می نامیم. (قابل ذکر است که $P^T = P$)

نتیجه فوق به برهان (لِم) KY معروف است که ارتباط نزدیکی را بین مفاهیم پایداری و Passivity، بازاء انتخاب های مناسب از ورودی ها و خروجی ها، برقرار می کند.

نظریه برقراری معادله لیاپانوف بازاء هر ماتریس مثبت معین P و Q، لِم KY بیـان مـی کنـد برای هر سیستم خطی مطلقاً پایدار میتوان با انتخاب هـای مناسـب ورودی و خروجـی، تعـداد بـی شماری نگاشت ورودی-خروجی dissipative را ایجاد کرد.

توصیف Passivity سیستمهای SPR

اگر یک سیستم دارای خاصیت Passivity باشد (تحلیل رفتن انرژی آن با گذشت زمان) آنگـاه SPR بودن آن تضمین شده است

بعنوان مثال برای یک سیستمی با ضابطه $G(S)=\dfrac{10S}{4S^2+5S+1}$ بسادگی میتوان نـشان داد که SPR است (اولاً پایدار است، و درجه نسبی آن نیز یک اسـت) و در ضـمن $\mathrm{Re}[G(j\omega)]$ بـازاء $\omega>0$ همواره مثبت است. اما می خواهیم SPR بـودن آن را بـا خاصـیت passivity آن مـرتبط کنیم

تابع تبدیل فوق مربوط به یک سیستم مکانیکی همچـون جـرم، فنـر عامـل میراثـی یـا معادلـه دیفرانسیل

$$4\ddot{x}+5x+x=10u$$
$$y=\dot{x}$$

می باشد.

چـون در سیـستم مکـانیکی مـورد بحـث تحلیـل انـرژی سیـستم قطعـی اسـت پـس $G(s)$، dissipative است و SPR بدون، G(S) تضمین می شود.

میتوان موارد زیر را در مورد SPR بودن توابع تبدیل تحقیق کرد:

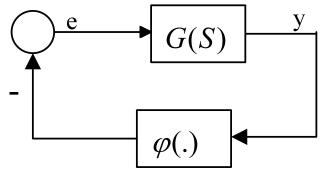
۱) اگر $H(s)$، SPR باشد $\dfrac{1}{H(s)}$ نیز SPR است

۲) اگر $H_1(s)$ و $H_2(s)$ SPR باشند، $\alpha_1H_1(s)+\alpha_2H_2(s)$ نیز SPR است

۳) اگر $H_1(s)$ و $H_2(s)$، SPR باشند، $H(s)$ با ضابطه زیر نیز SPR است

$$H(s)=\frac{H_1(s)}{1+H_1(s)H_2(s)}$$

پایداری مطلق Absolute Stability



در این بخش سیستمهایی با ساختار خـاص مقابـل را مـورد بررسی قرار می دهیم. همانگونه که ملاحظـه مـی گـردد در سیر پیشرو، یک سیستم خطی نامتغیر بـا زمـان و در مـسیر فیدبک یک عامل غیرخطی (بدون حافظه) بوجود دارد. میتوان نوشت

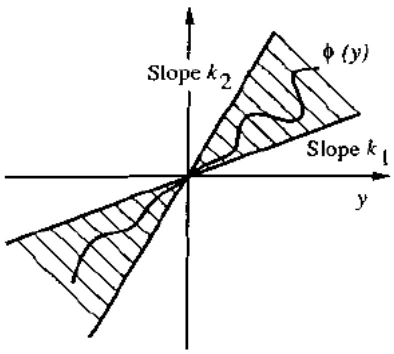
$$\dot{x} = Ax - b\varphi(y)$$

$$y = c^T x \qquad , \qquad G(s) = C(SI - A)^{-1}$$

بسیاری از سیستمهای عملی دارای چنین ویژگی هستند

جهت تحلیل پایداری چنین سیستمهای به کمک روش مستقیم لیاپـانوف، لازم اسـت کـه تـابع $\varphi(.)$ شرط قطعه ای (sector) را برآورد سازد.

تعریف



تـابع پیوسـته φ را متعلـق بـه بخـش یـا قطعـه $[K_1, K_2]$ می نامیم، اگر دو عدد غیر منفی K_1 و K_2 به گونه ای وجود داشـته باشـند کـه بـازاء y های مخالف صفر داشته باشـیم $K_1 \le \frac{\varphi(y)}{y} \le K_2$ (مطابق شکل روبرو)

دو نتیجه مهم که از تعریف φ بدست می آید این است که:

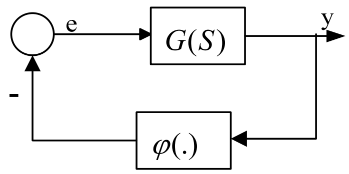
۱) $\varphi(0) = 0$

۲) $y\varphi(y) \ge 0$ بوده و این بدان معنی است که $\varphi(y)$ در ربع اول و سوم قرار خواهد گرفت.

بررسی پایداری سیستم فوق - نظریه Aizerman

اگر بازاء جمیع مقادیر K متعلق به بازه $[K_1, K_2]$ ، ماتریس $A-BC^T K$ پایدار باشد (مقادیر ویژه با قسمت حقیقی منفی باشند) آنگاه سیستم غیر خطی که با ضابطه $\varphi(.)$ تعریف شده و $\varphi(y)$ در محدوده دو شیب K_1 و K_2 قرار گیرد ، به طور مجانبی و همه جانبه پایدار است.

معیار popov



اگر سیستم توصیف شده توسط بلوک دیاگرام مقابل شرائط زیر را برآورده سازد

الف) مقادیر ویژه A همگی با جزء حقیقی منفی باشند (اصطلاحاً Hurwitz باشد) و زوج $[A,b]$ کنترل پذیر باشد

ب) عامل غیرخطی $\varphi(.)$ به بازه $[0,k]$ تعلق داشته باشد

ج) عدد مطلقاً مثبت α به گونه ای موجود باشد که

$$\forall\omega \geq 0 \qquad \mathrm{Re}\left[(1+j\alpha\omega)G(j\omega)\right]+\frac{1}{k} \geq \varepsilon$$

(ε هر عدد کوچک اختیاری است) آنگاه نقطه o پایدار مجانبی همه جانبه است

ناتساوی فوق اصطلاحاً به ناتساوی popov معروف می باشد.

ویژگی های اساسی معیار **popov** عبارتند از:

- این معیار فقط در مورد سیستمهای نامتغیر با زمان به کار گرفته می شود
- پایداری سیستم غیرخطی را می توان بدون یافتن تابع لیاپانوف مشخص و تنها با بررسی پاسخ فرکانسی توابع تبدیل زیر سیستم های خطی مورد بررسی قرار داد.
- این معیار فقط شرط کافی را نتیجه می دهد.
- تابع $\varphi(.)$ باید بدون حافظه باشد یعنی $\varphi(y)$ هرگز به مقادیر گذشته y وابسته نباشد

توصیف گرافیکی معیار popov

اگر تابع تبدیل سیستم را در فرم زیر بنویسیم

$$G(j\omega)=G_1(\omega)+jG_2(\omega)$$

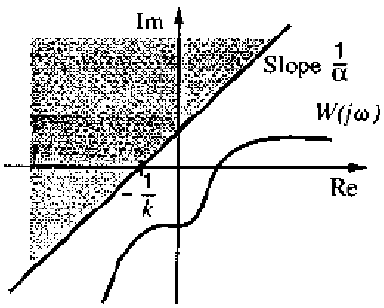
آنگاه ناتساوی popov به صورت زیر درخواهد آمد

$$G_1(j\omega)-\alpha\omega G_2(\omega)+\frac{1}{k}\geq\varepsilon$$

حال تابع تبدیل $W(j\omega)$ را به گونه ای تعریف می کنیم که

$$W(j\omega)=x+jy=G_1(\omega)+j\omega G_2(\omega)$$

حال میتوان ادعا نمود که در صفحه مختلط $y-x$ (y محور موهومی و x محور حقیقی) اگر دیاگرام قطبی $W(j\omega)$ به طور یکنواخت زیر خط $x-\alpha y+\frac{1}{k}=0$ قرار گیرد آنگاه سیستم غیرخطی به طور همه جانبه پایدار مجانبی است .(شکل مقابل)

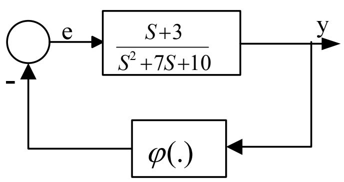


دیاگرام قطبی $W(j\omega)$ را اصطلاحاً دیاگرام popov می نامند.

تشابه خاصی بین معیار popov و معیار نایکوئیست وجود دارد. در معیار نایکوئیست پایداری سیستم حلقه بسته با قسمت موقعیت دیاگرام قطبی $G(j\omega)$ نسبت به نقطه $(0,-1)$ سنجیده می شود،

و در معیار popov پایداری سیستم حلقه بسته غیرخطی با تست موقعیت تابع تبدیل $W(j\omega)$ (که به تابع تبدیل سیستم خطی مسیر پیشرو وابسته است) نسبت به یک خط ارزیابی می شود

مثال: پایداری سیستم شکل مقابل را مورد بررسی قرار دهید؟ $o\leq\varphi(y)\leq ky$



کاملاً واضح است که سیستم خطی کاملاً پایدار است. این سیستم همچنین کنترل پذیر است چرا که هیچ حذف قطب و صفری در آن رخ نمی دهد. (به مباحث کنترل مدرن رجوع کنید)

حال ناتساوی popov را مورد بررسی قرار می دهیم

$$G(j\omega)=\frac{j\omega+3}{-\omega^2+j7\omega+10}$$

$$G_1=\frac{4\omega^2+30}{\omega^4+29\omega^2+100} \quad , \quad G_2=\frac{-\omega(\omega^2+11)}{\omega^4+29\omega^2+100}$$

لذا ناتساوی popov به شکل زیر درخواهد آمد

$$4\omega^2+30+\alpha\omega^2(\omega^2+11)+(\frac{1}{k}-\varepsilon)(\omega^4+29\omega^2+100)>0$$

رابطه فوق به طور مطلق بازاء هر $\alpha>0$ و $o<k<\infty$ برقرار است

بنابراین سیستم غیرخطی به طور همه جانبه پایدار مجانبی است

معیار دایره Circle Criterion

معیار نایکوئیست را می توان با بیانی دیگر در مورد سیستمهای غیرخطی به کار گرفت که اصطلاحاً به معیار دایره معروف است

قضیه معیار دایره

اگر سیستمی با ضابطه

$$\dot{x}=Ax-b\varphi(y)$$
$$y=c^T x$$

شرائط زیر را برآورده سازد

a) ماتریس A هیچ مقدار ویژه ای روی محور $j\omega$ نداشته و به تعداد P مقدار ویژه سمت راست محور $j\omega$ داشته باشد

b) عامل غیرخطی $\varphi(.)$ به قطعه $[k_1,k_2]$ محدود باشد.

c) یکی از موارد زیر صحیح باشد

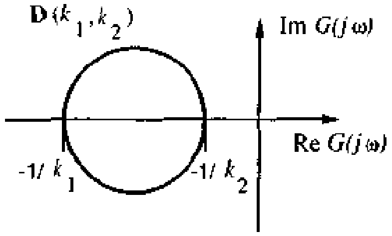
- اگر $0 < k_1 < k_2$، دیاگرام نایکوئیست $G(j\omega)$ به دیسک $D\left(k_1,k_2\right)$ وارد نشده و آنرا P بار محاط کند

- اگر $0 = k_1 < k_2$ و دیاگرام نایکوئیست $G(j\omega)$ در نیمه صفحه سمت راست $\mathrm{Re}[s] \succ -\dfrac{1}{K_2}$ بماند

- اگر $k_1 < 0 < k_2$ و دیاگرام نایکوئیست $G(j\omega)$ در داخل دیسک $D\left(k_1,k_2\right)$ واقع شود

- اگر $k_1 < k_2 < 0$، دیاگرام نایکوئیست $-G(j\omega)$ وارد دیسک $D\left(-k_1,-k_2\right)$ نشده و P بار آنرا در جهت خلاف عقربه ساعت محاط کند

آنگاه نقطه تعادل 0 سیستم به طور همه جانبه پایدار مجانبی است



شکل مقابل ساختار معیار دایره را نشان می دهد

بنابراین ملاحظه می گردد نقطه بحرانی $-\dfrac{1}{k}$ در معیار نایکوئیست، با دایره $D\left(k_1,k_2\right)$ در معیار دایره جایگزین شده است

دقت داشته باشید که معیار دایره، شرط کافی را بیان می کند نه شرط لازم

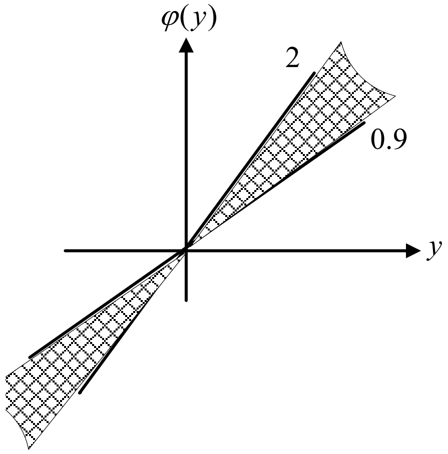
<u>مثال: پایداری سیستمی با ضابطه مقابل را مورد بررسی قرار دهید.</u>

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} x$$

$$u = -\varphi(y) \qquad \varphi(y) = 1 - \frac{e^{-2|y|}}{|y|(1+e^{-|y|})}\ ,\ |y| \geq 1$$

حل: میتوان نشان داد که $\varphi(y)$ بین y و $0.9y$ محدود است

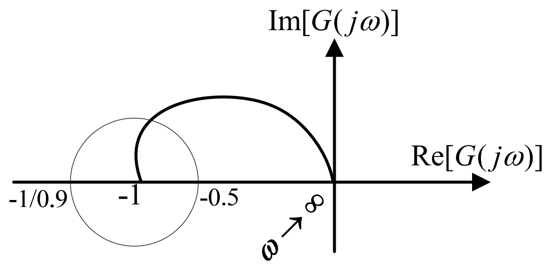


$$k_1 = 0.9 \ , \ k_2 = 2$$

از طرفی برای $G(s)$ داریم

$$G(s) = C(SI - A)^{-1}b$$
$$= \frac{-(S+1)}{S^2 + S + 1}$$

دیاگرام نایکوئیست را ترسیم می کنیم



چون دیاگرام نایکوئیست دایره را قطع کرده پس در مورد پایداری نمی توان صحبت کرد.

پایان فصل چهارم

آنالیز حوزه فرکانسی را نمی توان مستقیماً به سیستم های غیر خطی اعمال کرد چرا که توابع پاسخ فرکانسی برای سیستمهای غیرخطی، غیرقابل تعریف هستند.

