Subject:
Year. Month. Date. (1)

کنترل غیرخطی

مراجع
1- اسلوتین
2- خلیل
3- ویدیا ساگار

پایان ترم 12 نمره
پروژه 5 نمره
تمرین 2-3 نمره
سمینار 2 نمره

کنترل غیرخطی

1- تحلیل (فقط امتحان)
- تحلیل صفحه - فاز (روش گرافیکی (فقط مرتبه 2))
- تحلیل سیستمهای غیرخطی اتونوموس با استفاده از لیاپانوف
- تحلیل سیستمهای غیرخطی غیراتونوموس با استفاده از لیاپانوف
- تابع توصیف (D.F) (مهم امتحان)

2- طراحی (فقط پروژه)
- 1 خطی سازی فیدبکی (F.L)
- کنترل کننده مد لغزشی (S.M.C) sliding mode control
- بک گام (B.S)

بررسی چند خاصیت مهم سیستمهای غیرخطی
1- تعداد نقاط تعادل (شبیه سازی) می تواند چندین نقطه تعادل داشته باشد
2- چرخه (L.C)
3- آشوب < تحلیل، طراحی
4- Bifurcation (انشعاب) (2 مرتبه)

پروژه
- فهرست
- معادله سیستم
- روش کنترل
- طراحی
- نتیجه

1

Subject :

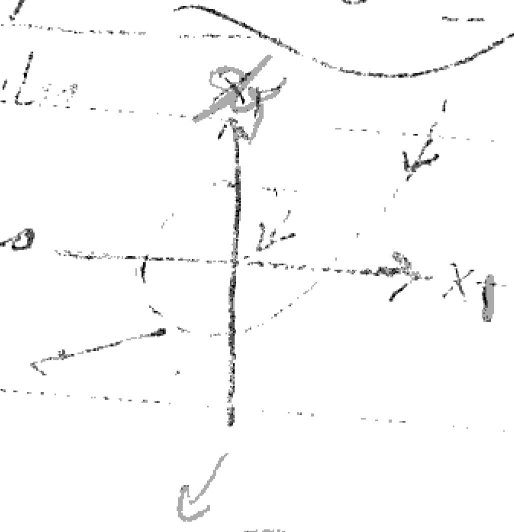
Year .　　Month .　　Date .　　(　)

تحلیل صفحه فاز :

یک روش گرافیکی برای تحلیل سیستم‌های غیرخطی مرتبه دوم می‌باشد.

مسیرهای حرکت حالات سیستم ترسیم می‌شود.

در این روش در صفحه حالت (x_1, x_2)



تغییر x_2 نسبت به x_1

* تحلیل صفحه فاز سیستم‌های خطی :

فرض کنید معادلات حالت یک سیستم خطی مرتبه ۲ به صورت زیر باشد.

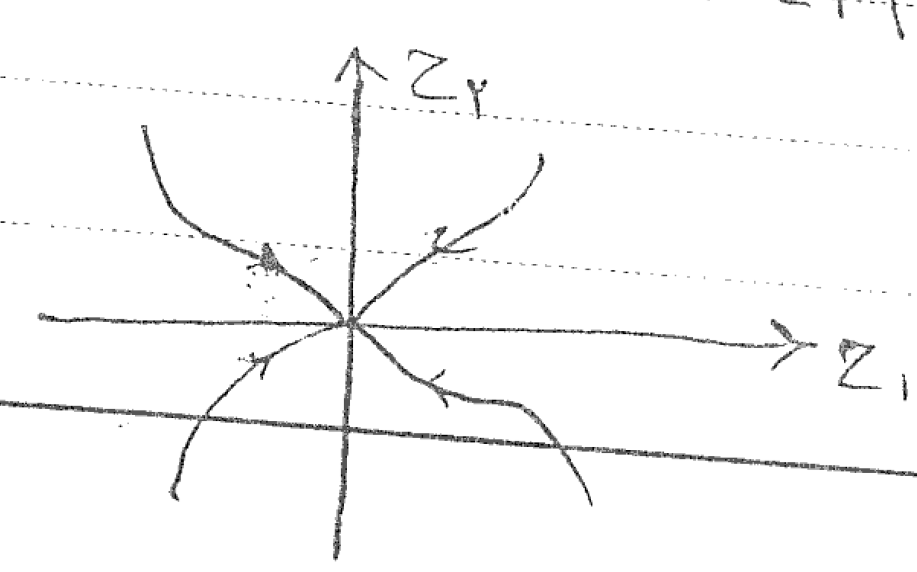
$$\begin{cases} \dot{X} = AX \\ \dot{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{A} X \end{cases} \Rightarrow |\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = ? \\ \lambda_2 = ? \end{cases}$$

* بسته به مقدار λ_1 و λ_2 حالات مختلف زیر رخ می‌دهد.

الف) فرض کنید λ_1 و λ_2 حقیقی غیر یکسان و منفی باشند در این صورت با استفاده از تبدیل همانندی مناسب $x = TZ$ می‌توان A را به فرم قطری تبدیل نمود.

$$\dot{Z} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} Z \quad \text{OR} \quad \begin{cases} \dot{Z}_1 = \lambda_1 Z_1 \longrightarrow Z_1(t) = Z_1(0) e^{\lambda_1 t} \longrightarrow t = \frac{1}{\lambda_1} \ln\left(\frac{Z_1(t)}{Z_1(0)}\right) \\ \dot{Z}_2 = \lambda_2 Z_2 \longrightarrow Z_2(t) = Z_2(0) e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

(stable Node)

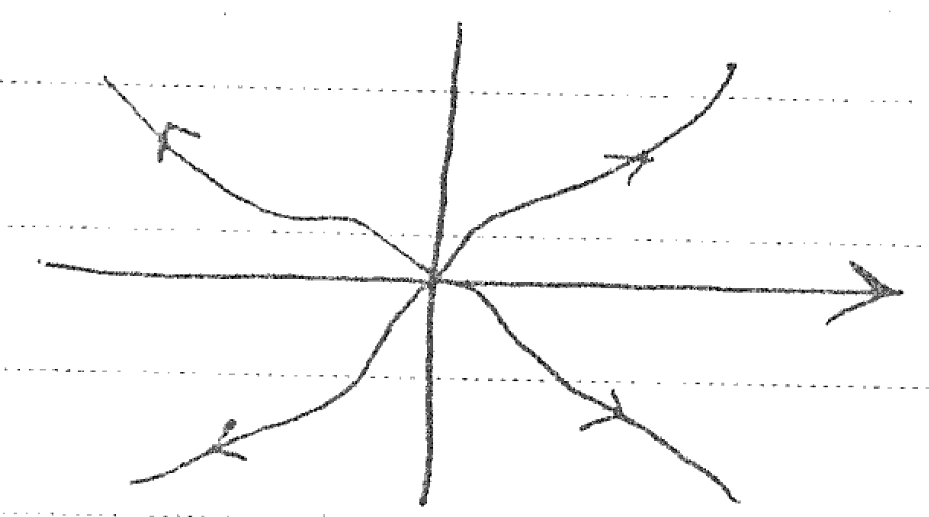


$$(t \text{ با حذف}) \rightarrow Z_2(t) = Z_2(0) \left(\frac{Z_1(t)}{Z_1(0)}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

Subject:

Year. Month. Date. ۲)

ب) λ_1 و λ_2 حقیقی، غیر یکسان و مثبت



(unstable node)

* از هر نقطه که رها کنیم نهایتاً به سمت ∞ می‌رود

گره ناپایدار

ج) اگر $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ (حقیقی) حقیقی و یکسان

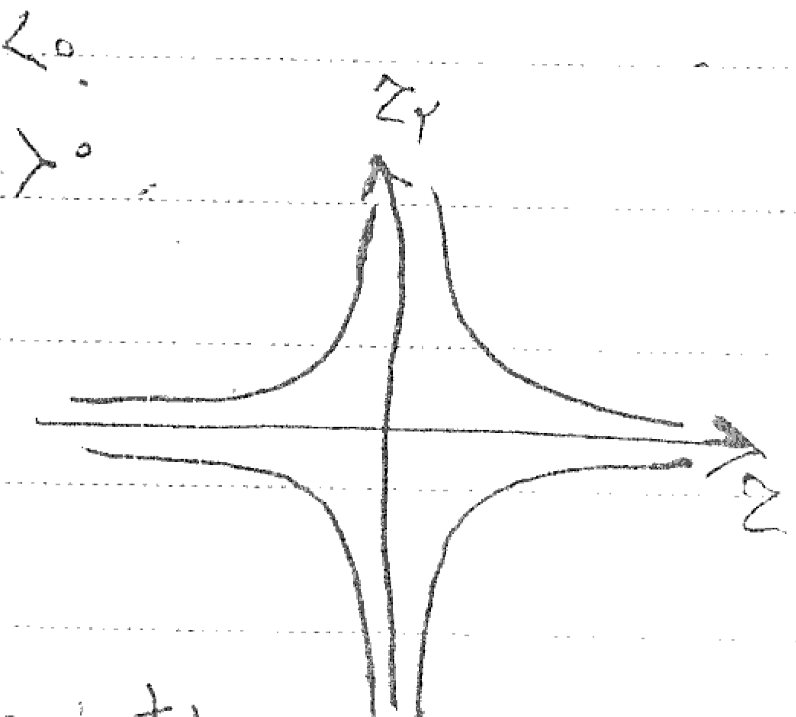
اگر مقادیر ویژه یکسان $\Rightarrow X = TZ \xrightarrow{\text{جردن}} Z' = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} Z$ OR $\rightarrow \begin{cases} z_1' = \lambda z_1 + z_2 \\ z_2' = \lambda z_2 \end{cases}$

$$\begin{cases} z_2(t) = z_2(0)\, e^{\lambda t} \\ z_1(t) = z_1(0)\, e^{\lambda t} + e^{\lambda t} z_2(0) \end{cases}$$

if $\begin{cases} \lambda > 0 \quad \oplus \Rightarrow \text{unstable Node} \\ \lambda < 0 \quad \ominus \Rightarrow \text{stable Node} \end{cases}$

د) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$

مثلاً با فرض $\begin{cases} \lambda_2 < 0 \\ \lambda_1 > 0 \end{cases}$



(saddle point)

زینی

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ب)

if $\lambda_{1,2}=\alpha\pm jB \longrightarrow X=TZ \xrightarrow{\text{فرم بلوکی قطری}} Z'=\begin{bmatrix}\alpha & B\\ -B & \alpha\end{bmatrix}Z \Rightarrow$

$\lambda_1=\lambda_2$

$T=$ [illegible]

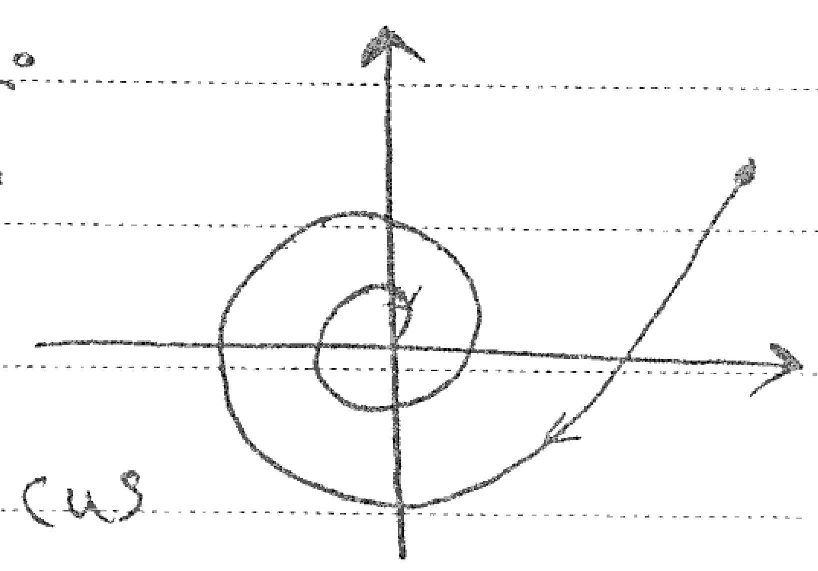
$$\Rightarrow\begin{cases} z_1'=\alpha z_1+Bz_2\\ z_2'=-Bz_1+\alpha z_2\end{cases} \xrightarrow{\text{فرم قطبی}} \begin{cases} r^2=z_1^2+z_2^2\\ \varphi=\tan^{-1}\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)\end{cases} \Rightarrow$$

$$r'=\Rightarrow\begin{cases} 2rr'=2z_1z_1'+2z_2z_2' \Rightarrow\\ rr'=\alpha z_1^2+Bz_1z_2-Bz_1z_2+\alpha z_2^2=\alpha(z_1^2+z_2^2)=\alpha r^2\end{cases}$$

$$\boxed{r'=\alpha r}\Rightarrow\boxed{r(t)=r(0)\,e^{\alpha t}} \checkmark$$

$$\varphi'=\frac{\dfrac{z_2'z_1-z_1'z_2}{z_1^2}}{1+\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^2}=\frac{-Bz_1^2+\alpha z_1z_2-\alpha z_1z_2-Bz_2^2}{z_1^2+z_2^2}=\frac{-B(z_1^2+z_2^2)}{(z_1^2+z_2^2)}\Rightarrow$$