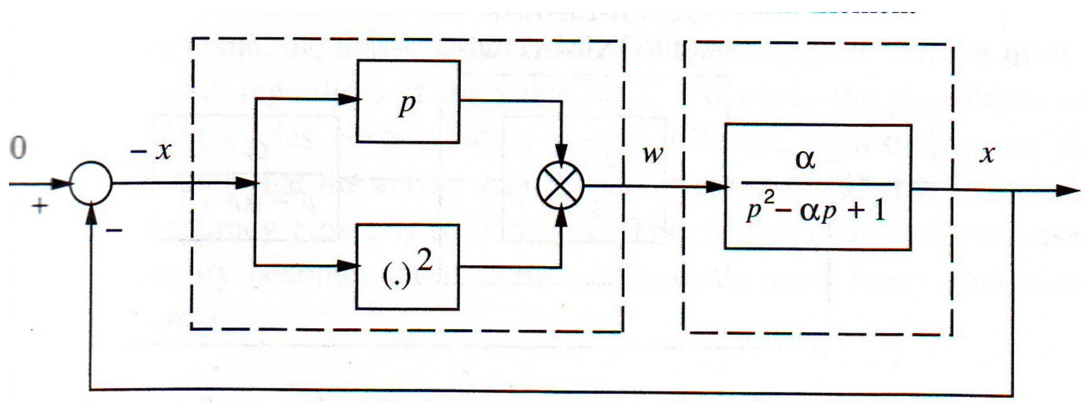
جهت بعضی از سیستم های غیرخطی به منظور پیش بینی تقریبی رفتار سیستم، نمونه خاصی از روش پاسخ فرکانسی بنام تابع توصیف بکار گرفته می شود.

این روش نسبت به سایر روش های تحلیل سیستم های غیرخطی نسبتاً یک روش سریع بوده و با آنکه جواب های آن تقریبی است، اما بخوبی و بسادگی در آنالیز رفتار سیستم به کار می آید.

جهت ارائه الگوریتم تعیین تابع توصیف نخست یک مثال ساده را بررسی می کنیم.

سیستمی غیرخطی با ضابطه $\ddot{x} + \alpha(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$ را درنظ بگیرید. قبلاً این سیستم در بحث پایداری لیاپانوف و همچنین آنالیز صفحه فاز مورد بررسی قرار گرفته بود. در همین مثال طی یک روش خاص سیکل حدی نیز مورد مطالعه قرار می گیرد..

جهت بررسی سیکل حدی در این سیستم بدین صورت بحث را دنبال می کنیم. نخست بلوک دیاگرام سیستم را به فرم زیر درنظر می گیریم.



فرض کنیم که در سیستم یک سیکل حدی موجود بوده و سیگنال خروجی در این وضعیت به شکل $x(t) = A\sin\omega t$ باشد.

بنابراین سیگنال خروجی بلوک غیرخطی عبارتست از

$$w = -x^2\dot{x} = -A^2\sin^2(\omega t)A\omega\cos(\omega t)$$

دقت داشته باشید که معادله دیفرانسیل اولیه به فرم زیر نوشته شده تا آنکه بتوانیم قسمتهای خطی و غیرخطی آنرا جدا کنیم

$$\ddot{x} + \alpha x^2 \dot{x} - \alpha \dot{x} + x = 0$$

که مساوی است با

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + x - (-\alpha x^2 \dot{x}) = 0$$

مجدداً به رابطه w برمی گردیم

$$w = -\frac{A^3 \omega}{2}\big(1 - \cos(2\omega t)\big)\cos(\omega t) = -\frac{A^3 \omega}{4}\big(\cos(\omega t) - \cos(3\omega t)\big)$$

میتوان عملاً سیگنال w را به فرم زیر تقریب زد. (با صرفنظر کردن از هارمونیک سوم)

$$w \approx -\frac{A^3}{4}\omega \cos(\omega t)$$

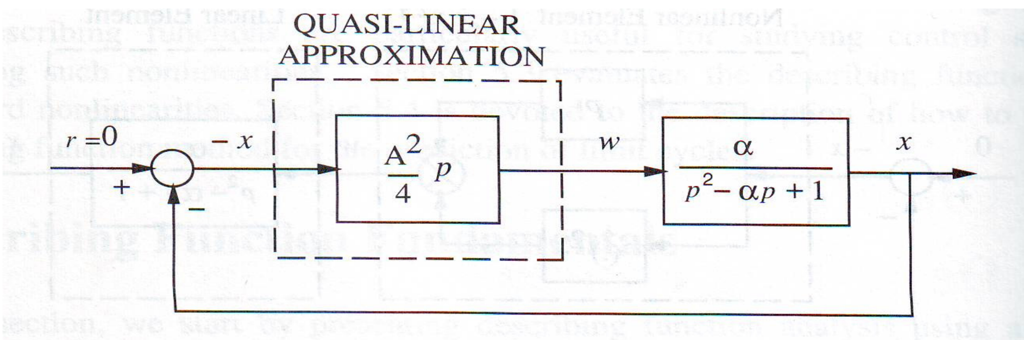
و یا به عبارتی میتوان نوشت

$$w = -\frac{A^3}{4}\frac{d}{dt}(-A\sin(\omega t))$$

باتوجه به اینکه ورودی بلوک غیرخطی $-x$ و خروجی آن w است پس میتوان گفت که فرم تقریب زده شده بلوک غیرخطی به صورت زیر است.

$$\xrightarrow{-x} \boxed{\text{غیر خطی}} \xrightarrow{w} \quad \equiv \quad \xrightarrow{-x} \boxed{\frac{A^2}{4}s} \xrightarrow{w}$$

باتوجه به تقریب بکار رفته اصطلاحاً نمایش معادل فوق را نمایش نیمه خطی (quasi-linear) بلوک غیرخطی می گوئیم که در مجموع در ساختار بلوک دیاگرامی زیر خود را نشان می دهد.



نکته مهم: تابع تبدیل بلوک نیمه خطی به دامنه سیگنال ورودی وابسته است. (دقیقا برخلاف سیستم های خطی که چنین وابستگی وجود ندارد)

رابطه بین w و x را در حوزه فرکانس ω مورد بررسی قرار می دهیم.

$$w = N(A,\omega)(-x)$$

که

$$N(A,\omega) = \frac{A^2}{4}(j\omega)$$

با توجه به اینکه از ابتدا فرض کرده بودیم

$$x = A\sin(\omega t)$$

است. پس باتوجه به بلوک دیاگرام خطی شده سیستم داریم.

$$G(j\omega)N(A,\omega)(-x) = x$$

که $G(j\omega)$ تابع تبدیل بلوک خطی سیستم است.

از رابطه فوق میتوان نوشت

$$\left(1 + G(j\omega)N(A,\omega)\right)x = 0$$
$$\rightarrow 1 + G(j\omega)N(A,\omega) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{A^2(j\omega)}{4}\frac{\alpha}{(j\omega)^2 - \alpha(j\omega) + 1} = 0$$

با حل معادله فوق بدست خواهیم آورد.

(فرکانس و اندازه ای که به ازاء آن دیاگرام نایکوئیست از نقطه ۱- عبور می کند) $\omega = 1$ و $A = 2$

از طرف دیگر با استناد به تابع تبدیل حلقه بسته سیستم معادله مشخصه سیستم عبارتست از

$$1 + \frac{A^2 S}{4} \times \frac{\alpha}{S^2 - \alpha S + 1}$$

که جوابهای این معادله (مقادیر ویژه سیستم) خواهند بود.

$$S_{1,2} = -\frac{1}{8}\alpha(A^2 - 4) \pm \sqrt{\frac{1}{64}\alpha^2(A^2 - 4)^2 - 1}$$

حال می خواهیم با استناد به مقدار A بدست آمده در پاسخ فرکانسی $(A=2)$قطبهای سیستم را بیابیم. اگر $A=2$ باشد

$$S_{1,2}=\pm j$$

قطب روی محور $j\omega$ معرف حضور یک سیکل حدی است که دامنهٔ آن ۲ و فرکانس آن ۱ می باشد

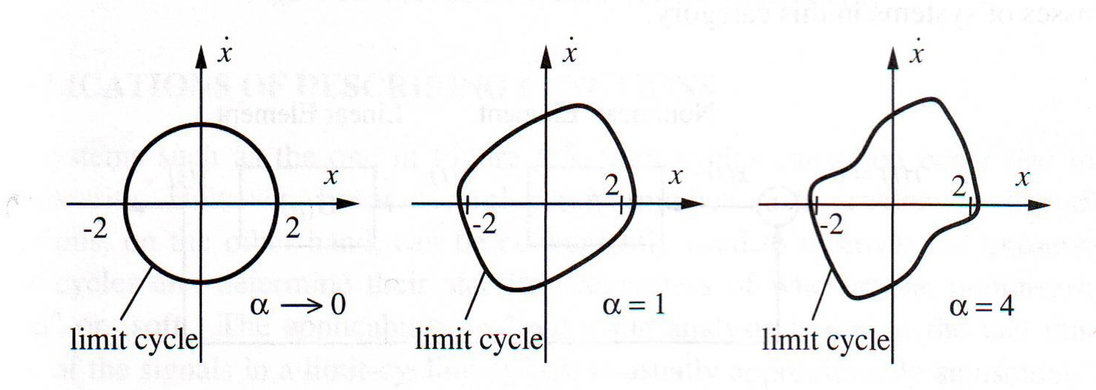
نکته: دامنه و فرکانس سیکل حدی به α هیچ ارتباطی ندارد. البته این مسئله فقط به خاطر تقریب در فرم غیرخطی بلوک می باشد.

اگر آنالیز صفحه فازی را برای سیستم تقریب زده شده و سیستم واقعی ترسیم کنیم به نتیجه جالبی می رسیم و آن اینکه:

در فرم خطی شده، سیکل حدی دایره ای به شعاع ۲ خواهد بود (بدون توجه به α)

اما اگر سیستم را در فرم کاملاً غیرخطی آنالیز کنیم ملاحظه می شود که:

وقتی α را خیلی کوچک در نظر می گیریم، سیکل حدی موجود به سمت دایره میل می کند (شکل a) و وقتی α برابر یک انتخاب می گردد، شکل ظاهری سیکل حدی به دایره نسبتاً نزدیک است، (شکلb). و در نهایت اگر $\alpha=4$ انتخاب شود، شکل سیکل حدی با دایره تفاوت زیادی دارد، و این روند کاملاً منطقی است چرا که با رشد α عامل غیرخطی سیستم نمود بیشتری خواهد یافت و لذا تقریب نیمه خطی به کار رفته از دقت کمتری برخوردار خواهد بود. (به شکل های زیر دقت کنید.)



پایداری سیکل حدی نیز را میتوان بسادگی مطالعه کرد.

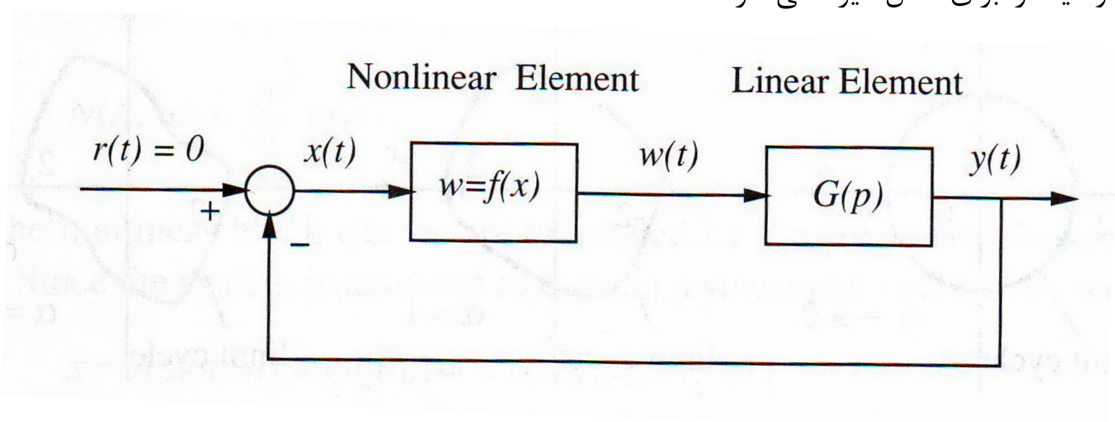
مثلا اگر دامنه سیکل حدی را بزرگتر از ۲ اختیار کنیم $(A > 2)$ آنگاه مقادیر ویژه سیستم در سمت راست صفحه مختلط قرار خواهند گرفت و مسیرهای حالت وضعیت واگرا خواهند داشت و در نهایت به روی سیکل حدی قرار می گیرند و این یعنی پایداری سیکل حدی با دامنه ۲.

باید دقت داشت که در آنالیز تقریبی فوق، مرحله اصلی کار جایگزینی بلوک غیرخطی سیستم با بلوک نیمه خطی $\boldsymbol{S}\dfrac{\boldsymbol{A}^2}{4}$ بود. دامنه و فرکانس سیکل حدی نیز توسط رابطه $\mathbf{1}+\boldsymbol{G}(\boldsymbol{j\omega})\boldsymbol{N}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\omega})=\mathbf{0}$ بدست می آید.

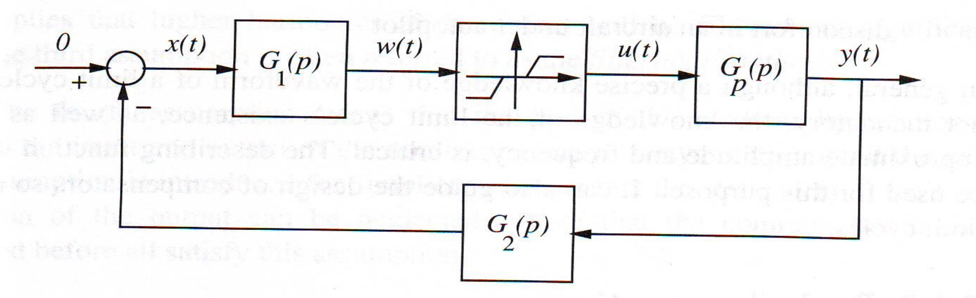
$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\omega})$ همان بلوک نیمه خطی سیستم است که از این به بعد آنرا تابع توصیف (describing function) عامل غیرخطی سیستم می نامیم.

<u>سؤال: برای چه نوع از سیستمهای غیرخطی می توان توابع توصیف مشخص کرد، آیا این سیستم غیرخطی باید دارای ویژگی خاصی باشد؟</u>

<u>پاسخ</u>: به طور کامل هر سیستمی که بتوان ساختار آن را مطابق بلوک دیاگرام زیر درآورد قابلیت تعریف تابع توصیف را برای عامل غیرخطی دارد.



بلوک دیاگرام سیستم های صنعتی همراه با عامل اشباع



این بلوک دیاگرام را میتوان بسادگی به فرم شکل قبل درآورد.