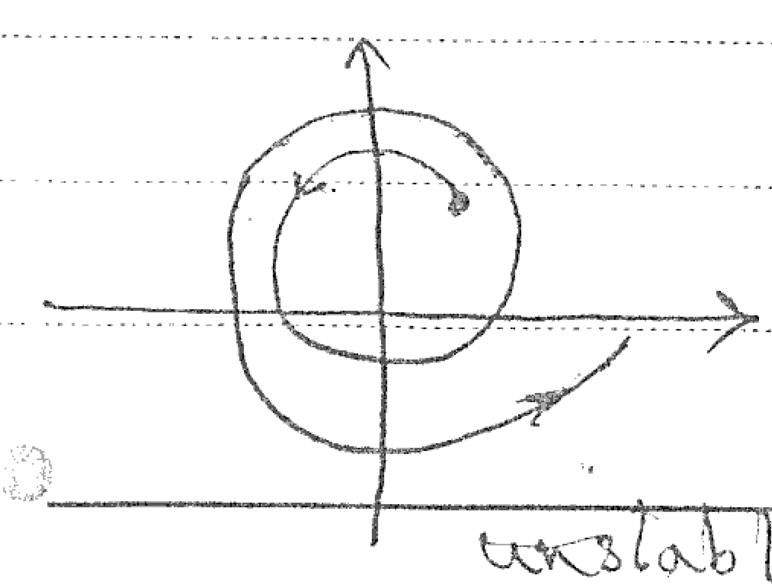
$$\Rightarrow\boxed{\varphi'=-B}\longrightarrow\boxed{\varphi(t)=-Bt+\varphi(0)}\longrightarrow \text{if } \alpha<0$$



stable Focus

(کانونی پایدار)

$\alpha>0$

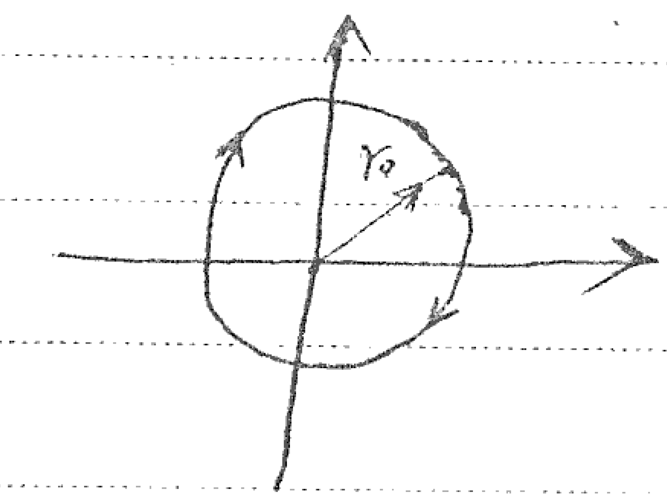


unstable Focus

(کانونی ناپایدار)

و) $\text{if } \alpha=0 \longrightarrow \lambda_{1,2} = \pm jB$

$$\Rightarrow \begin{cases} r(t) = r(0) & \text{دایره} \\ \varphi(t) = -Bt + \varphi(0) & \text{زاویه} \end{cases}$$



center
=

تحلیل صفحه فاز سیستمهای غیرخطی :
۱ـ خطی سازی
۲ـ تحلیلی
۳ـ عملی (تجربی)

۱ـ یک راه تحلیل سیستمهای غیرخطی با روش مذکور استفاده از خطی سازی حول نقطه تعادل و نتیجه گیری براساس مطالب بحث قبل می باشد.

مثال) $y'' - K(1-y^2)y' + y = 0 \;;\; K>0 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = y' \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = K(1-x_1^2)x_2 - x_1 \end{cases} \xrightarrow{\text{نقطه تعادل}} x_e = \binom{0}{0}$

$$A = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]\Big|_{x_e}$$

خطی سازی $\longrightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & K \end{bmatrix} \longrightarrow |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda-K \end{vmatrix} = \lambda^2 - K\lambda + 1 = 0$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{K \pm \sqrt{K^2-4}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{if } 0<K<2 \xrightarrow{\text{مختلط در سمت راست}} \text{unstable Foucus} \\ \text{if } K \geq 2 \xrightarrow{\text{حقیقی در سمت راست}} \text{unstable Node} \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

تمرین

$$\begin{cases} x_1' = (a - b x_2)\, x_1 \\ x_2' = (c - d x_1)\, x_2 \end{cases}$$

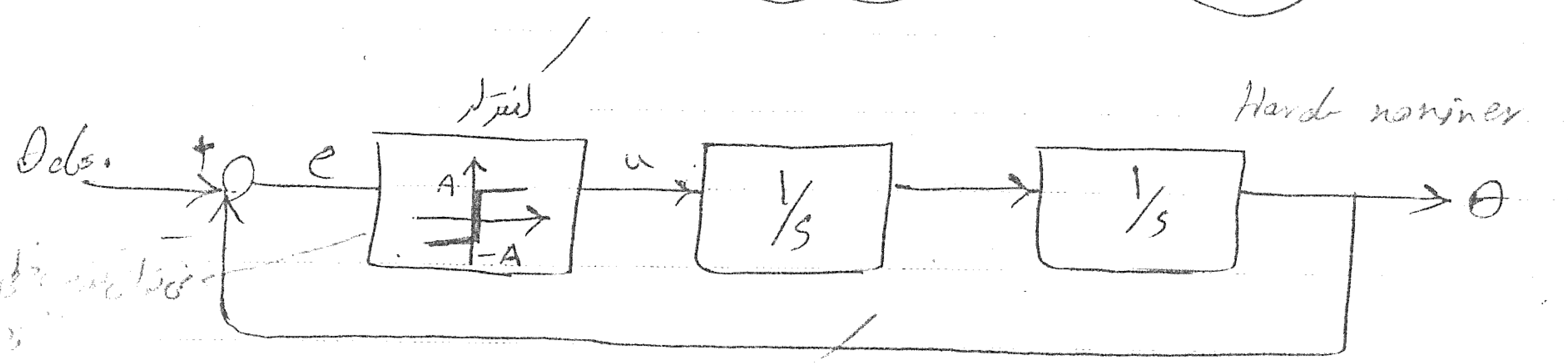
حالا اگر نقطه تعادل غیرصفر باشد با انتقال به صفر می‌بریم.

نقطه تعادل $x_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad x_e = \begin{pmatrix} \frac{c}{d} \\ \frac{c}{b} \end{pmatrix}$

$y_1 = x_1 - \frac{c}{d} \qquad y_2 = x_2 - \frac{a}{b}$

روش تحلیلی :

یک راه دیگر برای تحلیل صفحه فاز سیستم‌های غیرخطی حل تحلیلی معادلات است.



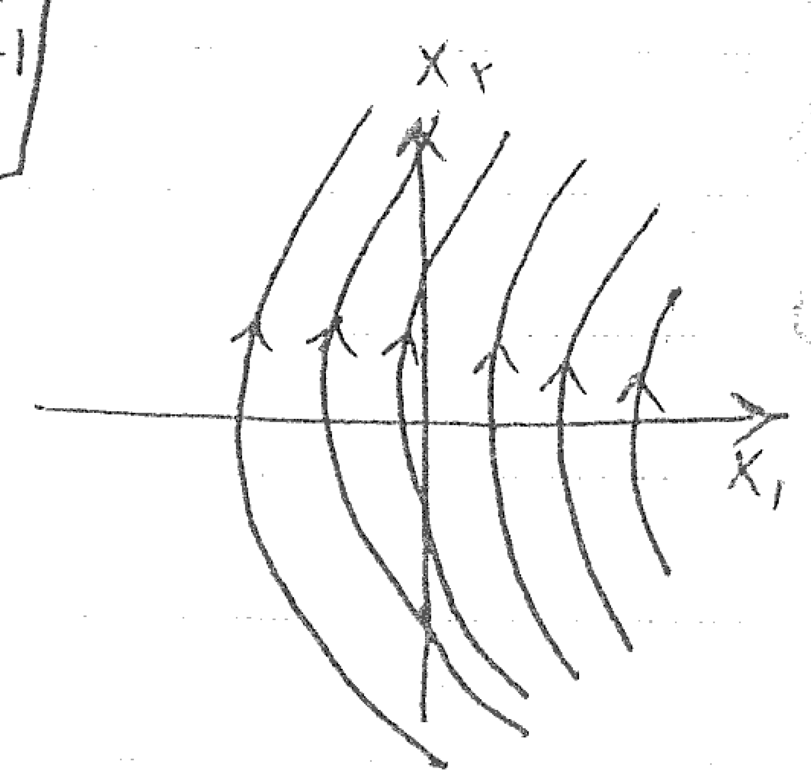
هدف: خروجی مورد مطلوب (θ_{des}) را ردیابی می‌کند

$$\theta'' = u \longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \theta' \end{cases} \quad \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = u \end{cases}$$

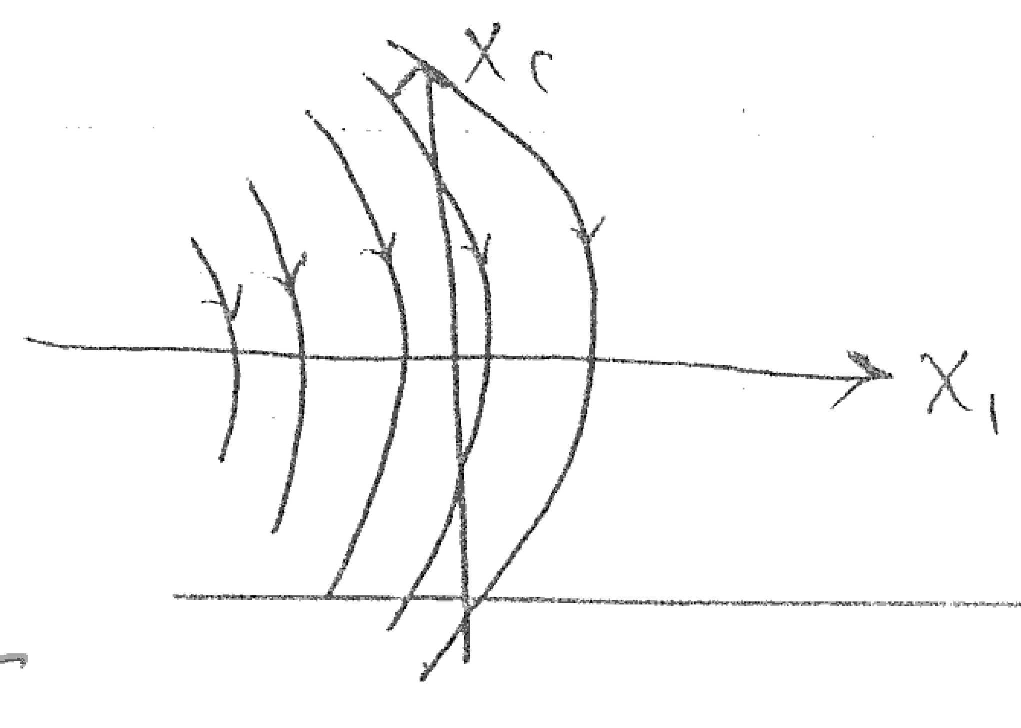
حالت (I) $\longrightarrow$ فرض $u = A$

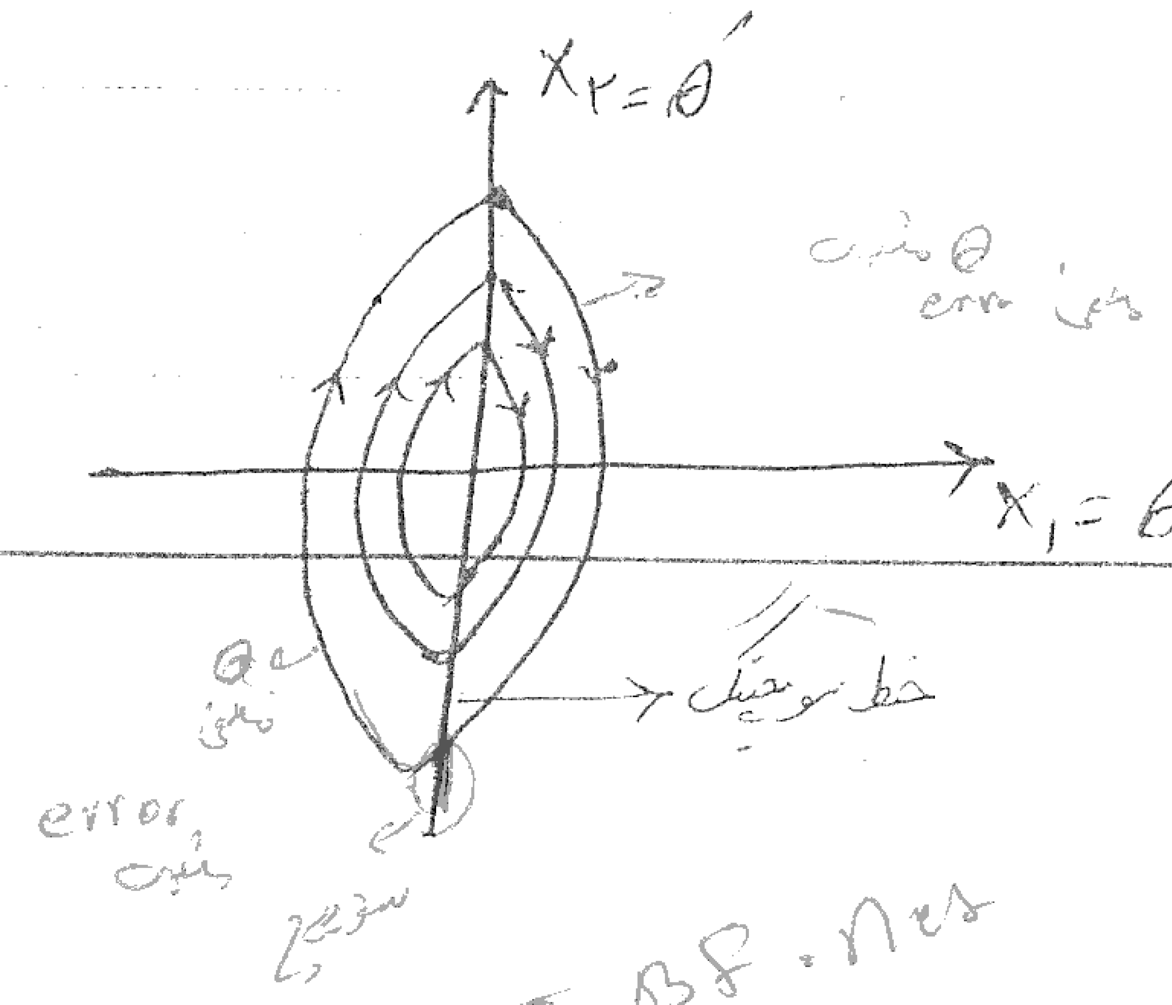
$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = A \end{cases} \longrightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{A}{x_2} \longrightarrow x_2\,dx_2 = A\,dx_1 \longrightarrow$$

$$\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_{20}^2}{2} = A x_1 - A x_{10} \longrightarrow \boxed{x_2^2 = 2A x_1 + C_1}$$