کاربردهای توابع توصیف

۱- پیش بینی سیکل حدی

نمایش های خطی از یک سیستم واقعی که دارای عوامل غیرخطی هستند، هرگز نمی توانند سیکل های حدی را پیشگویی کنند، اما توابع توصیف معادل با عامل غیرخطی بسادگی این قابلیت دارند.

۲- تعیین پایداری سیستم غیرخطی

صرفنظر از سخت بودن یا نرم بودن عامل غیرخطی، تابع توصیف میتواند در پایداری یا ناپایداری سیکل حدی تعیین کننده باشد.

در ادامه بحث، به بررسی مقدمات لازم جهت ارائه روش کلاسیک تعیین تابع توصیف خواهیم پرداخت.

نخست بررسی فرضیات لازم برای تعریف یک تابع توصیف.

فرضیات اساسی

جهت ارائه تابع توصیف برای عامل غیرخطی، سیستم باید ۴ شرط زیر را برآورده سازد .

۱- در بلوک دیاگرام سیستم تنها یک عامل غیرخطی موجود باشد.

۲- عامل غیرخطی باید نامتغیر با زمان باشد.

۳- نظر به فرم سینوسی سیگنال ورودی $x = \sin(\omega t)$، تنها مؤلفه اصلی سیگنال خروجی عامل غیرخطی یعنی $w_1(t)$ مورد توجه قرار گیرد.

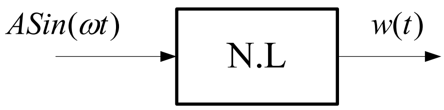
۴- عامل غیرخطی یک تابع فرد باشد.

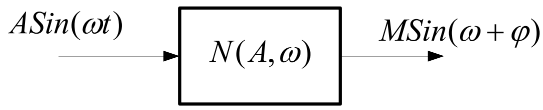
فرض سوم جزء فرضیات اصلی در تعریف تابع توصیف است. این فرض بیان می دارد که در حقیقت تابع تبدیل $G(S)$ عاملِ خطی، همانند یک فیلتر پایین گذر عمل کرده و تنها اجازه عبور هارمونیک اول سیگنال بدست آمده در خروجی عامل غیر خطی را می دهد. که البته اگر این فرض دور از واقعیت باشد تقریب نیمه خطی بوجود آمده نمی تواند نتایج صحیحی را در تشخیص سیکل های حدی احتمالی بدست دهد.

تعاریف اساسی در تابع توصیف

در این بخش می خواهیم روش عمومی تعیین تابع توصیف را شرح دهیم .

روش کار بدین قرار است که مطابق شکل زیر یک سیگنال سینوسی با دامنه A و فرکانس ω به عامل غیر خطی اعمال می گردد. خروجی المان غیر خطی اغلب یک سیگنال پریودیک و عموما یک سیگنال غیر سینوسی است.





با به کار بردن سری فوریه خواهیم داشت.

$$w(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n Cos(n\omega t) + b_n Sin(n\omega t)\right]$$
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} w(t)d(\omega t)$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} w(t)Cos(n\omega t)d(\omega t)$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} w(t)Sin(n\omega t)d(\omega t)$$

با توجه به فرض فرد بودن تابع $w(t)$، a_0 مساوی صفر خواهد شد. و با توجه به اینکه فقط هارمونیک اول مورد توجه خواهد بود بنابراین داریم. $w(t) \approx w_1(t) = a_1 Cos(\omega t) + b_1 Sin(\omega t) = M\ Sin(\omega t + \varphi)$

که M و φ تابعی از ω و A بوده و به صورت زیر بیان می شوند.

$$M(A,\omega) = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad , \quad \varphi(A,\omega) = tg^{-1}(a_1/b_1)$$

با توجه به توضیحات فوق عامل خطی که جایگزین عامل غیر خطی خواهد شد، با ضابطه زیر که برابر نسبت خروجی سیستم به ورودی آن تعریف می شود، معادل خواهد شد.

$$N(A,\omega) = \frac{Me^{j(\omega t+\varphi)}}{Ae^{j\omega t}} = \frac{M}{A}e^{j\varphi} = \frac{1}{A}(b_1 + ja_1)$$

$N(A,\omega)$ همان تابع توصیف جایگزین عامل غیر خطی است.

در ظاهر $N(A,\omega)$ ، همچون پاسخ فر کانسیِ یک عامل خطی عمل می کند. چرا که در تعریف پاسخ فرکانسی نیز دامنه خروجی سیستم به ورودی آن تقسیم می شد.

با این تفاوت که در سیستم خطی، پاسخ فرکانسی تابعی از دامنه ورودی نبوده ، اما همانگونه که ملاحظه می گردد پاسخ فرکانسی تابع توصیف، به دامنه A وابسته است.

معمولا تابع توصیف به دامنه و فرکانس سیگنال ورودی وابسته بوده که البته در بعضی حالات استثناء نیز وجود دارد ، مثلا به طور کلی می توان گفت که اگر عامل غیر خطی تک مقداره (single-valued) باشد، آنگاه $N(A,\omega)$ مستقل از فرکانس است.

از طرفی به خاطر آنکه سیگنال خروجی عامل غیر خطی به عنوان یک سیگنال فرد فرض شده بوده است پس $a_1=0$ گردیده و به بیانی دیگر $N(A,\omega)$ یک عبارت کاملا حقیقی خواهد بود.

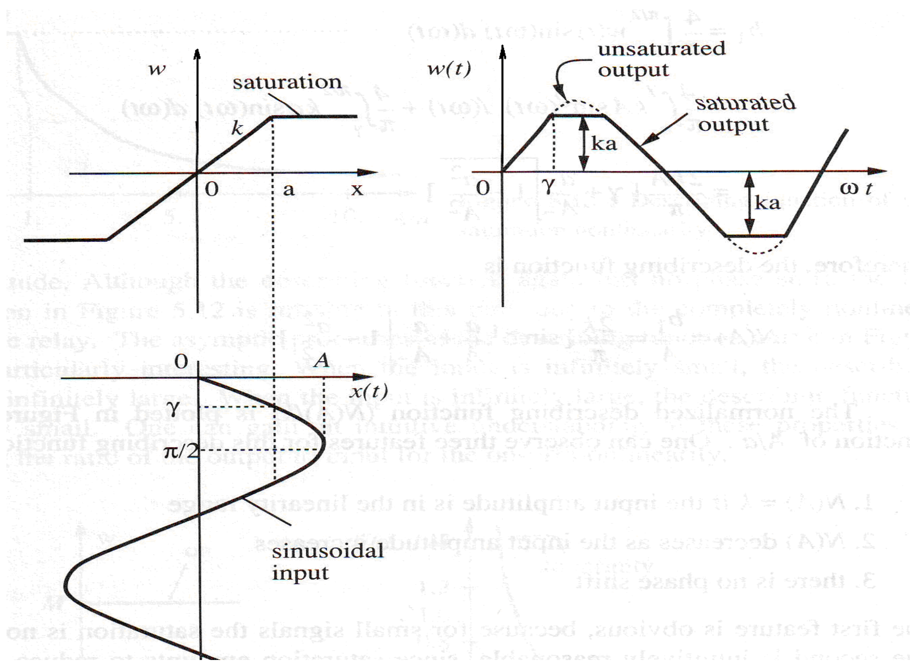
نکته : تابع توصیف برای المان های غیر خطی که شامل دینامیک بوده (با یک معادله دیفرانشیل غیر خطی بیان می گردد) نیز کاملا قابل اجرا است.

تابع توصیف عوامل غیر خطی مشترک در سیستمها

در ادامه بحث به نحوه محاسبه تابع توصیف عوامل غیر خطی خواهیم پرداخت.

تابع توصیف معرف عامل اشباع

رابطه بین ورودی و خروجی عامل اشباع در شکل های زیر ترسیم شده است.



در شکل فوق ، a و K محدوده قسمت خطی عامل اشباع را نشان می دهند. با توجه به اینکه عامل اشباع بعنوان یک تابع تک مقداره بیان می شود. پس طبق بحث های قبل، انتظار می رود که تابع توصیفِ عامل اشباع ، یک تابع حقیقی از دامنه ورودی گردد.

برای عامل اشباع می توان سیگنال $w(t)$ را با ضابطه زیر تعریف کرد.

$$w(t)=\begin{cases} KASin(\omega t) & 0<\omega t<\gamma \\ Ka & \gamma<\omega t<\pi/2 \end{cases}$$

که $\gamma=Sin^{-1}(a/A)$

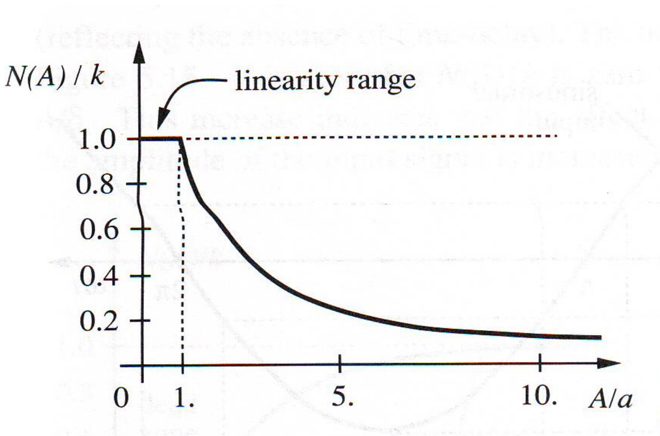
چون $w(t)$ تابع فرد است پس در بسط فوریه آن ضریب a_1 مساوی صفر خواهد شد و ضریب b_1 برابر با

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} w(t)Sin(\omega t)d(\omega t) \\ &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\gamma} KASin^2(\omega t)d(\omega t)+\frac{4}{\pi}\int_{\gamma}^{\pi/2} KaSin(\omega t)d(\omega t)=\frac{2KA}{\pi}\left[\gamma+\frac{a}{A}\sqrt{1-\frac{a^2}{A^2}}\right] \end{aligned}$$

بنابراین تابع توصیف $N(A)$ عبارت خواهد بود از

$$N(A)=\frac{b_1}{A}=\frac{2K}{\pi}\left[Sin^{-1}\frac{a}{A}+\frac{a}{A}\sqrt{1-\frac{a^2}{A^2}}\right]$$

اگر منحنی تغییرات نسبت $\frac{N(A)}{K}$ را که اصطلاحا به آن تابع توصیف نرمالیزه شده می گویند، بر حسب $\frac{A}{a}$رسم کنیم شکل زیر حاصل خواهد شد.



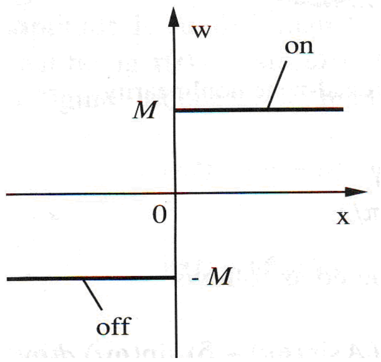
و نتایج زیر بدست می آید.

۱) اگر دامنه ورودی در محدوده خطیِ عامل اشباع باشد آنگاه $N(A)=K$ خواهد بود.

۲) اگر دامنه ورودی بیش از محدوده خطی عامل اشباع باشد آنگاه اندازه $N(A)$ کاهش خواهد یافت.

۳) چون بین ورودی و خروجی $N(A)$ اختلاف فازی وجود ندارد، بنابراین عامل اشباع هیچگونه تاخیری بین ورودی و خروجی ایجاد نمی کند.

تابع توصیف معرف عامل قطع و وصل (on/off)



منحنی عملکرد این عامل در شکل مقابل ترسیم شده است.

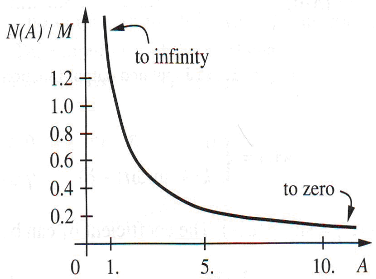
این عامل شباهت های ویژه ای با عامل اشباع دارد چرا که در عامل اشباع اگر $a \to 0$ و $K \to \infty$ میل کند آنگاه دقیقا مشخصه عامل قطع و وصل بدست می اید.

بنابراین b_1 برابر خواهد شد با :

$$b_1 = \frac{4}{\pi}\int_{\gamma}^{\pi/2} MSin(\omega t)d(\omega t) = \frac{4}{\pi}M$$

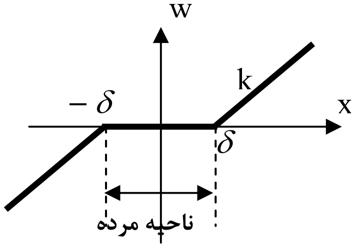
بنابراین تابع توصیف عبارت خواهد بود از :

$$N(A) = \frac{4M}{\pi A}$$

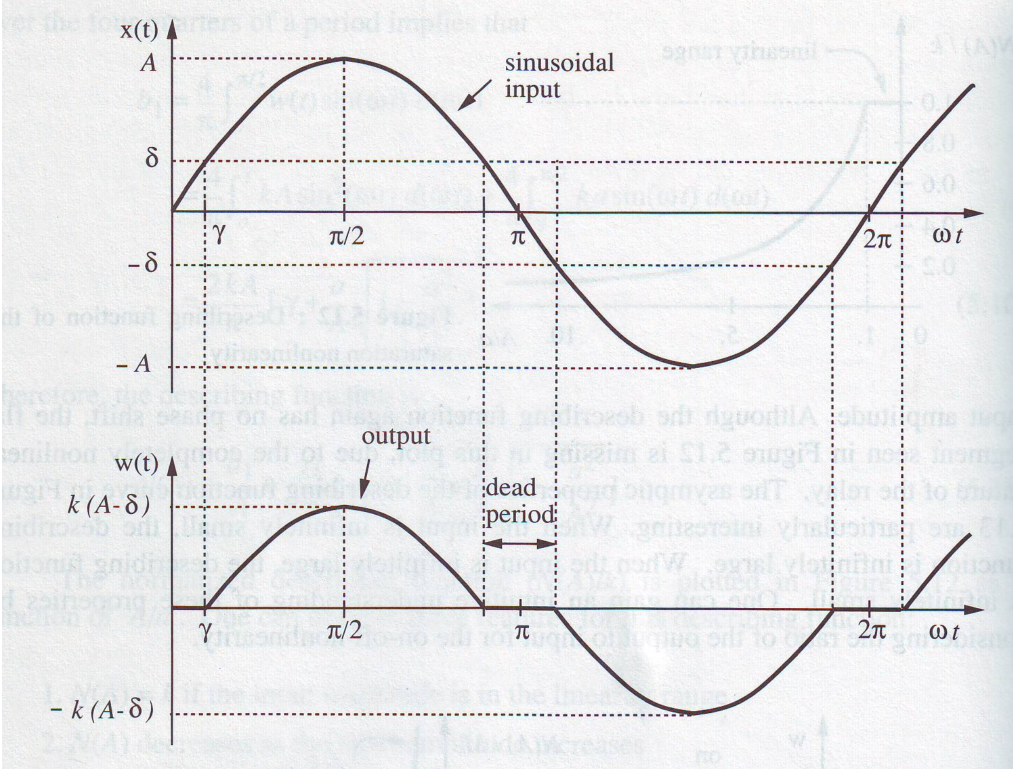


نمایش تابع توصیف نرمالیزه شده $\frac{N(A)}{M}$ در شکل مقابل بر حسب دامنه ورودی ترسیم شده است.

تابع توصیف معرف عامل ناحیه مرده (dead-Zone)



منحنی مشخصه این عامل در شکل مقابل نشان داده شده است. پاسخ یک سیستم با عامل ناحیه مرده ، به ورودی سینوسی $x(t) = ASin\omega t$ و با فرض انکه $A \geq \delta$ باشد در شکل زیر نشان داده شده است.



و سیگنال w(t) با ضابطه زیر قابل تعریف است.

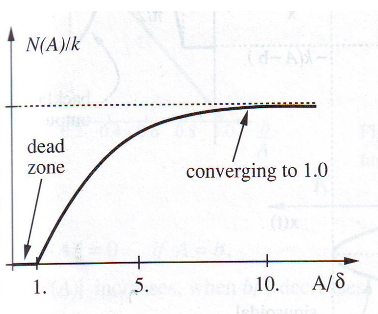
$$w(t)=\begin{cases}0 & 0\le \omega t<\gamma \\ K(ASin(\omega t)-\delta) & \gamma<\omega t\le \pi/2\end{cases}$$

که $\gamma=Sin^{-1}(\delta/A)$. کاملا مشخص است که به خاطر فرد بـودن w(t) ، ضـریب a_1 در بـسط فوریـه صفر و ضریب b_1 عبارتست از :

$$b_1=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} w(t)Sin(\omega t)d(\omega t)=\frac{4}{\pi}\int_\gamma^{\pi/2} K(ASin(\omega t)-\delta)Sin(\omega t)d(\omega t)$$
$$=\frac{2KA}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-Sin^{-1}\frac{\delta}{A}-\frac{\delta}{A}\sqrt{1-\frac{\delta^2}{A^2}}\right]$$

و در نتیجه تابع توصیف برابر است با :

$$N(A)=\frac{2K}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-Sin^{-1}\frac{\delta}{A}-\frac{\delta}{A}\sqrt{1-\frac{\delta^2}{A^2}}\right]$$

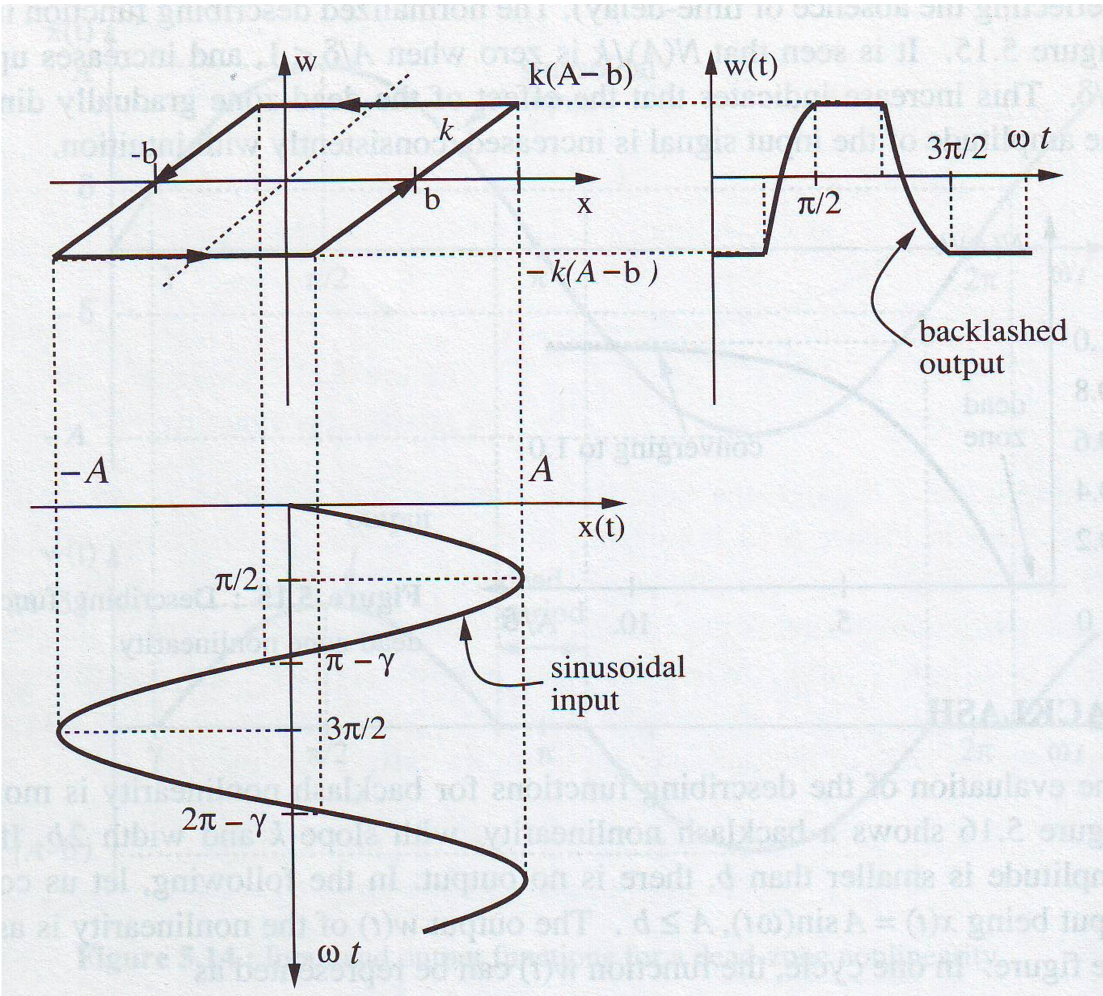


در اینجا نیز ملاحظه می کنیم که چون N(A) یک تـابع حقیقـی است پس هیچگونه انتقـال فـازی بـین ورودی و خروجـی نـداریم. منحنی تغییرات تابع توصیف نرمایزه شده $(N(A)/K)$ در شـکل مقابل ترسیم شده است.

با توجه به منحنی کاملا روشن است که افزایش مقدار تابع توصیف بازاء افزایش دامنــه ورودی معـرف آنـست که اثر عامل ناحیه مرده با افزایش دامنه ورودی کم رنگ می شود.

تابع توصیف معرف عامل (backlash)

در شکل زیر مشخصه عامل backlash و پاسخ آن بازاء ورودی سینوسی ترسیم شده است.



برای یک سیکل، می توان سیگنال $w(t)$ را به فرم زیر نمایش داد.

$$w(t) = (A-b)K \qquad \frac{\pi}{2} < \omega t \le \pi - \gamma$$

$$w(t) = (A\sin(\omega t) + b)K \qquad \pi - \gamma < \omega t \le \frac{3\pi}{2}$$

$$w(t) = -(A-b)K \qquad \frac{3\pi}{2} < \omega t \le 2\pi - \gamma$$

$$w(t) = (A\sin(\omega t) - b)K \qquad 2\pi - \gamma < \omega t \le \frac{5\pi}{2}$$

که $\gamma = Sin^{-1}(1-2b/A)$. بر خلاف وضعیت های قبل، در اینجا سیگنال $w(t)$ نه فرد است و نـه زوج .

بنابراین ضرائب a_1 و b_1 هر دو مخالف صفرند. با حل انتگرال های مربوطه این ضرائب برابر خواهنـد شـد با:

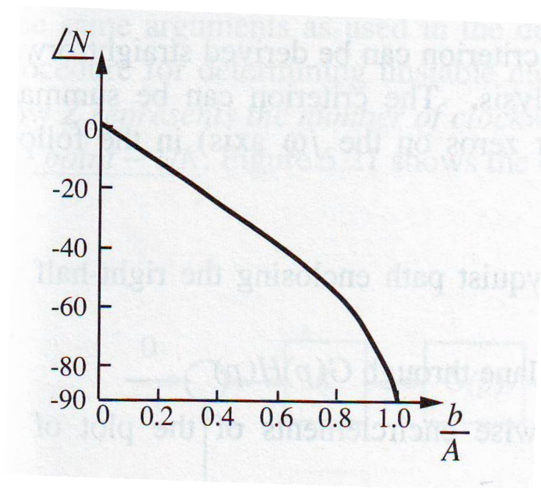
$$a_1 = \frac{4Kb}{\pi}\left(\frac{b}{A}-1\right)$$

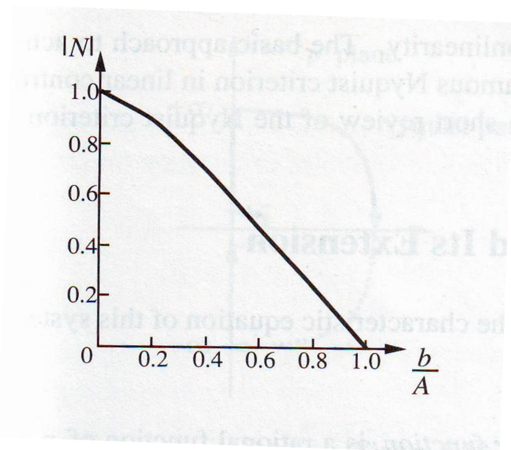
$$b_1 = \frac{KA}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - Sin^{-1}\left(\frac{2b}{A}-1\right) - \left(\frac{2b}{A}-1\right)\sqrt{1-\left(\frac{2b}{A}-1\right)^2}\right]$$

بنابراین تابع توصیف عامل backlash عبارت خواهد بود از:

$$|N(A)| = \frac{1}{A}\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \qquad , \qquad \angle N(A) = \tan^{-1}(a_1 / b_1)$$

منحنی اندازه و فاز تابع توصیف در شکل های زیر آورده شده است.





موارد مهم بدست آمده از منحنی اندازه عبارتند از :

۱) اگر A=b باشد آنگاه $|N(A) = 0|$

۲) با کاهش b/A آنگاه $|N(A)|$ افزایش خواهد یافت.

۳) اگر $b/A \to 0$ میل کند آنگاه $|N(A)| \to 1$ میل خواهد کرد.

در رابطه با منحنی فاز نیز می توان این نتایج را استخراج کرد که :

۱) حداکثر تاخیر فاز بوجود آمده برابر است با ۹۰ درجه

۲) تاخیر فاز بوجود آمده ، ناشی از تاخیر زمانی موجود در عامـل backlash اسـت (فاصلـه b پدیـد آورنده تاخیر است) که در سایر عوامل غیر خطی قبلی وجود نداشت.

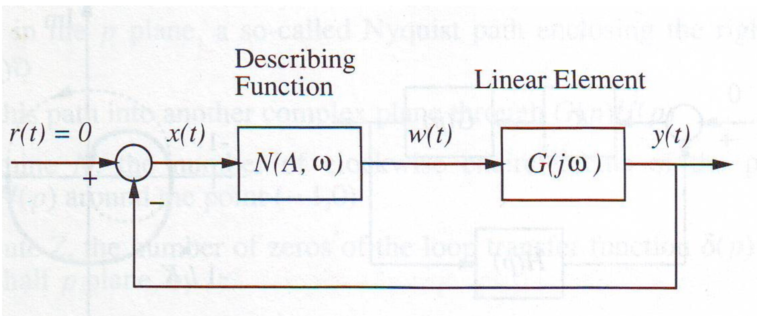
البته باید توجه داشت که مقادیر بزرگتر b منجر به تاخیر فازهای بزرگتر خواهد شد که می تواند ناپایـداری سیستم را باعث شود.

آنالیز توابع توصیف برای سیستمهای غیر خطی

در بخش قبل آموختیم که چگونه می توان برای یک سیستم غیر خطیِ همراه با یک جـزء غیـر خطـی، تابع توصیف را استخراج کرد. در مرحله بعد ی بر اساس نمایش تابع توصیف سیستم غیر خطی، روشی را در جهت پیش بینی حضور سیکل حدی معرفی می نمائیم.
در این راستا معیار نایکوئیست بسط یافته را که قبلا در سیستمهای خطی با آن آشنا شده ایم، بکار مـی گیریم.

بررسی وجود سیکل حدی در سیستم غیر خطی

فرض کنید که نوساناتی با دامنه A و فرکانس ω به طور ماندگار در بلوک دیاگرام سیستم شکلِ زیر برقرار است



با توجه به ساختار موجود، روابط زیر را می توان نوشت

$$x = -y$$
$$w = N(A,\omega)x\ .$$
$$y = G(j\omega)w$$

پس داریم.

$$y = G(j\omega)N(A,\omega)(-y)$$

چون y مخالف صفر است (فرض کرده بودیم نوسان داریم) ، بنابر این

$$G(j\omega)N(A,\omega)+1=0$$

و یا می توان نوشت.

$$G(j\omega)=\frac{-1}{N(A,\omega)} \quad ❊$$

بنابراین اگر در سیستم سیکل حدی وجود داشته باشد، بایستی رابطه فوق برقرار گـردد و ایـن بـدان معنـی است که اگر معادله فوق جوابی نداشته باشد پس در سیستم سیکل حدی نداریم.

معادله فوق خود بیانگر دو معادله غیر خطی است، چرا که $G(j\omega)$ یک جزء حقیقی و یک جزء موهومی داشته و هر کدام با عبارت $N(A,\omega)$ یک معادله غیر خطی را تشکیل می دهد. که با توجه به ساختار $N(A,\omega)$ ، تعداد جواب های بیشماری بدست می آید. معمولا حل معادلات غیر خطی به روش تحلیلی مشکل است، خصوصا اگر درجه $G(S)$ بزرگ باشد. به همین دلیل یک روش گرافیکی جهت حل این مشکل پیشنهاد می شود.

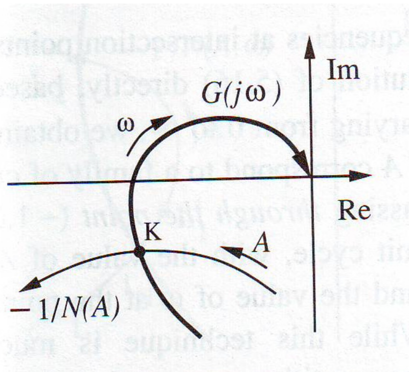
ایده اصلی در حل گرافیکی معادله فوق، ترسیم دو منحنی $G(j\omega)$ و $\dfrac{-1}{N(A,\omega)}$ در صفحه مختلط و تعیین محل برخورد آن دو است.

جهت بررسی روانترِ روش گرافیکیِ تعیین جوابهای معادله * ، نخست فرض می کنیم که تابع توصیف مستقل از ω باشد.