حالت II $\longrightarrow$ فرض $u = -A \longrightarrow \boxed{x_2^2 = -2A x_1 + C_2}$



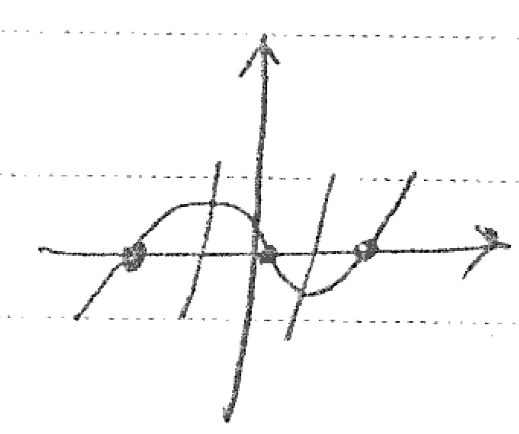


سیستمها:
- خطی: جمع آثار صدق می‌کند
  - خطی تغییرپذیر با زمان
  - خطی تغییرناپذیر با زمان
- غیرخطی: خاصیت جمع آثار در آن صدق نمی‌کند

غیرخطی:
- اتونوموس: زمان صریحاً در معادلات ظاهر نمی‌شود
- غیراتونوموس: $x : \cancel{\dot{x}} \; \sin(x)x + x^3 =$

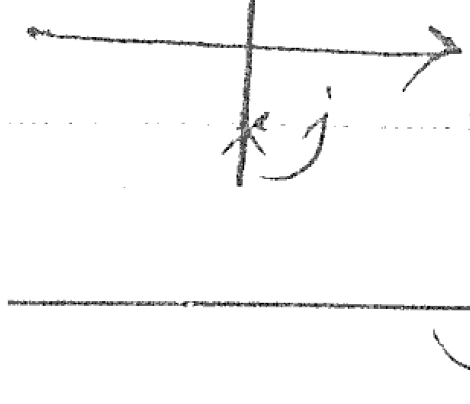
پروژه:
۱- فهرست مطالب
۲- مدل سیستم
۳- روش کنترل
۴- طراحی که انجام داده
۵- نتیجه‌گیری (ساده)

تعداد نقاط تعادل: چندین نقطه تعادل می‌تواند پایدار باشد و نقطه تعادل دیگر ناپایدار باشد. شرایط اولیه اهمیت ندارد



L.C ← سیستم غیرخطی مسیر ندارد. اگر نقطه را رها کنیم نهایتاً بین لبه‌ای با فرکانس و دامنه ثابت نوسان می‌کند
(تعریف ندارد)
نامعلوم

حالت خطی: پاسخ به شرایط اولیه x_0 و فرکانس نوسانات بستگی دارد.



شرایط اولیه را اگر کم کنیم ریز ← نوسانهای اول
مثل هم هستند بین لبه‌ای
با صفر فرق می‌کنند

Subject:

Year. Month. Date. ۵

آشوب : یک شرایط اولیه را به هم می ریزیم پاسخ سیستم بسیار عوض می شود و تغییر بنیادی می کند. به هم می ریزد.

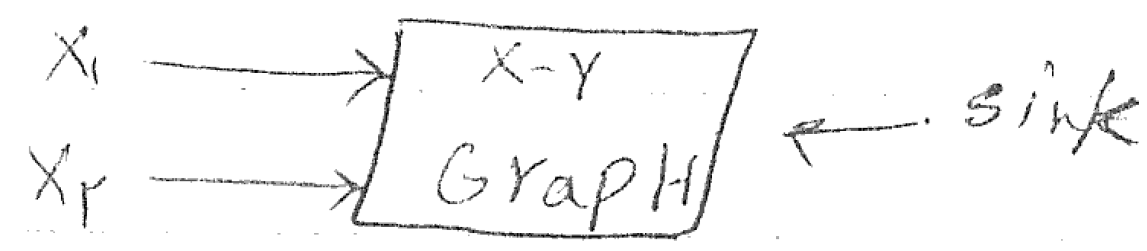
۱_ تحلیل

۲_ کنترل

* تحلیل آشوب سخت تر از کنترل آشوب است.

Bifurcation : تغییر مقادیر یک سیستم باعث تغییر پاسخ سیستم می شود (مثلاً محدوده K برای پایداری سیستم خطی)
انشعاب
تغییر پارامترهای سیستم

رسم منحنی صفحه فاز در مطلب :



تحلیل صفحه فاز سیستمهای غیرخطی :
- خطی سازی
- تحلیلی (حل معادلات)
- عملی (نرم افزاری) ← کدنویسی

Ex: $y'' - K(1-y^2)y' + y = 0$ $\quad K>0$

$X_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ نقطه تعادلی دارد

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = y' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1' = x_2 = f_1 = 0 \\ x_2' = K(1-x_1^2)x_2 - x_1 = f_2 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\Bigg|_{x_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & K \end{bmatrix} = A$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda - K \end{vmatrix} = \lambda^2 - K\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{K \pm \sqrt{K^2 - 4}}{2}$$

① $0 < K < 2 \longrightarrow$ u-F

② $K = 2 \longrightarrow$ u-N

③ $K > 2 \longrightarrow$ u-N

Isocline :

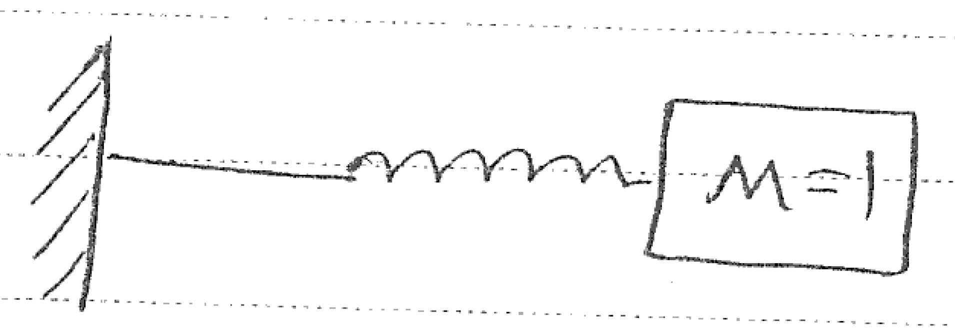
یک سیستم دینامیکی با معادلات حالت
$$\begin{cases} X_1' = f_1(x_1, x_2) \\ X_2' = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$
را در نظر بگیرید. در این صورت در هر

نقطه (x_1, x_2) از صفحه حالت شیب خط مماس بر مسیر حالت را می توان از رابطه

$$\left\{ \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} = \alpha \right.$$
بدست آورد.

* در این صورت مکان هندسی مجموعه نقاطی که در رابطه $f_2(x_1, x_2) = \alpha f_1(x_1, x_2)$ صدق می کنند را ایزوکلاین می گویند.

Ex.)

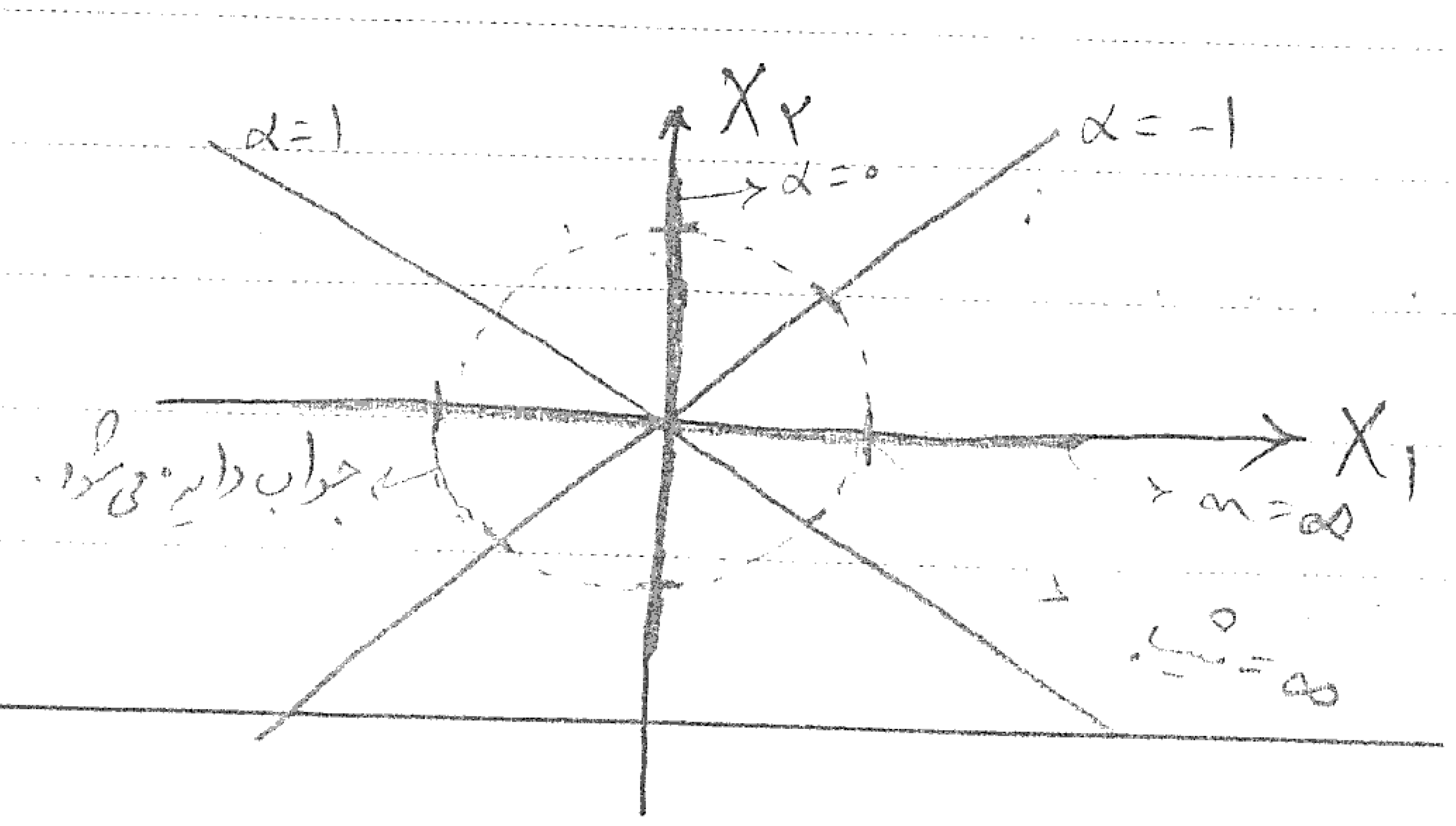


$$\sum F = ma \Rightarrow -KX = mX''$$

$$X'' + X = 0 \Rightarrow \begin{cases} X = X_1 \\ X' = X_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X_1' = X_2 \\ X_2' = -X_1 \end{cases} \checkmark$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-X_1}{X_2} = \alpha$$

$$\Rightarrow X_2 = -\frac{1}{\alpha} X_1$$

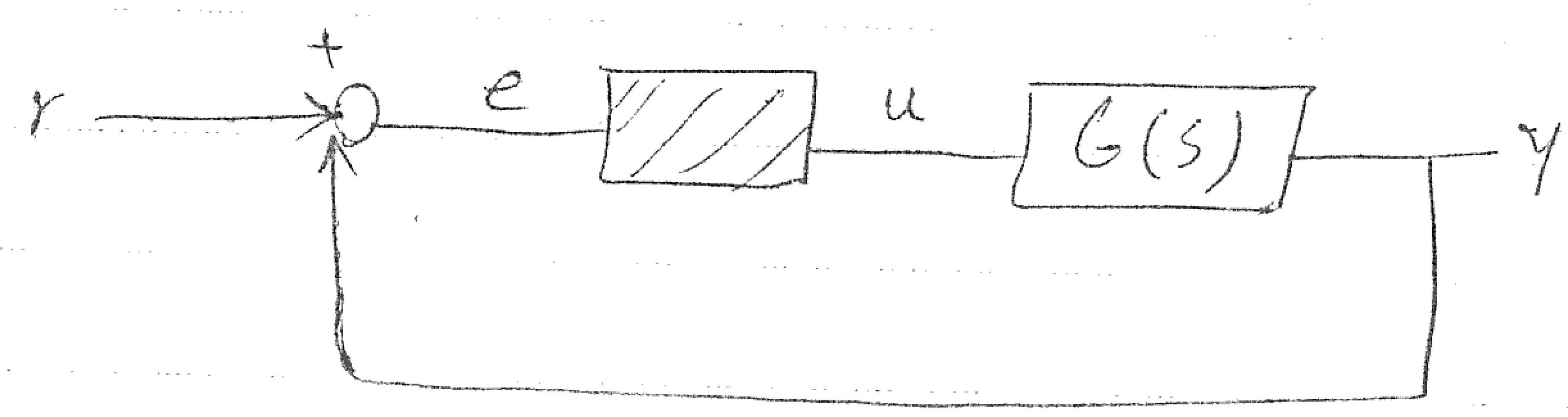


$\alpha = -1 \longrightarrow x$

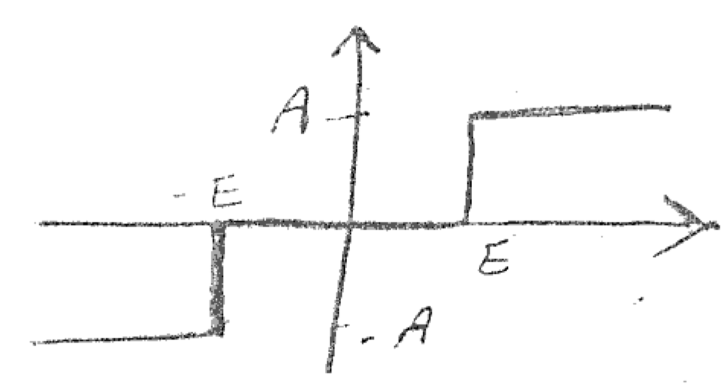
$\alpha = 0 \longrightarrow x_1 = 0$

$\alpha = \infty \longrightarrow x_2 = \infty$

EX : دیاگرام یک سیستم کنترل به شرح زیر می باشد.