<u>۱)روش تعیین سیکل حدی اگر $N(A,\omega)$ مستقل از ω باشد</u>

در این حالت داریم $G(j\omega) = -\dfrac{1}{N(A)}$.

سیستمهای غیر خطی همراه با المان اشباع، ناحیه مرده یا backlash دارای ویژگی فوق هستند. اما مراحل کار جهت تعیین محل برخورد دو منحنی عبارتند از:



الف) در صفحه مختلط ، $G(j\omega)$ را بازاء تغییرات ω و $-\dfrac{1}{N(A)}$ را بازاء تغییرات A ترسیم می کنیم. (شکل مقابل)

ب) اگر دو منحنی نقطه برخوردی داشته باشند آنگاه یک سیکل حدی با دامنه A و فرکانس ω در سیستم غیر خطی وجود خواهد داشت.

و اگر تعداد دفعات برخورد n بار باشد، آنگاه n سیکل حدی وجود خواهد داشت. اینکه در عمل کدامین سیکل حدی برقرار می گردد، دقیقا به شرائط اولیه حاکم بر سیستم، وابسته خواهد بود.

در شکل فوق نقطه برخورد منفرد بوده (نقطه K) و در نتیجه دامنه نوسان سیکل حدی بوجود آمده برابر A_K و فرکانس نوسان ω_K می باشد.

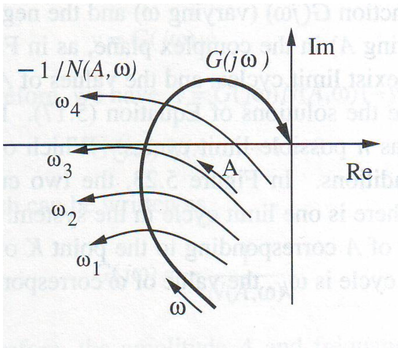
<u>نکته بسیار مهم</u> : روش فوق فقط حضور سیکل حدی را پیش گویی می کند و شاید این پیش گویی صحت نداشته باشد. چرا که $N(A,\omega)$ یک فرم نیمه خطی تقریبی دارد. جهت تائید این پیش گویی لازم

است که شبیه سازی کامپیوتری و حل دقیق مسئله با حضور عوامل غیر خطی انجام گرفته و پاسخ واقعی را یافت.

۲)روش تعیین سیکل حدی اگر $N(A,\omega)$ به ω وابسته باشد

در این حالت داریم $G(j\omega)=-\dfrac{1}{N(A,\omega)}$

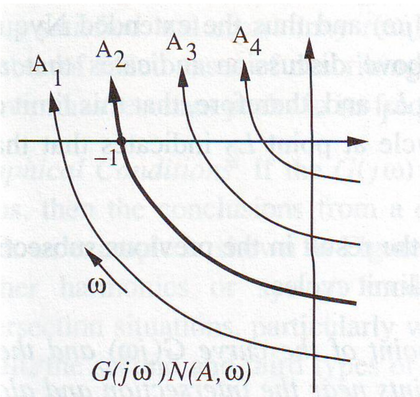
مراحل کار در این بخش مشابه قبل خواهد بود با این تفاوت که در اینجا خانواده ای از منحنی های مربوط به عبارت $-\dfrac{1}{N(A,\omega)}$ و بازاء ω های مختلف بدست خواهد آمد.



همانگونه که از شکل مقابل مشخص است، محل برخورد $-\dfrac{1}{N(A,\omega)}$ و $G(j\omega)$ نقاط بسیار زیادی است و تنها محل برخوردهایی قابل قبول است که با ω مربوط به $G(j\omega)$ مطابقت داشته باشد.

قاعدتا تطبیق فرکانس ω کار بسیار مشکل و زمان بری است. لذا به منظور اجتناب از اتلاف وقت در یافتن فرکانس ω مناسب، بهتر است که راه حل گرافیکی معادله * به طور مستقیم ارائه گردد.

در این روش با ثابت نگه داشتن مقدار A و تغییر فرکانس ω از ۰ تا ∞ منحنی $G(j\omega)N(A,\omega)$ ترسیم می گردد.



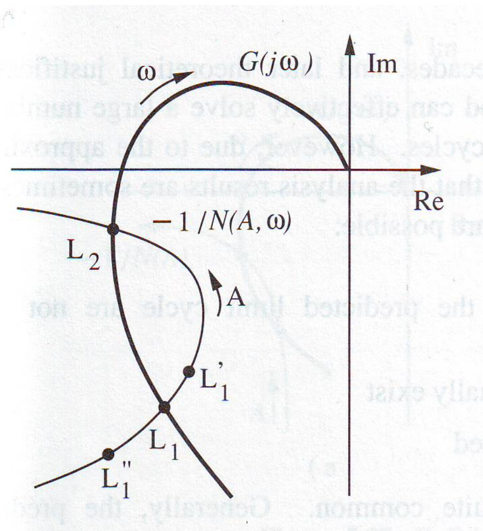
آنگاه با تغییر مقدار A و ثابت نگه داشتن مجدد آن دوباره فرکانس ω را از ۰ تا ∞ تغییر داده و منحنی جدیدی از $G(j\omega)N(A,\omega)$ را ترسیم می کنیم که در نتیجه خانواده ای از این منحنی ها مطابق شکل روبرو بدست می آید.

اگر بتوان منحنی یافت که از نقطه $-1+j0$ عبور کند ، یعنی آنکه در سیستم مورد بحث یک سیکل حدی وجود دارد.

دامنه نوسان سیکل حدی برای شکل فوق برابر A_2 و فرکانس نوسان عبارتست از مقدار ω در مکانی که منحنی از نقطه $-1+j0$ عبور می کند.

در بحث فوق، حضور یا عدم حضور سیکل حدی مورد بررسی قرار گرفت. حال این سوال مطرح است که چگونه می توان پایداری یا ناپایداری سیکل حدی را مشخص نمود؟

با ارائه یک روش توسعه یافته از معیار نایکوئیست می توان تا حدودی نسبتا مطلوب به سوال فوق پاسخ داد.



شکل مقابل ترسیم دیاگرام های قطبی $G(j\omega)$ و قرینه معکوس تابع توصیف را نشان می دهد.

در این شکل دو محل برخورد دیده می شود و این بدان معنی است که احتمالا در سیستم مورد بحث ۲ سیکل حدی وجود دارد. با توجه به جهت تغییر پارامتر A می توان گفت که مقدار A مربوط به نقطه L_1، کوچکتر از مقدار A مربوط به نقطه L_2 است. برای سادگی بحث فرض می کنیم که تابع تبدیل

G(S) هیچ قطب ناپایداری ندارد.

نخست به بررسی پایداری سیکل حدی در نقطه L_1 خواهیم پرداخت. روش کار به قرار زیراست:

اگر نقطه کار سیستم ابتدائا در نقطه L_1 باشد. در این وضعیت دامنه سیکل حدی برابر A_1 و فرکانس نوسان برابر ω_1 است. حال فرض می کنیم بازاء یک اغتشاش کوچک، دامنه ورودی به المان غیر خطی قدری افزایش یابد که نتیجه آن تغییر نقطه کار سیستم از L_1 به L'_1 است.

با توجه به معیار توسعه یافته نایکوئیست ، چون نقطه L'_1 توسط دیاگرام قطبی $G(j\omega)$ محاط شده است (با توجه به جهت تغییرات ω بر روی دیاگرام) پس خواهیم گفت سیستم در این نقطه ناپایدار است و در نتیجه دامنه سیگنال های سیستم افزایش خواهد یافت و بنابراین نقطه کار سیستم در طول منحنی $-\dfrac{1}{N(A)}$ حرکت کرده تا به نقطه کار L_2 برسد.

اگر در همان وضعیت قبلی (نقطه کار L_1)، تحت تاثیر یک اغتشاش، دامنه ورودی به المان غیر خطی قدری کاهش یابد، آنگاه نقطه کار به $L_1^{"}$ تغییر وضعیت داده که در این حالت چون نقطه $L_1^{"}$ توسط $G(j\omega)$ محاط نشده، (یعنی پایداری نقطه $L_1^{"}$) پس دامنه سیکل حدی همچنان رو به کاهش گذاشته تا آنکه صفر شود و این بدان معنی است که در هر دوحالت دامنه نوسان سیکل حدی را از دست خواهیم داد و این یعنی **ناپایداری سیکل حدی**.

اگر بحث فوق برای نقطه L_2 ، برقرار شود ملاحظه می گردد که سیکل حدی مربوط به نقطه L_2 پایدار است.

با خلاصه کردن بحث فوق می توان معیار پایداری سیکل حدی را به صورت زیر تعریف کرد:

هر نقطه برخورد بین دو منحنی $G(j\omega)$ و $-\frac{1}{N(A)}$ معرف یک سیکل حدی است. اگر نقاط نزدیک محل تقاطع دو منحنی و در طول افزایش A و بر روی منحنی $-\frac{1}{N(A)}$ توسط دیاگرام قطبی $G(j\omega)$ محاط نگردد آنگاه سیکل حدی مربوطه پایدار است در غیر اینصورت سیکل حدی پایدار نیست.

بررسی میزان اعتماد به روش آنالیز تابع توصیف

تحقیقات ۳ دهه اخیر نشان می دهد که آنالیز تابع توصیف توانسته به گونه ای کاملا موثر، تعداد زیادی از مسائل عملی کنترل را که شامل سیکل حدی هستند، حل کند. اما به خاطر ذات تقریبی روش تابع توصیف، مشاهده می گردد که نتایج بدست آمده بعضا دقیق نیستند.

عدم دقت های موجود معمولا در سه طبقه بندی زیر قرار می گیرند.

۱) دامنه و فرکانس سیکل حدی بدست آمده طبق روش تابع توصیف دقیق نیستند.

۲) سیکل حدی پیش بینی شده ، غلط بوده و اصلا سیکل حدی وجود ندارد

۳) یک سیکل حدی واقعی طبق روش تابع توصیف اصلا پیش بینی نشده است

مورد اول تقریبا کاملا منطقی بنظر می رسد چرا که در تعیین تابع توصیف معمولا تقریب هایی زده شده (صرفنظر کردن از هارمونیک های با درجه بالاتر) ، که خود موجب بروز عدم دقت در دامنه و فرکانس سیکل حدی می شود.

دو مورد آخر ، اگرچه به ندرت اتفاق می افتد اما می تواند نتایج نامطلوبی را بدنبال داشته باشد. باید دقت داشت که حضور یا عدم حضور سیکل حدی دقیقا به موقعیت فیزیکی دیاگرام قطبی $G(j\omega)$ و منحنی $-\dfrac{1}{N(A)}$ نسبت به یکدیگر دارد.

اصولا خطای بوجود آمده در نحوه تشخیص موجودیت سیکل حدی به دو مورد زیر بر می گردد:

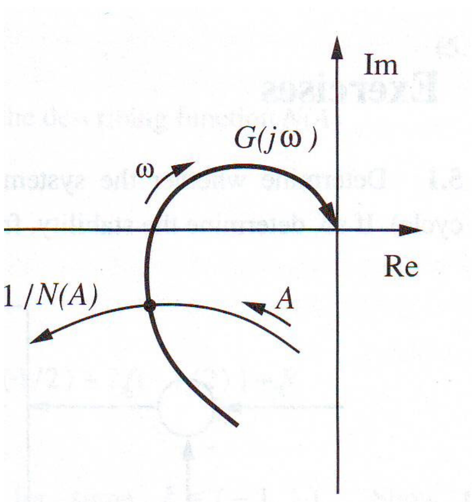
الف) اگر عامل خطی سیستم نتواند به خوبی به عنوان یک فیلتر پایین گذر عمل کند

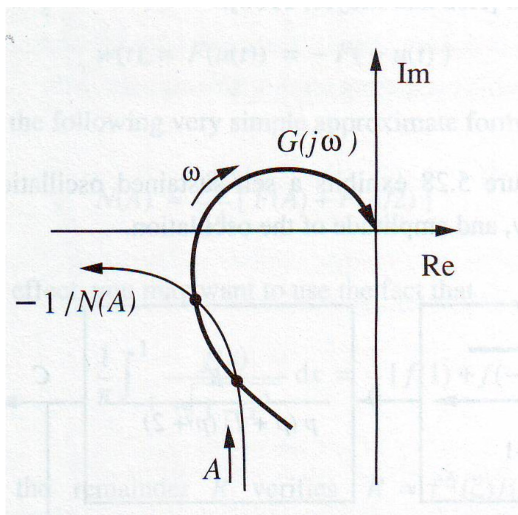
ب) اگر در دیاگرام قطبی $G(j\omega)$ حالت رزونانس اتفاق بیافتد.

روش گرافیکی در تشخیص بهتر حضور یا عدم حضور سیکل حدی

اگر $G(j\omega)$ به منحنی $-\dfrac{1}{N(A)}$ مماس باشد و یا تقریبا مماس فرض شود (شکل سمت راست) آنگاه نتایج بدست آمده از روش تابع توصیف با خطای نسبتا بزرگی همراه خواهد بود. معمولا این حالت زمانی رخ می دهد که عمل فیلترینگ در $G(s)$ ضعیف بوده و نتواند به عنوان یک فیلتر پایین گذر خوب عمل نماید.

و اگر منحنی $-\dfrac{1}{N(A)}$ تقریبا بر دیاگرام $G(j\omega)$ در محل برخورد عمود باشد (شکل سمت چپ) احتمال حضور سیکل حدی تقریبا صدرصد است .





پایان فصل پنجم

طراحی سیستم های کنترل غیر خطی – خطی سازی فیدبک

تاکنون با آنالیز سیستم های غیر خطی آشنا شده ایم. در این فصل به طراحی کنترل کننده های غیر خطی خواهیم پرداخت.

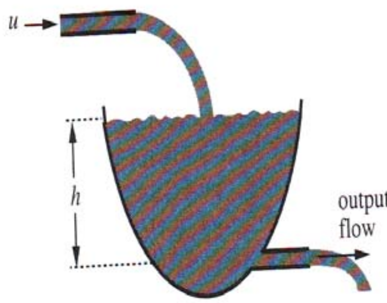
قاعدتا با توجه به تفاوت بین ماهیت سیستم های خطی و غیر خطی روش های طراحی کنترل کننده های غیر خطی نیز باید متمایز از نوع آن باشد.

در ادامه روش خطی سازی فیدبک در سیستم های غیر خطی مورد مطالعه قرار می گیرد.

خطی سازی فیدبک – Feedback Linearization

یکی از روش های طراحی کنترل کننده برای سیستم های غیر خطی، خطی سازی فیدبک نام دارد. از این روش در سال های اخیر به دلیل سرعت پردازش بسیار بالایش ، استفاده زیادی شده است.

در روش خطی سازی، با انتخاب متغیرهای حالت خاصی که اصلا فرم آشنایی نداشته، سعی می شود که فرم معادلات حالت غیر خطی حاکم بر سیستم ، خطی شده تا آنکه بتوان از روش های خطی، کنترل کننده مناسب را طراحی نمود.



__مثال__ : در شکل روبرو هدف کنترل ارتفاع مخزن در مقدار دلخواه h_d می باشد.

متغیر قابل کنترل جهت تنظیم ارتفاع ، دبی ورودی به مخزن (u) است. سطح اولیه سیال نیز به ارتفاع h_0 می باشد.

معادله دینامیکی حاکم بر سیستم به قرار زیر است :

$$\frac{d}{dt}\left[\int_0^h A(h)dh\right] = u(t) - a\sqrt{2gh}$$

در رابطهٔ فوق $\int_0^h A(h)dh$ ، به معنی حجم سیال در مخزن، u(t) دبی ورودی و $a\sqrt{2gh}$ ، دبی خروجی مخزن است و a نیز سطح مقطع لوله است.

معادله دینامیکی سیستم را نیز می توان به فرم زیر نوشت :

$$A(h)\dot{h} = u - a\sqrt{2gh}$$

معادله دیفرانسیل فوق یک معادله غیر خطی است. اگر u(t) به شکل زیر انتخاب شود :

$$\boxed{u(t) = a\sqrt{2gh} + A(h)v} \;*$$

که v بعنوان یک "ورودی معادل" مشخص گردیده است که باید بدست آید.(v یک متغیر اضافی است که برای تهیه فرم خطی لازم می باشد) پس خواهیم داشت :

$$A(h)\dot{h} = a\sqrt{2gh} + A(h)v - a\sqrt{2gh}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A(h)\dot{h} = A(h)v \Rightarrow \boxed{\dot{h} = v}**}$$

که دینامیک بدست آمده کاملا خطی است.

اما برای حل معادله فوق لازم است که v را به گونه ای با h مرتبط می کنیم. اگر v به صورت زیر اختیار شود.
$$v = -\alpha\tilde{h}$$

که $\tilde{h} = h(t) - h_d$ به عنوان خطای سطح تعریف شده و α نیز یک ضریب اکیدا مثبت است. در این صورت دینامیک خطی شده سیستم (رابطه **) به شکل زیر خواهد شد :

$$\dot{h} = -\alpha\tilde{h} \quad \rightarrow \quad \dot{h} + \alpha\tilde{h} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\tilde{h}} + \alpha\tilde{h} = 0$$

(h_d مقداری ثابت است)

معادله فوق لازم می دارد که وقتی $t \to \infty$ میل می کند آنگاه $\tilde{h}(t) \to 0$ میل خواهد کرد. بنابراین توانسته ایم با انتخاب u مناسب ، h(t) را به سمت h_d میل دهیم.

و سیگنال کنترلی لازم برابر است با

$$\boldsymbol{u(t) = a\sqrt{2gh} - A(h)\alpha\tilde{h}}$$

حتی اگر سطح مطلوب h_d بصورت $h_d(t)$ باشد (یعنی به صورت متغیر با زمان باشد) آنگاه با انتخاب ورودی معادل v بصورت زیر

$$\boldsymbol{v = \dot{h}_d(t) + \alpha\tilde{h}}$$

می توان نشان داد که همچنان وقتی $t \to \infty$ میل می کند $\tilde{h}(t) \to 0$ میل خواهد کرد.

خطی سازی فیدبک که در حقیقت به معنی حذف عوامل غیر خطی و اعمال دینامیک خطی مطلوب است، به کلاس خاصی از سیستم های غیر خطی بنام فرم Companion یا اصطلاحا فرم کانونیک کنترل پذیر براحتیقابل اعمال می باشد.

فرم کانونیک کنترل پذیر یک سیستم غیر خطی با ضابطه $x^{(n)} = f(x) + b(x)u$ به شکل زیر می باشد.

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\dot{x}_n = f(x) + b(x)u$$

که x بردار حالت سیستم می باشد.

جهت اعمال روش فیدبک خطی و با فرض غیر صفر بودن b ، سیگنال u را بصورت زیر تعریف می کنیم.

$$u = \frac{1}{b}\left[v - f\right]$$

(البته انتخاب f و b بسیار مشکل بوده و با فرض داشتن آنها می توان سیستم را خطی نمود.)

با این انتخاب، عوامل غیر خطی حذف می گردند و خواهیم داشت

$$x^{(n)} = f(x) + b \times \frac{1}{b}\left[v - f\right]$$

$$x^{(n)} = v$$

اگر قانون کنترلی به شکل زیر انتخاب گردد

$$v = -k_1\, x_1 - k_2\, x_2 - \ldots - k_n\, x_n$$

و k_1 تا k_n ضرائبی باشند که موجب شود ریشه های معادله زیر

$$\boxed{k_n S^n + k_{n-1} S^{n-1} + \ldots + k_2 S + k_1 = 0}$$

مطلقا در سمت چپ محور jω باشد آنگاه جواب معادله دیفرانسیل خطی زیر

$$\boxed{x^{(n)} + k_n x^{(n-1)} + k_{n-1} x^{(n-2)} + \ldots + k_2 \dot{x} + k_1 x = 0}$$

حتما در فرم پایدار مجانبی خواهد بود. (معادله فوق همان معادله $x^{(n)} = v$ است)

چنانچه بخواهیم مساله Tracking (ردیابی) انجام دهیم آنگاه با تعریف $e = x - x_d$ می توان سیگنال v را بصورت زیر بدست آورد.

$$v = x_d^{(n)} - K_1 e - K_2 \dot{e} - \ldots - K_{n-1} e^{(n-1)}$$

با انتخاب v به فرم فوق می توان نشان داد، با فرض آنکه معادله مشخصه

$\boxed{k_n S^n + k_{n-1} S^{n-1} + \ldots + k_1 = 0}$ هروتیز باشد آنگاه با میل کردن $t \to \infty$ حتما $e \to 0$ میل خواهد کرد.

به مثال ۶-۲ کتاب Slotine مراجعه کنید.

در بخشهای بعدی می خواهیم با استفاده از تبدیل های مناسب نخست سیستم در فرم غیر کانونیک را به فرم کانونیک تبدیل کرده و سپس طراحی فیدبک خطی را بر روی آن اعمال کنیم.

خطی سازی ورودی حالت – Input-State Linearization

در این بحث هدف، طراحی سیگنال کنترل u برای سیستم غیر خطی تک ورودی $\dot{x} = f(x,u)$ است به گونه ای که سیستم حلقه بسته پایدار باشد.

روش کار در دو مرحله زیر خلاصه می شود.

۱) پیدا کردن تبدیل حالت غیر خطی Z=W(x) و انتخاب u=g(x,v) به گونه ای که دینامیک غیر خطی سیستم به فرم $\dot{Z} = AZ + bv$ تبدیل شود.

۲) استفاده از یکی از روش های متداول سیستم های خطی برای طراحی v .

مثال : سیستمی با مجموعه معادلات حالت غیر خطی زیر موجود است.

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + ax_2 + \sin x_1$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 \cos x_1 + u\cos(2x_1)$$

با اعمال روش خطی سازی فیدبک قانون کنترلی مناسب را بیابید.

حل

در معادلهٔ $\dot{x}_1$ اگر روابط غیر خطی را نداشتیم، قادر می بودیم خیلی ساده تر بحث را دنبال کنیم و همچنین عدم وجود عبارت u در معادله اول ، کار را قدری مشکل تر کرده است.

با تعریف متغیرهای جدید z_1 و z_2 به صورت زیر داریم

$$\begin{cases} z_1 = x_1 \\ z_2 = ax_2 + Sinx_1 \end{cases}$$

خواهیم داشت

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \dot{x}_1 = -2z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 = -2z_1 \cos z_1 + Cosz_1.Sinz_1 + auCos(2z_1) \end{cases}$$

عملا با تبدیل به کار رفته، موفق شدیم که در عبارت $\dot{z}_1$ ، جملات غیر خطی را حذف کنیم.

می توان با انتخاب مناسب u رابطه غیر خطی موجود در $\dot{z}_2$ را نیز حذف کرد. اگر u برابر شود با

$$u = \frac{1}{aCos(2z_1)}\left(v - Cosz_1.Sinz_1 + 2z_1.Cosz_1\right)$$

که v ورودی معادله است ، پس خواهیم داشت

$$\dot{z}_1 = -2z_1 + z_2$$

$$\dot{z}_2 = v$$

با گزینش v به صورت $v = -K_1z_1 - K_2z_2$ می توان قطب های سیستم خطی شده را با انتخاب مناسب K_1 و K_2 به نقاط دلخواه منتقل نمود.

به عنوان مثال اگر $K_1 = 0$ و K_2 برابر ۲ انتخاب گردد ، داریم :

$$\dot{z}_1 = -2z_1 + z_2$$

$$\dot{z}_2 = -2z_2$$

در اینصورت قطب های سیستم هر دو در نقطه z=-2 قرار می گیرند.

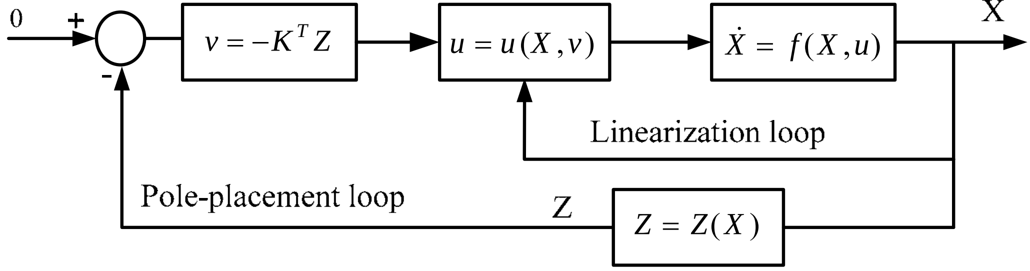
$$u = \frac{1}{a\cos(2x_1)}(-2ax_2 - 2lx_1 - \cos x_1 \sin x_1 + 2x_1 \cos x_1)$$

$$x_1 = z_1$$

$$x_2 = (z_2 - Sin.z_1)\big/a$$

چون z_1 و z_2 هر دو به سمت صفر همگرا خواهد شد پس حتما x_1 و x_2 نیز به سمت صفر همگرا خواهند شد.

شکل بلوک دیاگرامی ساختار فوق در زیر نشان داده شده است.



چند نکته :

۱) با توجه به ضابطه بدست آمده برای u که عبارت بود از

$$u=\frac{1}{a\cos(2x_1)}(-2ax_2-2\sin x_1-\cos x_1\sin x_1+2x_1\cos x_1)$$

ملاحظه می گردد که بازاء $x_1=\frac{\pi}{4}\pm K\frac{\pi}{2}\quad(K=1,2,...)$ مخرج عبارت فوق صفر شده و u بی نهایت می گردد و این بدان معنی است که اگر شرایط اولیه سیستم در چنین نقاطی باشد عملا قانون کنترلی نمی تواند سیستم را به نقطه تعادل برگرداند.

۲) اگر چه برای محاسبه u نیاز به مقادیر z_1 و z_2 می باشد ولی اکثر مواقع نمی توان z_1 و z_2 را اندازه گیری کرد و لذا بایستی x_1 و x_2 را اندازه گیری و با استفاده از روابط موجود z_1 و z_2 را محاسبه کرد.

۳) چون هم در محاسبه z و هم طراحی کنترل کننده، مبنای کار مدل سیستم است لذا چنانچه در مدل سازی اولیه سیستم خطائی وجود داشته باشد این خطا مستقیما در z و u خود را نمایان کرده و لذا امکان اینکه قانونی کنترلی نتواند به خوبی عمل کند وجود خواهد داشت و این یکی از ضعف های این روش است.

این سوال همچنان مطرح است که اصولا

۱- چه نوع از سیستم های غیر خطی می توانند به صورت فوق خطی سازی شوند؟

۲- چگونه باید تبدیل مناسب را جهت انجام عملیات خطی سازی یافت؟

خطی سازی ورودی – خروجی – Input-Output Linearization

هدف اصلی در خطی سازی ورودی- خروجی آن است که برای سیستم

$$\begin{aligned}\dot{x}&=f(x,u)\\ y&=h(x)\end{aligned}\qquad ❊$$

بتوان مسئله ردیابی (tracking) را پیاده سازی نمود

به این معنی که

۱) خروجی $y(t)$، سیگنال $y_d(t)$ را دنبال کند

۲) تمام حالت های سیستم محدود بماند

البته با فرض آنکه $y_d(t)$ و تمام مشتقات مرتبه بالاتر آن موجود و محدود باشد

مشکل اصلی در این مجموعه از معادلات آن است که خروجی y مستقیماً به u وابسته نبوده و تنها از طریق متغیرهای حالت و طبق ساختار روابط ❋ با u مرتبط خواهد بود.

روش کار: بدست آوردن یک رابطه بین u و y (و یا مشتقات آن)

برای بررسی دقیق مسئله یک مثال را مورد بررسی قرار می دهیم. به سیستم زیر توجه کنید.

$$\dot{x}_1 = \sin x_2 + (x_2+1)x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_1^5 + x_3$$

$$\dot{x}_3 = x_1^2 + u$$

$$y = x_1$$

هدف اصلی بدست آوردن یک رابطه مستقیم بین u و y است.

$$y = x_1$$

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = \sin x_2 + (x_2+1)x_3$$

$$\ddot{y} = (x_2+1)u + f_1(x)$$

$$\boxed{f_1(x) = (x_1^5 + x_3)(x_3 + \cos x_2) + (x_2+1)x_1^2}$$

اگر فرض کنیم که $u = \dfrac{1}{x_2+1}(v - f_1(x))$ باشد آنگاه داریم $\ddot{y} = v$

اکنون باید v را بیابیم

چون مسئله از نوع ردیابی (tacking) است، تعریف می کنیم

$$e = y - y_d$$

$$v = \ddot{y}_d - k_1 e - k_2 \dot{e} \qquad \text{(طراحی به کمک فیدبک حالت)}$$

$$\ddot{e} + k_2 \dot{e} + k_1 e = 0$$

معادله فوق نشان می دهد که دینامیک خطای سیستم از یک فرم پایدار برخوردار است

چند نکته در رابطه با مثال فوق

۱. سیگنال u در همه جا قابل تعریف نیست چرا که بازاء $x_2 = -1$، u غیرقابل محاسبه است.
۲. برای محاسبه u، اندازه گیری تمام حالت ها الزامی است.
۳. این روش برای سیستمهای چند ورودی- چند خروجی نیز کاربرد دارد.
۴. اگر برای بدست آوردن رابطه مستقیم بین u و y به r بار مشتق گرفتن از خروجی احتیاج باشد، آنگاه درجه نسبی سیستم را r می نامیم.
۵. در این مثال درجه سیستم اصلی ۳، و درجه نسبی ۲ می باشد. در واقع دینامیک جدید یعنی $(\ddot{y}, \dot{y})$ فقط قسمتی از دینامیک سیستم را شامل شده و بنابراین قسمتی از دینامیک سیستم

(یعنی یک متغیر) در این روش رویت پذیر نیست. این قسمت را دینامیک داخلی گویند که درمورد مثال فوق دینامیک داخلی عبارت است

$$\dot{x}_3 = x_1^2 + \frac{1}{x_2+1}(\ddot{y}_d - k_1 e - k_2 \dot{e} + f_1)$$

مشکل

باید پایداری، دینامیک داخلی مورد بررسی قرار گیرد (از روش هایی نظیر بررسی پایداری لیاپانوف و...)