$$G(s)=\frac{K}{s(1+Ts)}$$



* منحنی صفحه - فاز این سیستم را بدست آورید (تداوم الکتری)

$$G(s)=\frac{Y(s)}{u(s)} = Ts^2Y(s)+sY(s)=Ku(s)$$

$$Ty''+y'=Ku \quad \text{OR} \quad \boxed{y''+\frac{1}{T}y'=\frac{K}{T}u}$$

سیگنال خطا $e=r-y$ یا $y=r-e$ $\xrightarrow[r=\text{ثابت}]{\text{وقتی}}$ $\left\{ e''+\frac{1}{T}e'=-\frac{K}{T}u \right.$

سه وضعیت دارد

$$\begin{cases} e''+\frac{1}{T}e'=\frac{K}{T}A \quad (\mathrm{I}) \quad e<-\varepsilon \;,\; \begin{cases} u=-A \\ e<-\varepsilon \end{cases} \\ e''+\frac{1}{T}e'=0 \quad (\mathrm{II}) \quad -\varepsilon<e<\varepsilon \;,\; u=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=e \\ x_2=e' \end{cases} \\ e''+\frac{1}{T}e'=-\frac{K}{T}A \quad (\mathrm{III}) \quad e>\varepsilon \;,\; u=A \end{cases}$$

تعریف state

Subject :
Year . Month . Date . ( )

$$(\mathrm{I})\ \text{ناحیه}\quad \begin{cases} x_1' = x_c \\ x_c' = -\dfrac{1}{T}x_c + \dfrac{K}{T}A \end{cases}$$

→ در این ناحیه: نقطه تعادل نداریم

$x_1 < -\varepsilon$

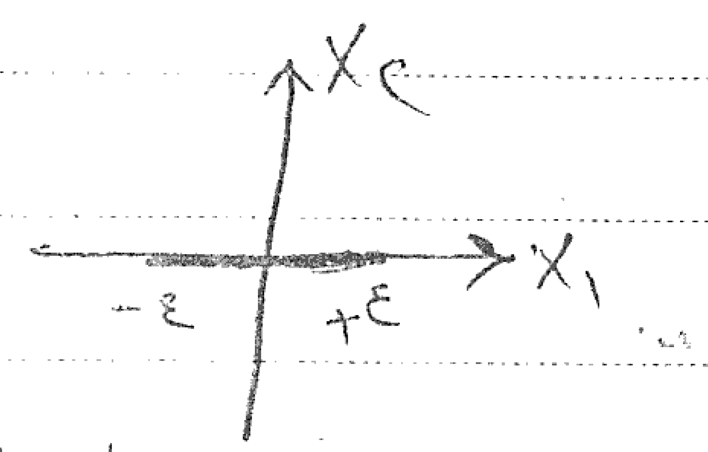
مقادیر A و K و T معلوم است در مسئله

$$\frac{dx_c}{dx_1} = \frac{-\frac{1}{T}x_c + \frac{K}{T}A}{x_c} = \frac{AK - x_c}{Tx_c} = \alpha$$

$$\Rightarrow AK - x_c = T\alpha x_c$$

$$\Rightarrow \boxed{x_c = \frac{AK}{1+T\alpha}} \checkmark \qquad x_1 < -\varepsilon$$

$$\mathrm{II}\ \text{ناحیه}\quad \begin{cases} x_1' = x_c \\ x_c' = -\dfrac{1}{T}x_c \end{cases} \quad ; \ -\varepsilon < x_1 < +\varepsilon \ ;$$



نقاط تعادل

$$\frac{dx_c}{dx_1} = -\frac{1}{T} \Rightarrow dx_c = -\frac{1}{T}dx_1$$

$$\Rightarrow \boxed{x_c = -\frac{1}{T}x_1 + c} \checkmark$$

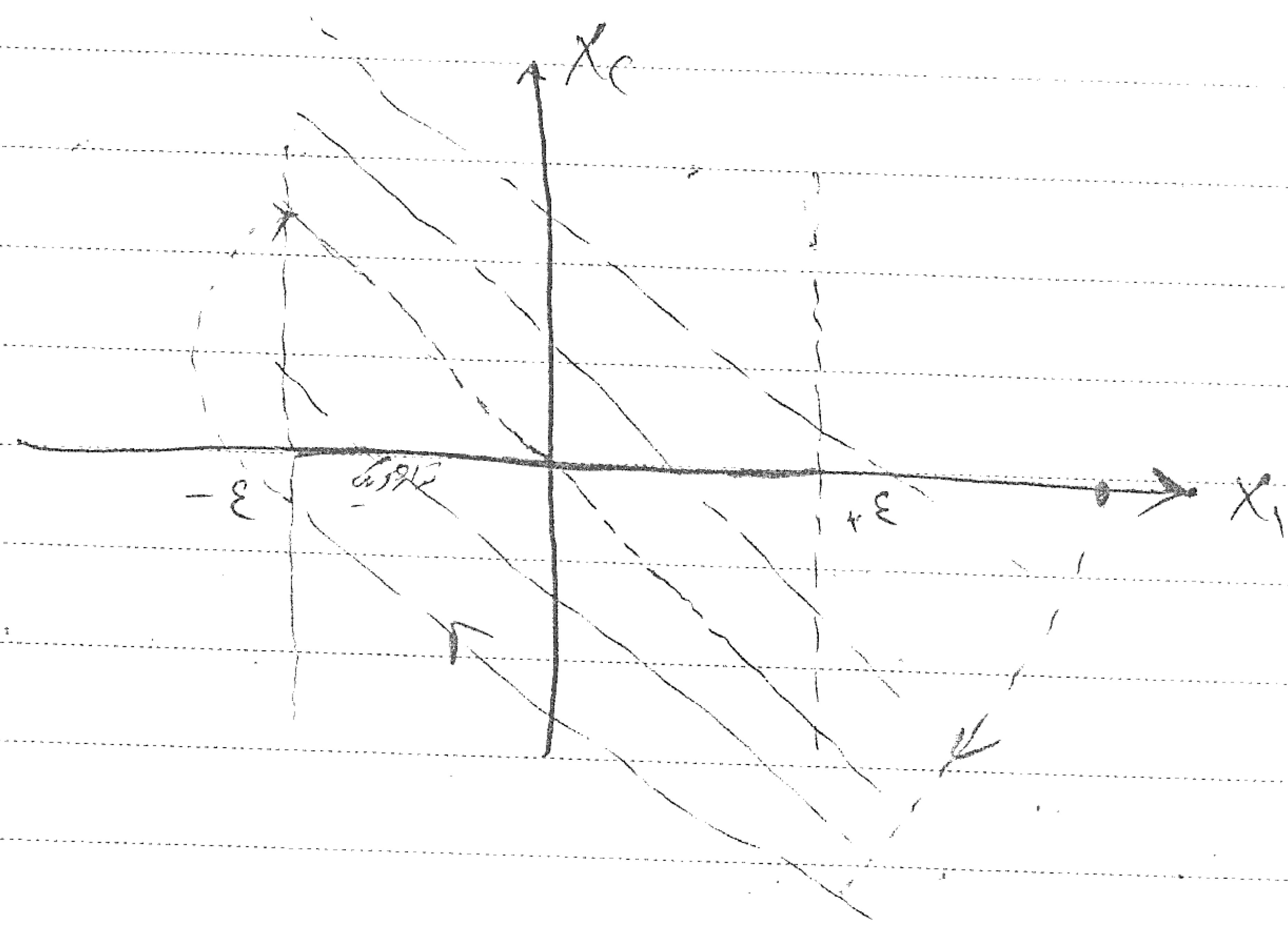
با خطوطی

(III) ناحیه
$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\frac{1}{T}x_2 - \frac{K}{T}A \end{cases} \qquad x_1 > \varepsilon$$

نقطه تعادل نداریم

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-\frac{1}{T}x_2 - \frac{K}{T}A}{x_2} = \frac{-x_2 - KA}{Tx_2} = \alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{-AK}{1+\alpha T}} \quad x_1 > \varepsilon$$



$\boxed{e = r - y}$

$y(0) = 0$

$e = r(0) = x_1(0)$

Subject:

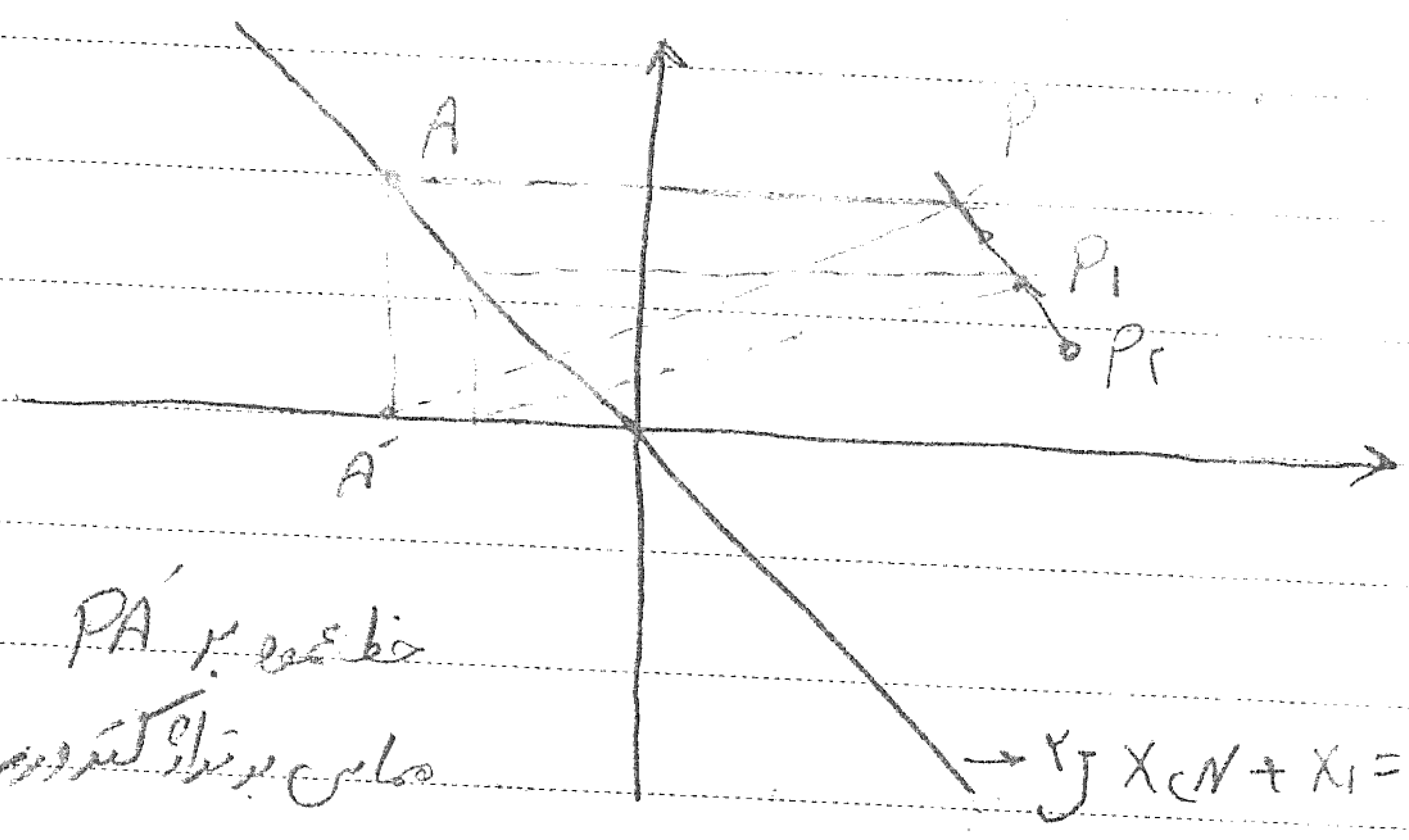
Year. Month. Date. ( )

Lienar:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -2\zeta\omega_0 x_2 - \omega_0^2 x_1 \end{cases} \rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-2\zeta\omega_0 x_2 - \omega_0^2 x_1}{x_2}$$

با فرض $x_2 = \omega_0 x_{2N}$

$$\Rightarrow \frac{dx_{2N}}{dx_1} = \frac{-(2\zeta x_{2N} + x_1)}{x_{2N}}$$



خط عمود بر PA'

مماس بر تراژکتوری در P

$\rightarrow 2\zeta x_{2N} + x_1 = 0$

۱ـ این روش برای سیستم‌ها غیرخطی به صورت زیر نوشته شده کاربرد دارد

$$x'' + \underbrace{f(x, x')}_{x + f(x')} = 0 \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -f(x_1, x_2) \end{cases}$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-f(x_1, x_2)}{x_2} = -\frac{\omega_0^2 (x_1 + f_2(x_2))}{x_2}$$