- اگر دینامیک داخلی پایدار نباشد از روش فوق نمیتوان استفاده کرد.
- اگر درجه نسبی حداکثر با درجه سیستم برابر باشد به مسئله input-linearization می رسیم.

مثال

$$\dot{x}_1 = x_1$$
$$\dot{x}_2 = u$$
$$y = x_1$$

در سیستم فوق هرچه قدر که از y مشتق بگیریم رابطه ای بین u و y بدست نمی آید.

پس اعمال خطی سازی ورودی- خروجی بر روی این سیستم ممکن نیست

مثال: سیستم شکل مقابل را درنظر بگیرید

$$\dot{x}_1 = x_2^3 + u$$
$$\dot{x}_2 = u \qquad y = x_1$$

در این سیستم هدف دنبال کردن y_d توسط y است

حل: با مشتق گیری از y ارتباط بین y و u را تعیین می کنیم

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2^3 + u$$

که با انتخاب u به فرم زیر دینامیک سیستم خطی خواهد شد

$$u = v - x_2^3 \quad \to \quad \dot{y} = v$$

اگر متغیر جدید v را به فرم زیر در نظر بگیریم

$$v = -k_1 e + \dot{y}_d \quad \Rightarrow \quad \dot{e} + k_1 e = 0 \quad \to \quad \lim_{t\to\infty} e(t) \to 0 \quad (k_1 > 0)$$

که e برابر است با

$$e = y - y_d$$

اما اگر به بررسی دینامیک داخلی x_2 بپردازیم خواهیم داشت

$$\dot{x}_2 + x_2^3 = \dot{y}_d - e \qquad **$$

$e(t)$ باتوجه به معادله $\dot{e} + k_1 e = 0$، یک سیگنال محدود خواهد بود و با فرض اینکه سیگنال $\dot{y}_d$ نیز محدود است پس میتوان برای سمت راست معادله ** نوشت

$$\left|\dot{y}_d(t) - e\right| \le D$$

که D یک مثبت معین خواهد بود

پس قاعدتاً باتوجه به معادله ** میتوان گفت کـه اگـر $x_2 > D^{1/3}$ آنگـاه $\dot{x}_2 < 0$ و اگـر $x_2 < -D^{1/3}$ شـود آنگاه $\dot{x}_2 > 0$ خواهد بود و این بدان معنی است که $|x_2| \le D^{1/3}$

پس اندازه x_2 همواره محدود است. لذا قانون کنترلیِ ردیاب طراحی شده $u = -x_2^3 - k_1 e + \dot{y}_d(t)$ (برای هر $k_1 > 0$) و بازاء هر سیگنال $y_d(t)$ کـه مشـتق آن محـدود باشـد، خواهـد توانسـت کـه سیسـتم غیرخطی موجود را بخوبی کنترل نماید.

تمرین : نشان دهید که در مثال فوق، اگر معادله حالت دوم سیستم به صورت $\dot{x}_2 = -u$ باشد، آنگاه دینامیک داخلی سیستم ناپایدار است.

نکته مهم : در مورد **سیستمهای خطی**، دینامیک داخلی در صورتی پایدار است که سیستم با فاز می نیمم باشد.

مطالعه دینامیک داخلی سیستمهای خطی

یک سیستم درجه ۳ را به فرم مقابل در نظر بگیرید.

$$y = \frac{b_0 + b_1 S}{S^3 + a_2 S^2 + a_1 S + a_0} u$$

اگر نمایش فضای حالت سیستم را به فرم کانونیک کنترل پذیر بنویسیم ، خواهیم داشت.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

برای اعمالِ خطی سازی ورودی- خروجی ، از y متوالیا مشتق گرفته تا جائیکه در آن u ظاهر شود. بنابراین

$$y = b_0 x_1 + b_1 x_2$$
$$\dot{y} = b_0 \dot{x}_1 + b_1 \dot{x}_2 = b_0 x_2 + b_1 x_3$$
$$\ddot{y} = b_0 \dot{x}_2 + b_1 \dot{x}_3 = b_0 x_3 + b_1(-a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 + u)$$

پس با دو بار مشتق گیری از y عبارت u ظاهر می گردد و این یعنی آنکه درجه نسبی سیستم برابر ۲ است (تفاضل تعداد قطبها و صفرها)

u را به گونه ای انتخاب می کنیم که عبارت $\ddot{y} = v$ حاصل شود (v متغیر حالت جدید)

$$\Rightarrow b_0 x_3 + b_1(-a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 + u) = v$$

$$\boxed{u = \frac{1}{b_1}(v - b_0 x_3) + a_0 x_1 + a_1 x_2 + a_2 x_3} \rightarrow$$

با تعریف $e = y - y_d$ و انتخاب $v = (-k_1 e - k_2 \dot{e} + \ddot{y}_d)$ خواهیم داشت.

$$\ddot{y} = v = (-k_1 e - k_2 \dot{e} + \ddot{y}_d)$$

و با تعریف $\ddot{e} = \ddot{y} - \ddot{y}_d$

میتوان نوشت

$$\ddot{y} - \ddot{y}_d = -k_1 e - k_2 \dot{e}$$
$$\ddot{e} + k_2 \dot{e} + k_1 e = 0$$

بازاء جمیع مقادیر مثبت k_1 و k_2 ، سیگنال e درنهایت به سمت صفر میل می کند و خطای ردیابی صفر خواهد شد.

معادله دیفرانسیل فوق یک معادله درجه ۳ است و این بدان معنی است که بازاء قانون کنترلی طراحی شده، ۲ متغیر حالت از ۳ متغیر سیستم در شرائط مانا به سمت صفر میل خواهند کرد. اما تکلیف متغیر حالت سوم چه خواهد شد؟ این بدان معنی است که:

دینامیک داخلی سیستم درجه ۳ موجود تنها توسط یک متغیر حالت تعیین می گردد.

دقت داشته باشید که متغیرهای حالت اولیه x_1 ، x_2 و x_3 بوده اند. با توجه به مجموعه روابط زیر

$$y = b_0 x_1 + b_1 x_2$$
$$\dot{y} = b_0 x_2 + b_1 x_3$$

ملاحظه می گردد که y و $\dot{y}$ با متغیرهای x_1 ، x_2 و x_3 مرتبطند. پس اگر متغیر حالت کمبود را x_1 احتیار کنیم آنگاه متغیرهای x_1 ، y و $\dot{y}$ به همراه هم می توانند به خوبی توصیف کننده وضعیت سیستم باشند. پس آن دینامیک داخلی را که جستجو می کردیم همان x_1 است. حال باید دید که دینامیک مربوط به x_1 یعنی $\dot{x}_1$ چگونه است. داریم

$$\dot{x}_1 = x_2 = \frac{1}{b_1}(y - b_0 x_1)$$

$$\dot{x}_1 + \frac{b_0}{b_1} x_1 = \frac{1}{b_1} y$$

می دانیم که e یک سیگنال محدود است (طبق معادله $\ddot{e}+k_2\dot{e}+k_1e=0$) . پس اگر y_d محدود باشد، y نیز محدود است و لذا اگر نسبت b_0/b_1 مثبت باشد ، پاسخ معادله دیفرانسیل فوق ((x(t)) محدود خواهد بود. و این مورد زمانی حاصل می شود که سیستم اولیه با فاز می نیمم باشد. بنابراین

پایداری دینامیک داخلی سیستمهای خطی زمانی اتفاق می افتد که صفر سیستم حلقه بسته در سمت راست محور $j\omega$ قرار نگرفته باشد

و یا به عبارتی پایداری دینامیک داخلی سیستم به دینامیک صفر سیستم وابسته است .

مثال ۵-۶ کتاب slotine را ملاحظه فرمائید.

در ادامه بحث می خواهیم ببینیم :

<u>آیا این تفکر که موقعیت صفرهای سیستم خطی می تواند بر روی پایداری دینامیک داخلی سیستم تاثیر گذار باشد، قابل تعمیم به سیستم های غیر خطی نیز هست یا خیر ؟</u>

So-called zero dynamics

قاعدتا نمی توان برای سیستمهای غیر خطی همچون سیستم های خطی، دینامیک صفر سیستم را شناسایی کرد. چرا که صفر در سیستم های خطی یک پارامتر ذاتی از فرآیند خطی می باشد با آنکه در سیستم های غیر خطی ، امکان دارد پایداری دینامیک داخلی به قانون کنترلی ورودیِ خاصی وابسته باشد. لذا دینامیک صفر برای سیستم های غیر خطی به صورت زیر تعریف می شود که :

دینامیک صفر یک سیستم غیر خطی عبارت است از دینامیک داخلی سیستم، اگر خروجی آن بازاء ورودی بخصوصی در صفر نگه داشته شده باشد.

به طور مثال فرض کنید که داریم:

$$\dot{x}_1 = x_2^3 + u$$

$$\dot{x}_2 = u$$

$$y = x_1$$

برای اعمال خطی سازی ورودی- خروجی باید مشتقات y را حساب کنیم. ← $\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2 + u$

اگر u را به صورت $u = -x_2^3 + v$ اختیار کنیم، آنگاه $\dot{y} = v$

و با تعریف $v = \dot{y}_d - e$ می توان بدست آورد که : $\dot{e} + e = 0$

با توجه به تعریف u و v و ذکر این نکته که متغیر حالت دوم به u وابسته است ، لذا داریم

$$\dot{x}_2 = -x_2^3 + \dot{y}_d - e \quad \rightarrow \quad \dot{x}_2 + x_2^3 = \dot{y}_d - e$$

در تعریف دینامیک صفر گفته شد که باید خروجی بازاء ورودی کنترلی در صفر نگه داشته شود.

اگر y_1 صفر شود، یعنی x_1 نیز صفر است و لذا $\dot{x}_1$ نیز صفر می گردد

و این بدان معنی است که عبارت $\dot{y}_d - e$ باید صفر شود، چرا که داریم :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2^3 + u \\ 0 &= x_2^3 - x_2^3 + \dot{y}_d - e \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\dot{y}_d - e = 0}$$

پس دینامیک صفر از معادله زیر بدست می آید

$$\boxed{\dot{x}_2 + x_2^3 = 0}$$

حال باید دید که آیا این دینامیک پایدار است یا خیر. که البته می توان با انتخاب تابع لیاپانوف $V = x_2^2$

نشان داد که x_2 پایدار مجانبی است.

<u>**نکته :**</u> دلیل اصلی در تعریف و مطالعه دینامیک های صفر آن است که به یک راه ساده تر جهت تعیین پایداری دینامیک داخلی برسیم.

الگوریتم خلاصه طراحی قانون کنترلی بر اساس خطی سازی ورودی- خروجی عبارتست از:
الف) مشتق گیری از خروجی تا جائیکه ورودی u در عبارت مشتق ظاهر شود.
ب) انتخاب u به گونه ای که عوامل غیر خطی را حذف کرده و تضمین کند که ردیابی (tracking) به طور کامل انجام می پذیرد.
ج) مطالعه پایداری دینامیک داخلی

به کارگیری ابزار ریاضی در طراحی کنترل کننده های خطی سازی فیدبک

هدف اصلی در ادامه بحث فرمولیزه کردن مفاهیم قبلی برای طبقه وسیعی از سیستم های غیرخطی است بدین منظور نخست یک سری ابزار ریاضی خاص را مورد بررسی و تعریف قرار می دهیم.

تعریف میدان برداری (Vector field) :

تابع $\mathbf{f}$ را از که از R^n به R^n تعریف می شود، متعلق به یک میدان برداری مینامیم چرا که هر نقطه از فضای حالت n بعدی را به نقطه ای دیگر از فضا منتقل می کند. میدان برداری مورد نظر، یک میدان برداری هموار (smooth) خوانده میشود و این به آن معنی است که $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ و مشتقات متوالی آن نسبت به زمان گسسته نیستند.

گرادیان تابع اسکالرِ $h(\mathbf{x})$

گرادیان $h(\mathbf{x})$ به صورت زیر تعریف می گردد

اگر $h(\mathbf{x}): R^n \to R$

$$\nabla h = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}$$

گرادیان تابع اسکالر $h(\mathbf{x})$ یک بردار ردیفی است که هر المان آن به قرار زیر خواهد بود

$$(\nabla h)_i = \partial h / \partial x_i$$

و برای میدان برداری $\mathbf{f}(\mathbf{x})$، ماتریس ژاکوبین $\mathbf{f}$ با $\nabla \mathbf{f}$ نشان داده شده و برابر است با

$$\nabla \mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}$$

که یک ماتریس $n \times n$ بوده و هر المان آن به قرار زیر است

$$(\nabla \mathbf{f})_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$$

مشتق LIE و LIE BRACKET

برای هر تابع اسکالر $h(\mathbf{x})$ و هر میدان برداری $\mathbf{f}(\mathbf{x})$، مشتق h نسبت به $\mathbf{f}$ را مشتق Lie گفته و با نماد $L_{\mathbf{f}} h$ نشان میدهیم.

مشتق LIE یک تابع، اسکالر بوده و به صورت گرادیان نیز نمایش داده میشود

$$L_{\mathbf{f}} h = \nabla h \mathbf{f}$$

همچنین $\nabla h \mathbf{f}$ را میتوان به صورت زیر نیز نشان داد

$$\nabla h \mathbf{f} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \times \mathbf{f}$$

پس مشتق Lie ($L_{\mathbf{f}} h$) یک مشتق جهتی یا directional derivative، از تابع اسکالر h در جهت بردار $\mathbf{f}$ میباشد.