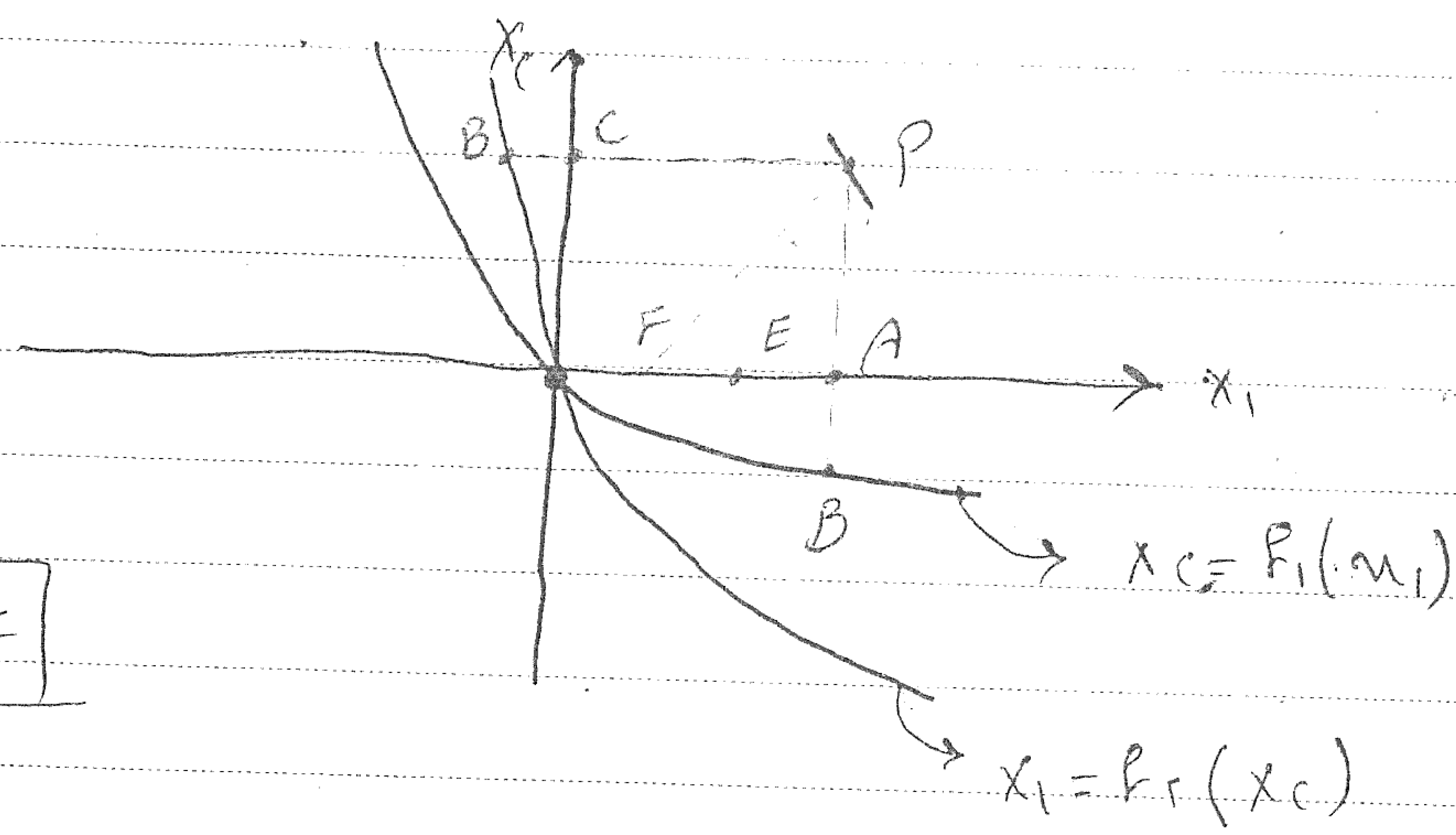
Subject:
Year. Month. Date. ۱۸

۲_ Pells:

$$x'' + f(x, x') = 0$$

$$f(x, x') = f_1(x) + f_2(x')$$ [illegible]

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -f_1(x_1) - f_2(x_2) \end{cases} \Rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-f_1(x_1) - f_2(x_2)}{x_2}$$



$\boxed{AB = AE}$

$BC = EF$

[illegible]

Limit cycle : (L.C) چرخه حدی

* L.C یکی از ویژگی های مهم سیستم های غیرخطی است که باعث رفتار پریودیک سیستم غیرخطی می باشد.

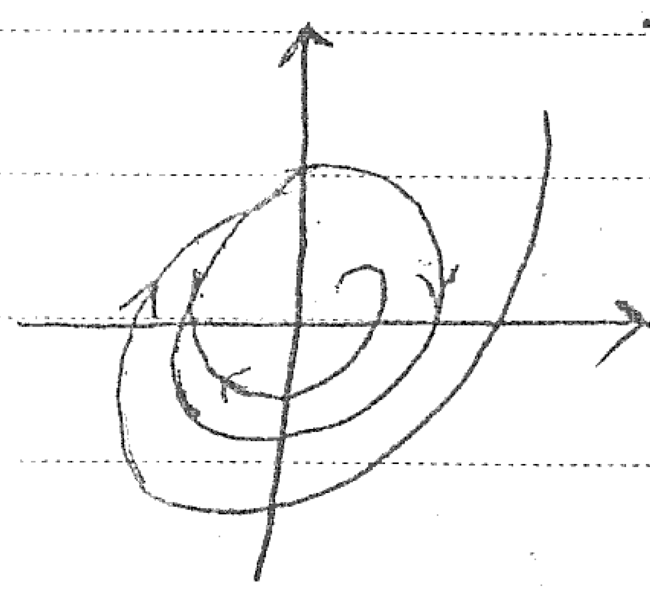
صرفا به خاطر طبیعت خود آن ایزوله می باشد.

انواع L.C : پایدار (stable L.C)

ناپایدار (unstable L.C)

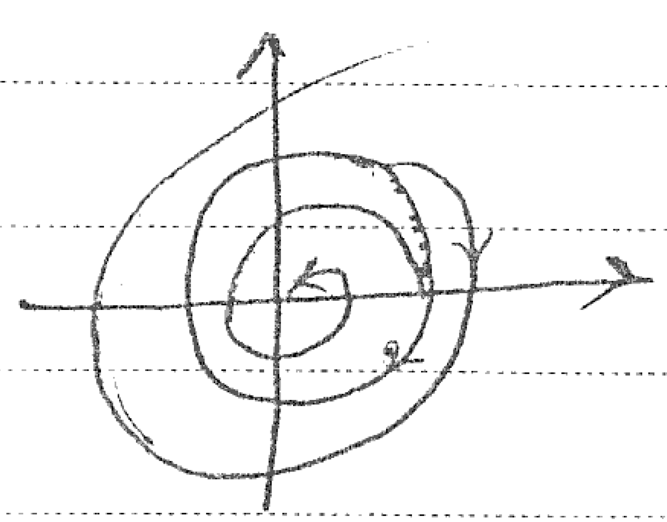
نیمه پایدار (semistable L.C)

پایدار : که حالات سیستم از دو نقطه درون یا بیرون L.C به سمت آن حرکت می کند



P.P نقطه تعادلی

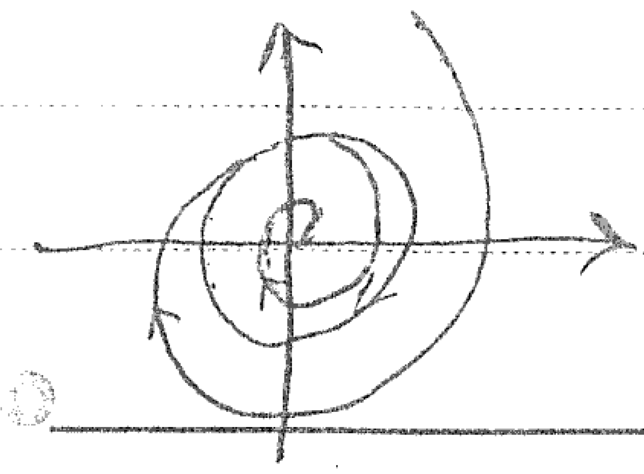
ناپایدار : که حالات سیستم از دو نقطه درون یا بیرون L.C از آن دور می شود.

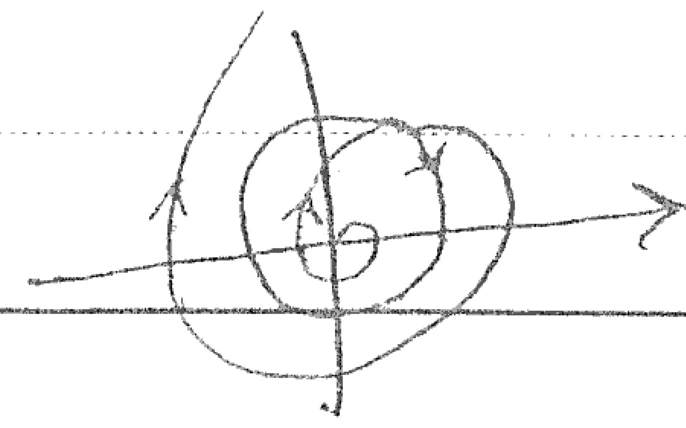


از درون همگرا از بیرون واگرا است

یا بالعکس

نیمه پایدار : از درون یا بیرون به سمت آن همگرا می شود





Ex و آیا در سیستم زیر LC رخ می‌دهد

$$\begin{cases} x_1' = x_2 + \alpha x_1(\beta^2 - x_1^2 - x_2^2) \\ x_2' = -x_1 + \alpha x_2(\beta^2 - x_1^2 - x_2^2) \end{cases}$$

اولین کار باید معادلات حالت را [illegible] آورد
به طوری که بشود آن را حل کرد

$$\begin{cases} r^2 = x_1^2 + x_2^2 \\ \varphi = \tan^{-1}\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} rr' = x_1x_2 + \alpha x_1^2(\beta^2 - x_1^2 - x_2^2) - x_1x_2 + \\ + \alpha x_2^2(\beta^2 - x_1^2 - x_2^2) = \alpha(x_1^2 + x_2^2)(\beta^2 - x_1^2 - x_2^2) \end{cases}$$

$$\boxed{r' = \alpha r(\beta^2 - r^2)}$$

$$\varphi' = \frac{\dfrac{x_2' x_1 - x_1' x_2}{x_1^2}}{1 + \left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2} = \frac{-x_1^2 + \alpha x_1 x_2(\beta^2 - x_1^2 - x_2^2) - x_2^2 - \alpha x_1 x_2(\beta^2 - x_1^2 - x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 + \alpha x_1(\beta^2 - x_1^2 - x_2^2) \\ x_2' = -x_1 + \alpha x_2(\beta^2 - x_1^2 - x_2^2) \end{cases} \longrightarrow \varphi' = -1 \longrightarrow \boxed{\varphi(t) = -t + \varphi(0)}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

تحلیل سوم:

با فرض $r=B$ ← $r'=0$ یک مسیر بسته داریم (سیکل حدی)

با فرض $|r|>|B|$

$\alpha>0$ ← $r'<0$ ← به سمت C با حرکت می‌کنیم (C با پایدار)

$\alpha<0$ ← $r'>0$ ← از C با دور می‌شویم (C ناپایدار)

با فرض $|r|<|B|$

$\alpha>0 \rightarrow r'>0 \rightarrow$ به سمت C با حرکت می‌کنیم (C پایدار)

$\alpha<0 \rightarrow r'<0 \rightarrow$ از C با دور می‌شویم (C ناپایدار)

آیا در سیستم زیر LC وجود دارد؟

$$\begin{cases} x_1' = x_2 - x_1\left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right)^2 \\ x_2' = -x_1 - x_2\left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r^2 = x_1^2 + x_2^2 \\ \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow r r' = x_1 x_1' + x_2 x_2' = x_1 x_2 - x_1^2\left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right)^2 - x_1 x_2 - x_2^2\left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right)^2 =$$

$$\longrightarrow \left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right)^2\left(-x_1^2 - x_2^2\right)$$

$$\Rightarrow r r' = -\left(r^2 - 1\right)^2 r^2 \Rightarrow \boxed{r' = -r\left(r^2 - 1\right)^2}$$

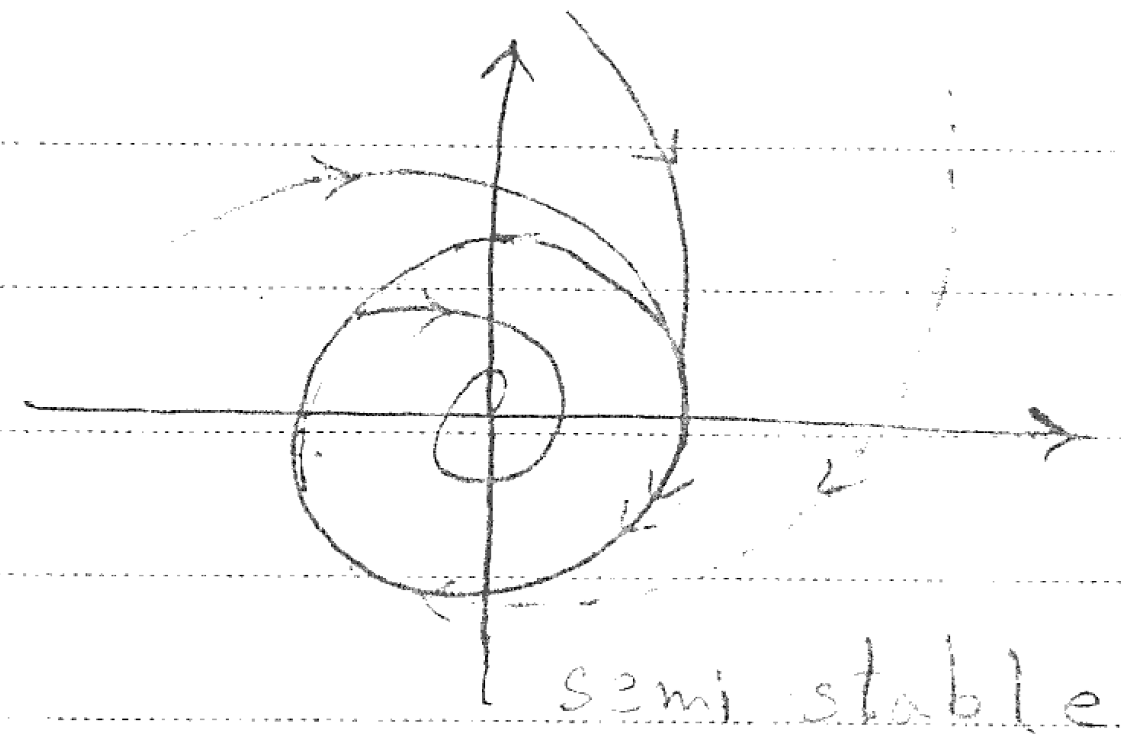
$$\varphi' = \frac{\dfrac{x_2' x_1 - x_1' x_2}{x_1^2}}{1 + \left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2} = \frac{x_2' x_1 - x_1' x_2}{x_1^2 + x_2^2} =$$

$$\longrightarrow \frac{-x_1^2 - x_1 x_2\left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right)^2 - x_2^2 + x_1 x_2\left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right)^2}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{-\left(x_1^2 + x_2^2\right)}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)}$$

$$\boxed{\varphi' = -1} \longrightarrow \varphi(t) = -t + \varphi(0)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\begin{cases} r' = -r(r^2-1)^2 \\ \varphi' = -1 \end{cases}$$



semi stable limit cycle

ملاحظه می‌شود به ازای $r=1$ $(r'=0)$ و L.C رخ می‌دهد از نقطه داریم:

- if $r > 1 \rightarrow r' < 0 \Rightarrow$
- if $r < 1 \rightarrow r' < 0 \Rightarrow$

قضیه Bendixson : (برای اینکه بدانیم در سیستم L.C وجود ندارد از این قضیه استفاده می کنیم)

فرض کنید معادلات یک سیستم غیرخطی صفحه‌ای : $\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2) \\ x_2' = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$ باشد و فرض کنید D یک ناحیه از

صفحه حالت باشد در این صورت اگر در D ، رابطه $\nabla f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \neq 0$ بوده و تغییر علامت

نداشته باشیم آنگاه سیستم غیرخطی فوق در D ، L.C ندارد.

EX : وجود L.C را چک کنید :

$$\begin{cases} x_1' = x_2 = f_1 \\ x_2' = \alpha x_1 + B x_2 - x_1^2 x_2 - x_1^3 = f_2 \end{cases}$$

$$\nabla f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = B - x_1^2$$

گرادیان $\nabla f = B - x_1^2$

$$\begin{cases} \text{if} \quad B < 0 \longrightarrow \text{L.C نداریم} \\ \nabla f < 0 \end{cases}$$

روش K-B :

فرض کنید معادلات یک متغیر غیر خطی بصورت $y''+y=\epsilon F(y,y')$ باشد. در اینصورت با فرض

*

$\epsilon=0$ داریم:

$$\Rightarrow \epsilon=0 \Rightarrow y''+y=0 \Rightarrow \begin{cases} y=a\sin(t+\varphi) \\ y'=a\cos(t+\varphi) \end{cases}$$

حال با فرض $\epsilon\neq 0$ پاسخ * را بصورت زیر پیشنهاد میدهیم:

لذا داریم:

$$\begin{cases} y(t)=a(t)\cdot\sin(t+\varphi(t)) & (1) \\ y'(t)=a(t)\cdot\cos(t+\varphi(t)) & (2) \end{cases}$$

$(1)'=(2)$ تا $a'(t)\cdot\sin(t+\varphi(t))+(1+\varphi'(t))\cdot a(t)\cdot\cos(t+\varphi(t))=$

$=a(t)\cdot\cos(t+\varphi(t))$

$$\Rightarrow a'(t)\cdot\sin(t+\varphi(t))+\varphi'(t)\cdot a(t)\cdot\cos(t+\varphi(t))=0 \quad (3)$$

از طرفی $(*)\longrightarrow (2)'+(1)=\epsilon F(y,y')$ تا

$a'(t)\cdot\cos(t+\varphi(t))-(1+\varphi'(t))\cdot a(t)\cdot\sin(t+\varphi(t))+a(t)\sin(t+\varphi(t))=$

$=\epsilon\cdot F(y,y')$

تا $a'(t)\cdot\cos(t+\varphi(t))-\varphi'(t)\cdot a(t)\cdot\sin(t+\varphi(t))=\boxed{\epsilon\cdot F(y,y')}$ (4)

$$\boxed{t+\varphi(t)\triangleq\theta(t)} \quad (5)$$

Subject:
Year. Month. Date. ۱۲

$$③,④,⑤ \Rightarrow \begin{bmatrix} \sin(\theta) & a\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & -a\sin(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a'(t) \\ \varphi'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma F(\;) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a'(t) \\ \varphi'(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{a}\begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \frac{\cos\theta}{a} & \frac{-\sin\theta}{a} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma F \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a'(t) = \gamma \cos\theta \cdot F(a\sin\theta, a\cos(\theta)) \\ \varphi'(t) = \frac{-\gamma}{a} \cdot \sin\theta \cdot F(a\sin\theta, a\cos\theta) \end{cases}$$

حال اگر $\varphi(t)$ و $a'(t)$ توابعی با تغییرات زمانی کند باشند آنگاه:

$$\begin{cases} a'(t) \simeq \frac{1}{T}\int_0^T a'(t)\cdot dt \\ \varphi'(t) \simeq \frac{1}{T}\int_0^T \varphi'(t)\cdot dt \end{cases} \longrightarrow$$

$$\begin{cases} a'(t) \simeq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \gamma \cdot \cos(\theta)\cdot F(a\sin\theta, a\cos\theta)\, d\theta \\ \varphi'(t) \simeq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{-\gamma}{a} \cdot \sin\theta \cdot F(a\sin\theta, a\cos\theta)\, d\theta \end{cases}$$

همیشه براحتی نمی‌توان این انتگرال را حل کرد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Ex: $y'' + y = \mu \left(y' (1 - y^2) \right)$.

$$a'(t) \simeq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu \cos(\theta) \cdot \left(a \cos(\theta) \cdot \left[1 - a^2 \sin^2 \theta \right] \right) dt =$$

$$\rightarrow \frac{\mu}{2} \left(a - \frac{a^3}{2} \right) \rightarrow a(t) = ?$$

$$\varphi' \simeq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-\mu}{a} \sin(\theta) \cdot \left(a \cos(\theta) \cdot \left[1 - a^2 \sin^2 \theta \right] \right) d\theta = 0 \rightarrow$$

$$\varphi(t) = \varphi(0)$$

$$\rightarrow \boxed{y(t) = a(t) \sin\left(t + \varphi(0) \right)} \checkmark$$ یک جواب است

تحلیل پایداری سیستمهای اتونوموس:

پایداری: به طور عام سیستم پایدار سیستمی است که پاسخ آن همواره در اطراف حالت تعادل بماند.

اتونوموس (Autonomos):

سیستم غیرخطی $X' = f(X,t)$ را اتونوموس گوییم هرگاه f صریحاً به زمان وابسته نباشد.

۱- سیستم غیراتونوموس ذاتی. Ex) $y'' + e^{-t} y'^{2} + \sin(y) = 0$

باعث می شود غیراتونوموس شود.

۲- سیستم غیراتونوموس مصنوعی Ex) $y'' + 2y' + y = u$

$u = y\sin(t)$

نقطه یا حالت تعادل: حالت X_e را حالت تعادل سیستم گوییم هرگاه در آن سیستم به آرامش برسد

یعنی اگر حالت سیستم X_e شد همواره در آن باقی بماند.

$X' = 0 = f \longrightarrow X_e = ?$

* در سیستمهای خطی اگر ماتریس A نامنفرد باشد آنگاه فقط یک نقطه تعادل صفر داریم.

* در سیستم غیرخطی می توانیم چندین نقطه تعادل داشته باشیم.

* اگر نقطه تعادل سیستم غیرخطی غیرصفر باشد با تغییر متغیر می توان نقطه تعادل سیستم جدید را صفر کرد.

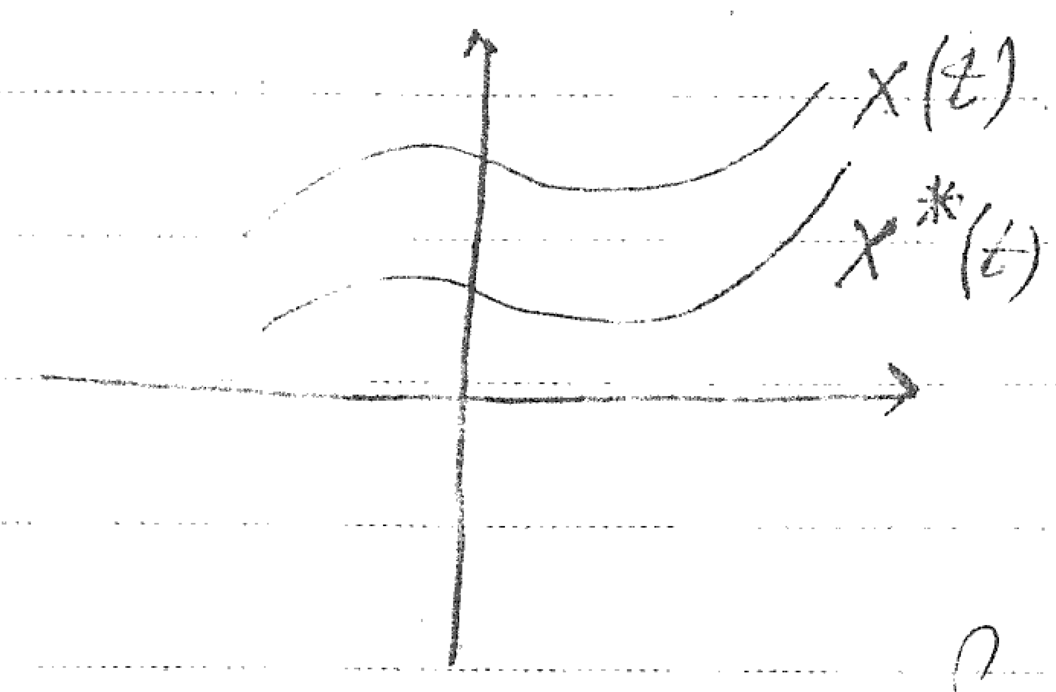
$x'(t) = f(x(t))$ با $X_e = X^* \neq 0$

$y = x - x^* \longrightarrow y' = f(y + x^*) = 0 \longrightarrow y = 0$

$x = y + x^* \to x' = y'$

حرکت نامی ← در بعضی از مسائل به جای پایداری نقطه تعادل با پایداری حرکت مواجه هستیم (مثل مسئله ردیابی)

$X' = f(x)$



با فرض شرایط اولیه X_0

← پاسخ نامی سیستم $X^*(t)$

باید ردیابی بشود

با فرض شرایط اولیه $X_0 +$

← پاسخ نامی سیستم $X(t)$

$$e(t) = x(t) - x^*(t) \rightarrow \text{حالت‌های خطای سیستم}$$

$$e' = x'(t) - x^{*\prime}(t) = f(x) - f(x^*) = f(e + x^*) - f(x^*) = g(e, t)$$

$$\begin{cases} e' = g(e, t) \\ g(0, t) = 0 = e' \end{cases}$$

$e = 0$ نقطه تعادل سیستم

* ممکن است سیستم اصلی (اولیه) اتونوموس باشد ولی بعد از نوشتن و تغییر متغیر خطا سیستم جدید اتونوموس نشود