نتایج زیر از بحث های فوق بدست می آید

$$L_{\mathbf{f}}^0 h = h$$

$$L_{\mathbf{f}}^{i} h = L_{\mathbf{f}} (L_{\mathbf{f}}^{i-1} h) = \nabla (L_{\mathbf{f}}^{i-1} h) \mathbf{f} \qquad \text{برای} \quad i = 1,2,...$$

$$= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\partial^{i-1}}{\partial x^{i-1}} h(\mathbf{x}) \times \mathbf{f} \right)$$

به صورت مشابه میتوان گفت اگر $\mathbf{g}$ یک میدان برداری دیگر باشد آنگاه $L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h(\mathbf{x})$ عبارتست از

$L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h = \nabla(L_{\mathbf{f}} h)\mathbf{g}$

چنانچه بحث فوق را برای سیستم دینامیکی

$$\dot{x} = \mathbf{f}(x)$$
$$y = h(x)$$

اعمال کنیم خواهیم داشت

$$L_{\mathbf{f}} h = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \times \dot{x} = \dot{y}$$

پس مشتق اول خروجی همان مشتق Lie تابع h نسبت بـه $\mathbf{f}$ اسـت و بـرای مشـتق دوم خروجـی نیـز میتوان بدست آورد

$$\ddot{y} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\frac{\partial h}{\partial x} \times \dot{\mathbf{x}}\right) = L_{\mathbf{f}}{}^{2} h$$

و همچنین اگر فرض کنیم که تابع لیاپانوف مناسب برای سیستم دینامیکی مورد بحث $\mathbf{V}(x)$ باشد پـس میتوان گفت مشتق این تابع عبارت خواهد بود از

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{V}(x)}{\partial \mathbf{x}} \times \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(x) = L_{\mathbf{f}} \mathbf{V}$$

Lie Bracket

<u>تعریف</u> : اگر f و g دو میدان برداری بر روی R^n باشد ، آنگاه Lie bracket ، توابع f و g خود یک میدان برداری جدید خواهد بود که دارای تعریف زیر است.

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = \nabla \mathbf{g} \mathbf{f} - \nabla \mathbf{f} \mathbf{g}$$

معمولاً Lie bracket $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]$ را به صورت $ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g}$ نیز می نویسیم .

Lie bracket های متوالی نیز به فرم زیر نوشته می شوند.

$$ad_{\mathbf{f}}{}^{\mathbf{0}}\mathbf{g} = \mathbf{g}$$
$$ad_{\mathbf{f}}{}^{\mathbf{i}}\mathbf{g} = [\mathbf{f}, ad_{\mathbf{f}}{}^{\mathbf{i-1}}\mathbf{g}] \qquad \text{برای} \quad i=1,2,\ldots..$$

<u>مثال</u> : برای سیستم دینامیکی مقابل

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + ax_2 + \sin x_1$$
$$\dot{x}_2 = -x2.Cosx_1 + u.Cos(2x_1)$$

اگر مجموعه معادلات فوق را به صورت $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u$ نشان دهیم آنگاه میدان هـای بـرداری f و g عبارتند خواهند بود از :

$$\mathrm{f} = \begin{pmatrix} -2x_1 + ax_2 + \sin x_1 \\ -x_2 Cos.x_1 \end{pmatrix} \qquad \text{و} \qquad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ Cos.(2x_1) \end{pmatrix}$$

Lie bracket ، بردارهای $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]$ را محاسبه کنید.

<u>حل</u> :

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = ad_{\mathbf{f}}\ \mathbf{g} = \nabla \mathbf{g} \mathbf{f} - \nabla \mathbf{f} \mathbf{g} = \nabla \mathbf{g} \times \mathbf{f} - \nabla \mathbf{f} \times \mathbf{g}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2Sin.(2x_1) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x_1 + ax_2 + \sin x_1 \\ -x_2 Cos.x_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 + Cos.x_1 & a \\ x_2 Sin.x_1 & -Cos.x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ Cos.(2x_1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a.Cos.(2x_1) \\ Cos.x_1 Cos.(2x_1) - 2Sin.(2x_1)(-2x_1 + ax_2 + Sin.x_1) \end{pmatrix}$$

خواص Lie bracket

۱) خاصیت دو خطی (bi linearity)

$$1) \quad [\alpha_1 \mathbf{f_1} + \alpha_2 \mathbf{f_2}, \mathbf{g}] = \alpha_1 [\mathbf{f_1}, \mathbf{g}] + \alpha_2 [\mathbf{f_2}, \mathbf{g}]$$

$$2) \quad [\mathbf{f}, \alpha_1 \mathbf{g_1} + \alpha_2 \mathbf{g_2}] = \alpha_1 [\mathbf{f}, \mathbf{g_1}] + \alpha_2 [\mathbf{f}, \mathbf{g_2}]$$

که f ، f_1 ، f_2 ، g ، g_1 و g_2 همگی میدان های برداری هموار و α_1 و α_2 ضرائب ثابت عددی هستند.

۲) خاصیت Skew-Commutativity

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = -[\mathbf{g}, \mathbf{f}]$$

۳) خاصیت تساوی Jacobi

$$L_{ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g}} h = L_{\mathbf{f}} L_{\mathbf{g}} h - L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h$$

که $h(\mathbf{x})$ یک تابع اسکالر است. برای $L_{ad_{\mathbf{f}}^2\mathbf{g}} h$ نیز می توان نوشت.

$$\begin{aligned} L_{ad_{\mathbf{f}}^2\mathbf{g}} h = L_{ad_{\mathbf{f}}(ad_{\mathbf{f}} g)} h &= L_{\mathbf{f}} L_{ad_{\mathbf{g}}\mathbf{g}} h - L_{ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h \\ &= L_{\mathbf{f}} \left[L_{\mathbf{f}} L_{\mathbf{g}} h - L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h \right] - \left[L_{\mathbf{f}} L_{\mathbf{g}} - L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} \right] L_{\mathbf{f}} h \\ &= L_{\mathbf{f}}^2 L_{\mathbf{g}} h - 2 L_{\mathbf{f}} L_g L_{\mathbf{f}} h + L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^2 h \end{aligned}$$

تعریف

تابع $\mathbf{\Phi}$ را که از فضای n بعدی R^n به فضای n بعدی R^n تعریف شده است (این فضا را Ω می نامیم) diffeomorphism می گویند اگر هموار بوده و معکوس آن در Ω وجود داشته باشد. اگر Ω تمام فضای R^n باشد آنگاه $\Phi(x)$ یک global diffeomorphism خوانده می شود.

با استفاده از قضیه زیر می توان locally diffeomorphism تابع $\mathbf{\Phi(x)}$ را تشخیص داد.

قضیه : اگر $\mathbf{\Phi(x)}$ در ناحیه Ω (متعلق به فضای n بعدی R^n) هموار بوده و گرادیان آن یعنی $\nabla\mathbf{\Phi(x)}$ در نقطه $x=x_0$ (متعلق به Ω) غیر منفرد باشد، آنگاه $\mathbf{\Phi(x)}$ را در ناحیه Ω به طور محلی diffeomorphism می گویند.

نکته : diffeomorphism را می توان به عنوان تبدیل یک سیستم غیر خطی به یک سیستم غیر خطی دیگر و به همراه متغیرهای حالت جدید نیز معرفی نمود.

مثال: برای سیستم دینامیکی شکل مقابل

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u$$
$$y = h(x)$$

اگر Z را که با تبدیل $Z = \Phi(\mathbf{x})$ بدست آمده بعنوان متغیرهای حالت جدید معرفی کنیم آنگاه

$$\dot{z} = \nabla\Phi(\mathbf{x}).\dot{\mathbf{x}} = \nabla\Phi(\mathbf{x}).(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u)$$

بنابراین میتوان نمایش متغیرهای حالت جدید را به صورت زیر ارائه کرد.

$$z = \mathbf{f}^*(z) + \mathbf{g}^*(z)u$$
$$y = h^*(z)$$

در تعیین توابع $\mathbf{f}^*$، $\mathbf{g}^*$ و h^* قاعدتاً از تعریف $\mathbf{x} = \Phi^{-1}(z)$ استفاده شده است پس اگر ترکیب فضای حالت غیرخطی جدید معنی داشته باشد، $\Phi(\mathbf{x})$، diffeomorphism است

<u>مثال:</u> اگر تبدیل $\Phi(\mathbf{x})$ به صورت زیر باشد

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \Phi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 5x_1 x_2{}^2 \\ 3\sin x_2 \end{pmatrix}$$

آنگاه ماتریس ژاکوبین $\Phi(\mathbf{x})$ به صورت زیر خواهد بود

$$\nabla\Phi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\Phi_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\Phi_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial\Phi_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\Phi_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+5x_2^2 & 10x_1x_2 \\ 0 & 3\cos x_2 \end{pmatrix}$$

ماتریس فوق در نقطه $(0,0)$ غیر منفرد است پس طبق قضیه ارائه شده، $\Phi(\mathbf{x})$ به عنوان یک diffeomorphism در مبداء قابل قبول است، با توجه به فرم ظاهری $\nabla\Phi(\mathbf{x})$ چنانچه بخواهیم ببینیم که این تابع در چه ناحیه ای ویژگی diffeomorphism خود را حفظ می کند ناحیه Ω به صورت زیر بدست می آید که

$$\Omega = \left\{(x_1, x_2), |x_2| < \frac{\pi}{2}\right\}$$

چرا که اگر $x_2 = \dfrac{\pi}{2}$ یا $x_2 = -\dfrac{\pi}{2}$ شود دترمینال $\nabla\Phi(x)$ صفر شده و شرط قضیه برقرار نخواهد بود. بنابراین تابع $\Phi(x)$ به صورت محلی diffeomorphism است.

تئوری FROBENIUS

این تئوری در بحث خطی سازی فیدبک نقش بسیار مهمی را دارا است.

این تئوری شرائط لازم و کافی را برای آنکه یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی قابل حل باشد را بدست می دهد.

به عنوان مثال فرض کنید که با یک سری مجموعه معادلات دیفرانسیل غیرخطی با ۳ متغیر حالت سر وکار داریم. و شکل معادلات به صورت زیر باشد.

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial h}{\partial x_3} f_3 = 0$$
$$\frac{\partial h}{\partial x_1} g_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2} g_2 + \frac{\partial h}{\partial x_3} g_3 = 0$$

که فرض میشود توابع مختلف f_3, f_2, f_1 و g_3, g_2, g_1 را به صورت

$$\mathbf{f} = [f_1 \quad f_2 \quad f_3]^T \qquad \text{و} \qquad \mathbf{g} = [g_1 \; g_2 \; g_3]^T$$

تعریف شده باشند. آنگاه اگر $h(\mathbf{x})$ وجود داشته باشد (یعنی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی جواب داشته باشند) می گوئیم مجموعه میدان برداری $\{\mathbf{f}, \mathbf{g}\}$ به طور کامل انتگرال پذیر هستند.

حال این سؤال مطرح است که اصولاً چه موقع مجموعه معادلات دیفرانسیل فوق دارای جواب هستند؟

شرط Frobenius

اگر توابع اسکالری همچون α_1 و α_2 که هر دو تابعی از x_1 ، x_2 و x_3 هستند، وجود داشته باشند به نحوی که روابط روبرو برقرار باشند: ❋ $\boxed{[\mathbf{f},\mathbf{g}]=\alpha_1\mathbf{f}+\alpha_2\mathbf{g}}$

آنگاه پاسخ $h(x_1,x_2,x_3)$ وجود خواهد داشت.

رابطه فوق را در حقیقت اینگونه توصیف می کنیم که اگر بتوان Lie bracket ، میدان های برداری f و g را به صورت ترکیب خطی از توابع f و g نوشت آنگاه معادله دیفرانسیل اولیه دارای پاسخ $h(\mathbf{x})$ خواهد بود و بنابراین مجموعه میدان برداری $\{\mathbf{f},\mathbf{g}\}$ به طور کامل انتگرال پذیرند. (***منظور از انتگرال پذیر بودن قابلیت جمع شدن این دو میدان برداری در کنار یکدیگر است***)

شرط فوق اصطلاحا به شرط involutively بر روی مجموعه $\{\mathbf{f},\mathbf{g}\}$ معروف است.

بر اساس بحث های فوق قضیه Frobenius در ساختار عمومی اش به صورت زیر بیان می گردد.

تعریف : مجموعه میدان های برداری مستقل خطی $\{f_1, f_2,............, f_m\}$ که بر روی فضای R^n تعریف شده اند را کاملا انتگرال پذیر می گویند اگر n-m تابع اسکالر به صورت $h_1(\mathbf{x})$، $h_2(\mathbf{x})$ ، .... و $h_{n-m}(\mathbf{x})$ وجود داشته باشند به گونه ای که در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر

$$\nabla h_i f_j = 0$$

صدق کنند.

در روابط فوق $1 \le i \le n-m$ و $1 \le j \le m$ تغییر کرده و ∇h_i ها مستقل خطی هستند.

تعریف : یک مجموعه از میدان های برداری مستقل خطی $\{f_1, f_2,............, f_m\}$ را involtive می گویند اگر و فقط اگر توابع اسکالر α_{ijk} که از فضای R^n به R تعریف شده اند، به نحوی وجود داشته باشند که رابطه زیر برقرار باشد.

$$\boxed{[\mathbf{f_i},\mathbf{f_j}](\mathbf{x})=\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ijk}(\mathbf{x})\mathbf{f_k}(\mathbf{x}) \qquad \forall i,j}$$

چند نکته :

۱) میدان های برداری ثابت همواره involutive هستند، چرا که Lie bracket آن ها صفر است.

۲) به دلیل آنکه $[\mathbf{f},\mathbf{f}]=0$ است لذا یک میدان برداری با خودش involutive است.

تعریفی دیگر برای قضیه Frobenius

اگر میدان برداری $\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,...........,\mathbf{f}_m$ مستقل خطی از یکدیگر باشند، آنگاه اگر و فقط اگر میدان های فوق با یکدیگر involutive باشند، به طور کامل انتگرال پذیر هستند.

مثال : به مجموعه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر توجه کنید.

$$4x_3\frac{\partial h}{\partial x_1}-\frac{\partial h}{\partial x_2}=0$$

$$-x_1\frac{\partial h}{\partial x_1}+(x_3^2-3x_2)\frac{\partial h}{\partial x_2}+2x_3\frac{\partial h}{\partial x_3}=0$$

آیا می توان پاسخی برای معادله دیفرانسیل فوق بدست آورد؟

پاسخ:

نخست میدان های برداری را به شکل زیر تعریف می کنیم.

$$\mathbf{f}_1=\begin{bmatrix}4x_3 & -1 & 0\end{bmatrix} \qquad \text{و} \qquad \mathrm{f}_2=\begin{bmatrix}-x_1 & x_3^2-3x_2 & 2x_3\end{bmatrix}$$

اگر مجموعه میدان برداری $\{\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2\}$، involutive باشند پس حتما پاسخی برای $h(x)$ وجود خواهد داشت. بنابراین Lie bracket ، میدان های برداری f_1 و f_2 را می یابیم.

$$[\mathrm{f}_1,\mathrm{f}_2]=\nabla\mathrm{f}_2\mathrm{f}_1-\nabla\mathrm{f}_1\mathrm{f}_2$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 2x_3\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4x_3\\ -1\\ 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-x_1\\ x_3^2-3x_2\\ 2x_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-4x_3\\ 3\\ 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8x_3\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12x_3\\ 3\\ 0\end{pmatrix}$$

می توان نشان داد که :

$$[\mathrm{f}_1,\mathrm{f}_2]=-3\times\mathrm{f}_1+0\times\mathrm{f}_2$$

پس میدان های برداری involutive بوده و لذا معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی قابل حل هستند.

از مباحث ریاضی بخش های قبل می توان در بحث خطی سازی ورودی- حالت سیستمهای مختلف استفاده کرد.