Ex) $x'' + x' + x^2 = 0$ باید ردیابی شود ← $x^*(t)$

$$(e+x^*)'' + (e+x^*)' + (e+x^*)^2 = 0$$

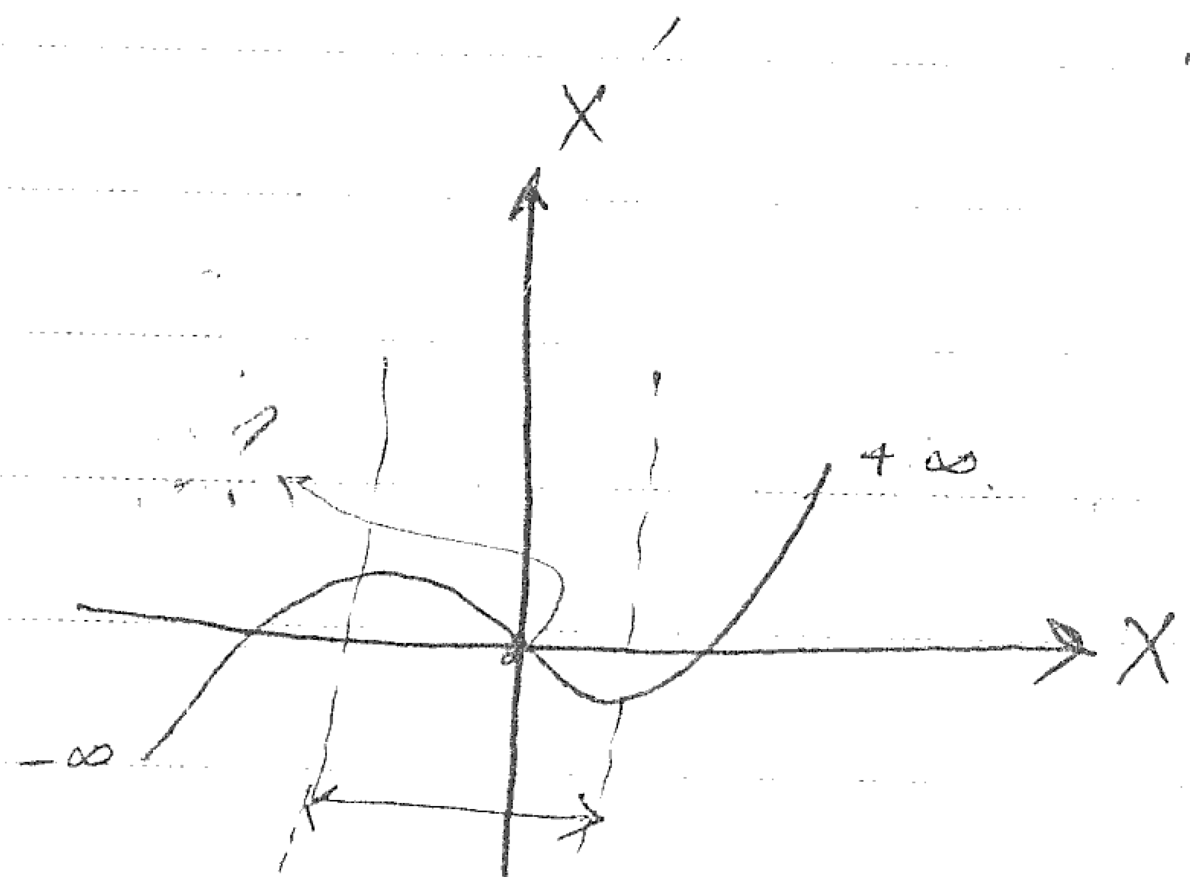
$$\underline{e'' + x^{*''}} + \underline{e' + x^{*'}} + \underline{e^2 + x^{*2}} + 2ex^*(t) \longrightarrow e^{0t} \xrightarrow{} \infty$$

صفر

$$e'' + e' + e^2 + 2e\, x^*(t) = 0$$

تعاریف پایداری:

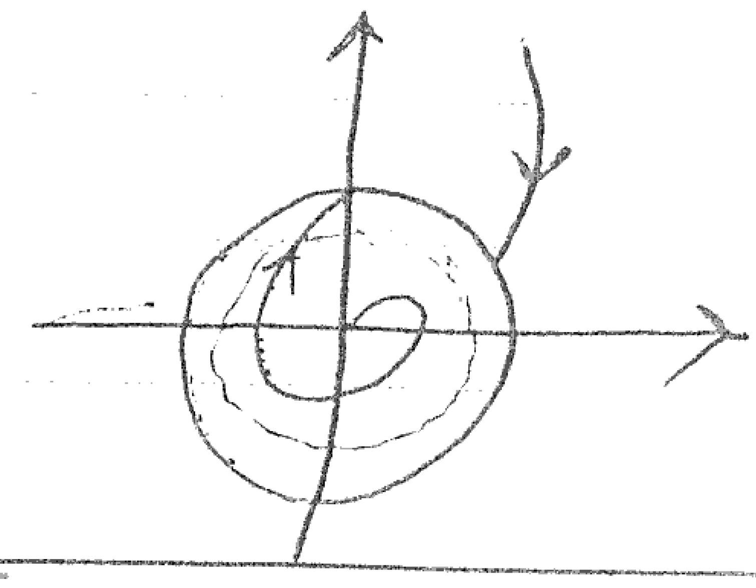
۳ نقطه تعادل داریم تنها نقطه تعادل صفر پایدار است.



بازه پایداری

* در سیستمها غیرخطی ناپایداری منجر به افزایش بی رویه حالت نمی شود. یعنی ممکن است یک سیستم غیرخطی ناپایداری (یعنی)

و نهایتاً دارای حالت محدود باشد (مثل L.C سیکل پایدار)



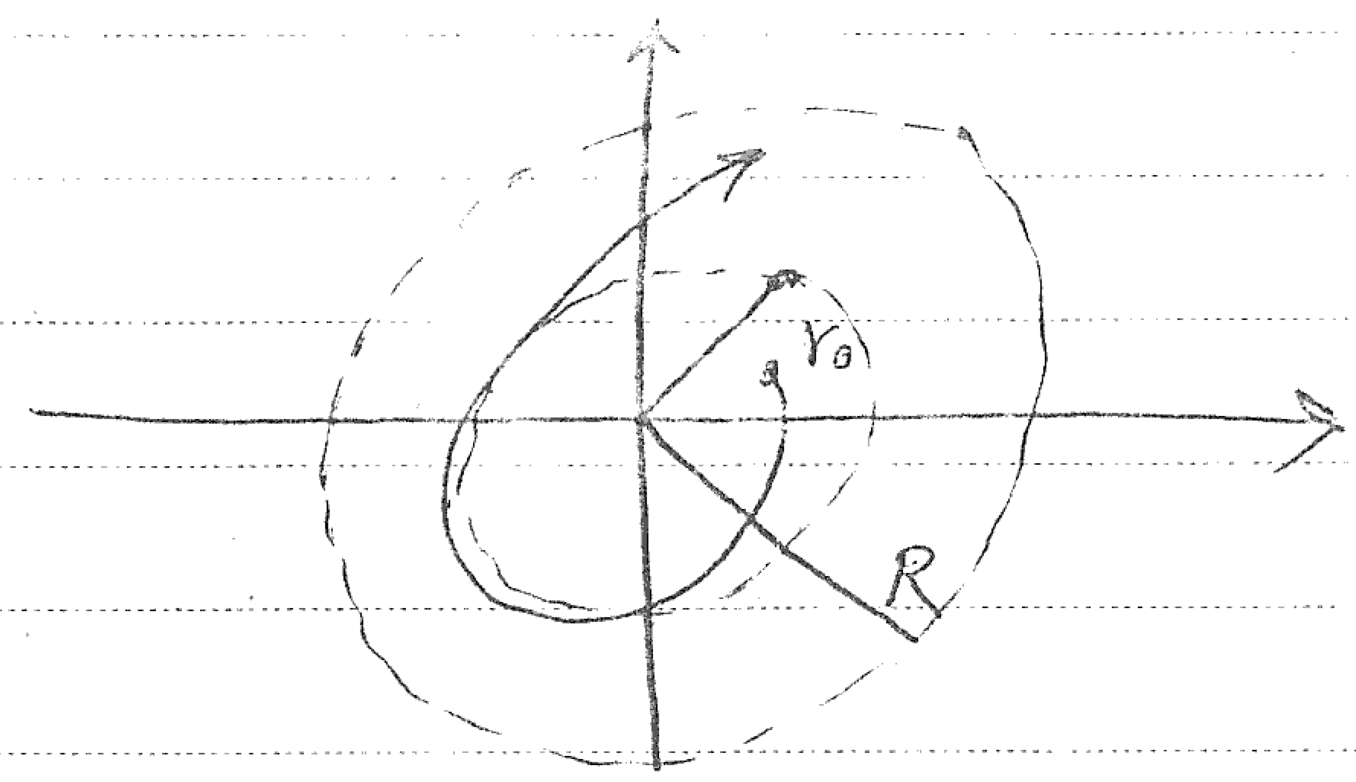
Subject:
Year. Month. Date. ( )

پایداری لیاپانوفی: نقطه تعادل صفر سیستم غیرخطی $\dot{X}=F(X)$ را پایدار به مفهوم لیاپانوف می‌گوئیم هرگاه:

$\forall R>0 \; \exists r>0$ s.t if $x(0)\in B_r \longrightarrow x(t)\in B_R$

از یک نقطه شروع کنیم

محلی (Local)



B_r ← در فضای دو بعدی داخل دایره‌ای به شعاع r در فضای // //

پایداری مجانبی:

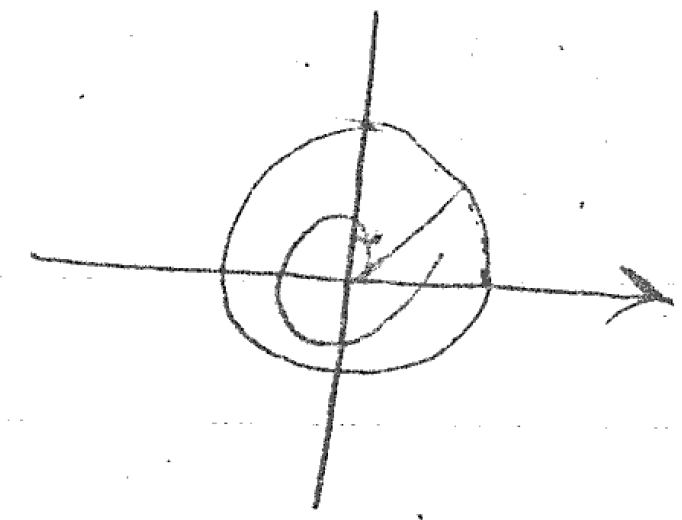
نقطه تعادل صفر سیستم غیرخطی $\dot{X}=F(X)$ پایدار مجانبی محلی است هرگاه

الف) پایدار لیاپانوفی باشد.

Subject:
Year.   Month.   Date. ۱۵

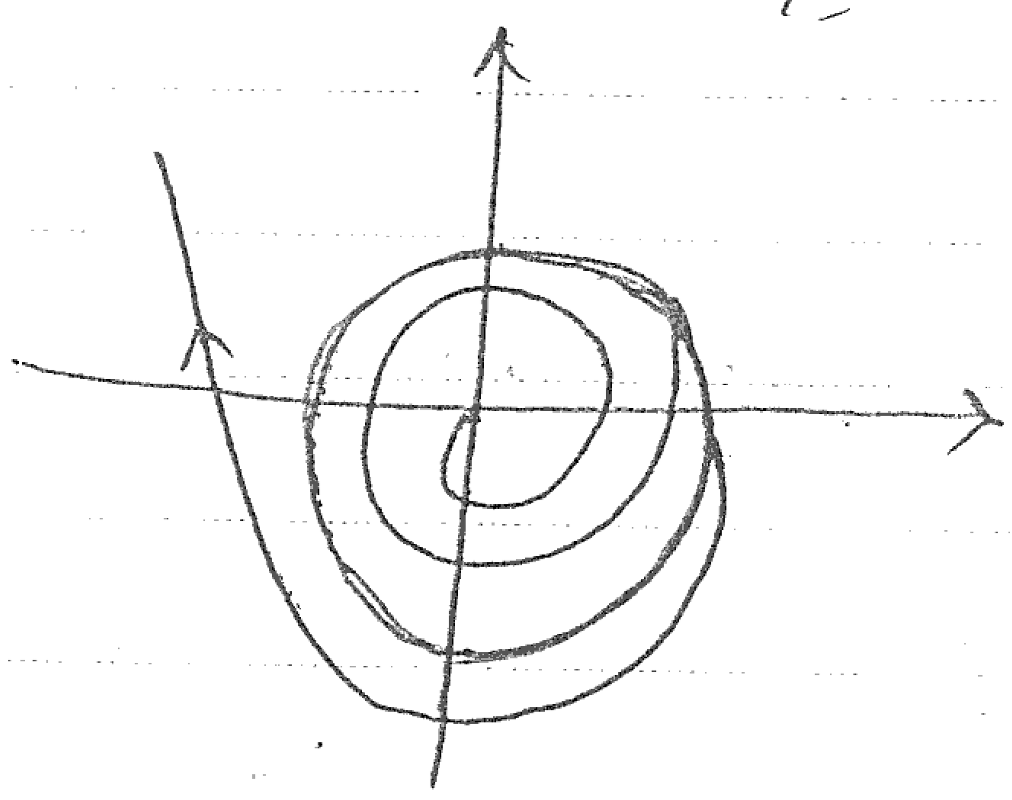
ب) if $x(0) \in B_0$ یا $\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) \to 0$

(a domain of attraction) ناحیه جذب



* برای سیستم غیرخطی بزرگترین ناحیه جذب را بدست آوریم؟

حداکثر یک c مجاز است. باید آن c را با پیدا کردن بیشترین مقدار بدست آوریم



ناپایدار $c=2$

پایداری نمایی: سیستم را پایدار نمایی گوییم هرگاه

$$\|x(t)\| \le K\|x(0)\|e^{-\lambda t}$$

$x(0) \in B$

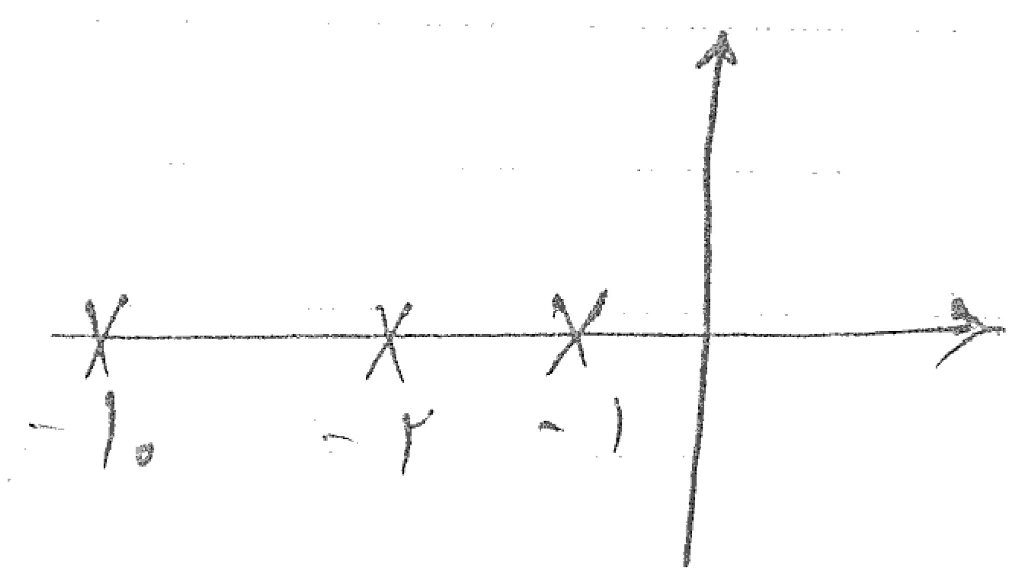
به ازای $\lambda > 0$ ← نرخ همگرایی

پایداری نمایی ⟶ پایدار مجانبی

⟵̸

$x(t) = \frac{1}{1+t}$ ⟶ λ را نمی‌توان پیدا کرد

$x(t) = 0$ $t \to \infty$

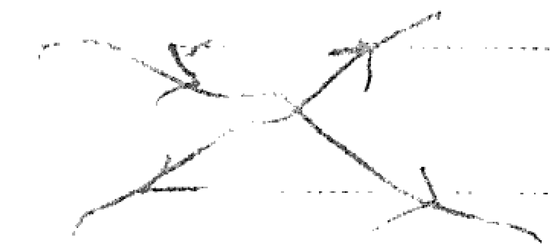


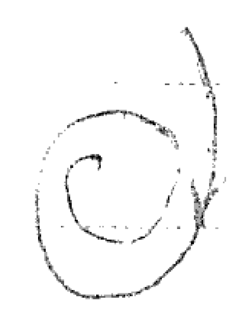
$K_1 e^{-10t} + K_2 e^{-2t} + K_3 e^{-t}$ ⟶ نرخ آن کوچکترین مقدار ویژه از لحاظ اندازه

Subject:
Year. Month. Date. ( )

پایداری کلی :

نقطه تعادل سیستم غیرخطی $\dot{X} = f(X)$ را پایدار مجانبی کلی گوییم هرگاه ناحیه جذب آن تمام فضای حالت باشد.


ناپایدار


مجانبی

قضیه 1 : (خطی سازی لیاپانوف)

روش غیرمستقیم : سیستم غیرخطی $\dot{X} = f(X)$ با نقطه تعادل X_e را در نظر بگیرید فرض کنید معادل خطی شده سیستم فوق بصورت $\dot{X} = AX$ که $A = \left[\frac{\partial f}{\partial X}\right]_{X_e}$ است باشد

در این صورت داریم :

1) نقطه تعادل سیستم غیرخطی پایدار مجانبی است هرگاه تمام مقادیر ویژه ماتریس A در سمت چپ محور موهومی باشد

2) نقطه تعادل سیستم غیرخطی ناپایدار است هرگاه ماتریس A دارای مقادیر ویژه سمت راست یا مقادیر ویژه تکراری بر روی محور موهومی باشد.

Subject:

Year. Month. Date. ۱۴

۳) اگر ماتریس A دارای تعدادی مقادیر ویژه غیر تکراری بر روی محور موهومی بوده و مابقی مقادیر ویژه آن در سمت چپ باشد آنگاه از قضیه فوق هیچ نتیجه‌ای نمی‌توان گرفت.

Ex) $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -(g/l)\sin(x_1) - K/m \, x_2 \end{cases} \Rightarrow$

(در سیستم خطی پایداری مرزی بود)

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1' = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \\ x_2' = 0 \Rightarrow \sin(x_1) = 0 \end{cases}$$

$x_1 = 0, \pi, \ldots$

حول نقطه تعادل مبدا سیستم را خطی کنید؟

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x_e=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos(x_1) & -\frac{K}{m} \end{bmatrix} \underset{(0)}{=} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{K}{m} \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{g}{l} & \lambda + \frac{K}{m} \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{K}{m}\lambda + \frac{g}{l} = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_{1,2} \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{K}{2m} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{K}{m}\right)^2 - 4\frac{g}{l}} \\ K, m, g > 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[K,m,g>0]{\text{با فرض}} Re\{\lambda_i\} < 0$$

نقطه تعادل سیستم پایدار مجانبی محلی است.

چون سیستم را خطی کرده‌ایم

Ex) $\dot{x} = bx^3$

: manifold

یک مانیفلد زیرفضایی از فضای اقلیدسی است. در واقع هر object ای که در فضای کوچک flat باشد را مانیفلد می‌گوییم.

* در این درس پاسخ یک مانیفلد با بعد K پاسخ معادله $\eta(x)=0$ است که η مشتق‌پذیر پیوسته بوده و $R^n \to R^{n-K}$ می‌برد.

* مانیفلد $\eta(x)$ را invariant manifold گوییم هرگاه:

$\eta(x(0))=0 \Rightarrow \eta(x(t))=0$ $\longrightarrow$ در بازه زمانی تعریف $x(t)$

از یک نقطه

در لحظه اول در یک ناحیه باشیم در لحظه‌های بعد در آن ناحیه باقی بمانیم.

Subject:
Year. Month. Date. ۱۷

سیستم غیرخطی $x' = f(x)$ را که f یک تابع مشتق‌پذیر پیوسته بوده و $f(0)=0$ و $\frac{\partial f}{\partial x}(0)=0$ است

را در نظر بگیرید.

فرض کنید با استفاده از خطی‌سازی نتیجه زیر حاصل شود $A=\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{x=0}$ و ماتریس A دارای k مقدار

ویژه غیرتکراری بر روی محور موهومی و $m=n-k$ مقدار ویژه دیگر آن در سمت چپ محور موهومی باشند، در این صورت

تبدیل همانندی T را به گونه‌ای اعمال می‌کنیم که داشته باشیم:

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = T.x \longrightarrow \begin{cases} x \in R^n \\ y \in R^k \\ z \in R^m \end{cases} \qquad \hat{T} = TAT^{-1} = \begin{array}{c} \scriptstyle k\times k \\ \left[\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right]_{n\times n} \end{array}$$

بلوک قطری

A_1 دارای k مقدار ویژه بر روی محور موهومی و
A_2 دارای m مقدار ویژه در سمت چپ است

با اعمال T متغیر داریم:

$$y' = A_1 y + g_1(y,z) \quad (\mathrm{II})$$

$$z' = A_2 z + g_2(y,z) \quad (\mathrm{III})$$

$$(\mathrm{IV}) \begin{cases} g_i(0,0) = 0 \\ \frac{\partial g_i}{\partial z}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial g_i}{\partial y}(0,0) = 0 \end{cases}$$

در این صورت اگر $z=h(y)$ برای (۲) و (۳) یک invariant manifold باشد آنگاه آن را

center manifold گوییم اگر $h(0)=0$ و $\frac{\partial h}{\partial y}(0)=0$ باشد

Subject:
Year. Month. Date. ( )

قضیه (I) :

فرض کنید g_1 و g_2 شرایط (4) را داشته باشند و ماتریس های A_1 و A_2 شرایط گفته شده در قبل را داشته باشند در این صورت ناحیه‌ای مانند $\|y\| <$ مقدار حالت یکتا می‌شود که در آن ناحیه $z = h(y)$ center manifold است.

* فرض کنید $z(0) = h(y(0))$ باشد (حالت اولیه در C.M قرار گیرد) در این صورت پاسخ سیستم در هر نقطه $(y(t), z(t))$ نیز در C.M قرار می‌گیرد.

در این صورت مسیر حالت را می‌توان از معادله کاهش یافته پیدا کنیم

$$y' = A_1 y + g_1(y, h(y))$$

* در صورتی که $z(0) \neq h(y(0))$ باشد، آنگاه $z(t) - h(y(t))$ بیانگر انحراف تراژکتوری از C.M است در این صورت با تغییر متغیر $w = z - h(y)$ و اعمال آن به سیستم داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} y' = A_1 y + g_1(y, w + h(y)) & (5) \\ w' = A_2(w + h(y)) + g_2(y, w + h(y)) - \dfrac{\partial h}{\partial y}\left[A_1 y + g_1(y, w + h(y))\right] & (6) \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ۱۸

* در این حالت $w=0$ معرف $C.M$ است با اعمال آن به ⑤ و ④ داریم:

$$\frac{\partial h}{\partial y}\left[A_1 y + g_1(y, h(y))\right] - A_2 y - g_2(y, h(y)) = 0$$

$$h(0)=0 \qquad \frac{\partial h}{\partial y}(0)=0 \qquad (*)$$

بعد از یافتن $h(y)$ و اعمال به ⑤ $\longrightarrow$

$$\dot{y} = A_1 y + g_1(y, h(y)) \qquad (**)$$

تعیین کننده حرکت روی $C.M$ است
مهم

قضیه ۲: $(C.M)$

سیستم ① و معادله کاهش (** و *) را در نظر بگیرید. در این صورت اگر سیستم کاهش پایداری مجانبی (ناپایدار) باشد

نقطه تعادل آن

آنگاه، سیستم اصلی پایدار مجانبی (ناپایدار) است

* در صورتی که $\|y\|^{p+1}$ و $\dot{y} = ay^{p} + o$ باشد آنگاه اگر p فرد و $a<0$ باشد سیستم پایدار مجانبی است در غیر این صورت ناپایدار است.

$f(y) = o\left(\|y\|^{p+1}\right)$

$\longrightarrow \|f(y)\| \leq K\|y\|^{p+1}$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

* حل معادله (*) اغلب سخت و ناممکن است با استفاده از بسط تیلور $h(y)$ را تقریب می‌زنیم

$$h(y)=\sum_{i=1}^{n} K_i y^i \qquad h(y)=h_0+h_1 y+h_2 y^2+\dots$$

صفر   صفر

با فرض $h(y)=o\left(\|y\|\right)^2$ مرتبه ۲   اغلب جواب‌ها می‌دهد تا حدی

$$h(y)=h_2 y^2+o\left(\|y\|^3\right)$$

$$h(y)=h_2 y^2+h_3 y^3+o\left(\|y\|^4\right)$$

Ex)
$$\begin{cases} x_1' = x_1 x_2 = 0 & x_e=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \\ x_2' = -x_2 + a x_1^2 = 0 \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$ خودش قطری است، نیاز به پیدا کردن T نیست $$\Rightarrow eig(A)=\begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=-1\end{cases}$$

$$(A-\lambda_1 I)v_1=0 \longrightarrow v_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=0 \longrightarrow v_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

چند سوال با خطی سازی
چند تا هم با center manifold حل شده

$$(A-\lambda_2 I)\,v_2 = 0 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \longrightarrow x = 0 \longrightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T = [v_1 \quad v_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} y = x_1 \\ z = x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = x_1' = yz \\ z' = x_2' = -z + ay^2 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} y' = yz \\ z' = -z + ay^2 \end{cases}$$

(*) معادله $\left(\dfrac{\partial h}{\partial y} \left(y \cdot h(y) \right) + h(y) - ay^2 \right) = 0$

* نیاز به حل نیست از روش تقریب استفاده می‌کنیم.

$$h(0) = 0 \qquad \frac{\partial h}{\partial y}(0) = 0$$

روش تقریب

$$\begin{cases} h(y) \simeq 0 = o(\|y\|^2) \longrightarrow y' = o\|y\|^3 \quad \xrightarrow{\text{معادله نامعین از توان ۳ به بعد}} \times \\ h(y) = h_2 y^2 + o(\|y\|^3) \longrightarrow y' = h_2 y^3 + o(\|y\|^4) \\ \text{معادله کامل} \quad y' = ay^3 + o(\|y\|^4) \end{cases}$$

با مقایسه معادله $h_2 = a$

* سیستم پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر $a < 0$ باشد.

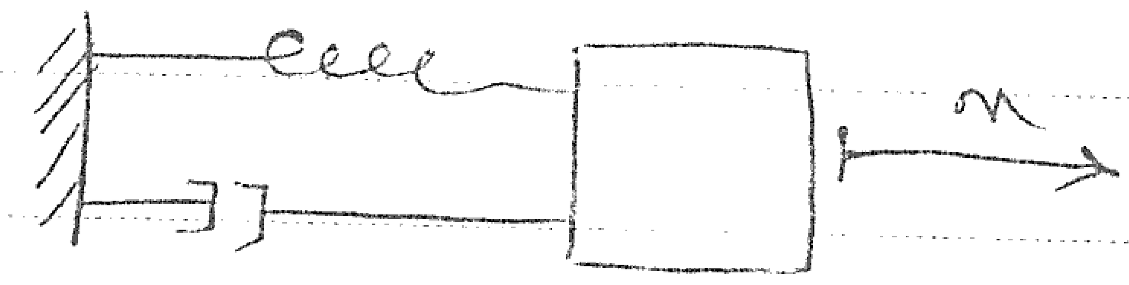
* نقطه تعادل $(0,0)$ سیستم غیرخطی پایدار مجانبی است

Subject:

Year. Month. Date. ( )

۱,۲۳

روش مستقیم لیاپانوف:



سیستم به لحاظ انرژی به دست پایداری است.

معادله سیستم $mx'' + bx'|x'| + K_0 X + K_1 X^3 = 0$

$V(x) = \frac{1}{2} m e'^2 + \int_0^X (K_0 X + K_1 X^3)\, dx$

$V' = -b|x'|^3 \xrightarrow{(N.S.D)}$ [illegible]

$b > 0 \quad , \quad V'(X \neq 0 , X' = 0) = 0$

مثبت معین (P.D): تابع اسکالر $V(x)$ را P.D گوییم هرگاه:

$V(0) = 0 \quad , \quad V(x) > 0 \quad for \ X \neq 0$

۱- اگر شرایط فوق در ناحیه D صادق باشد ← l.P.D (محلی یا ناحیه‌ای) (local)

۲- اگر شرایط فوق در کل فضای حالت صادق باشد ← g.P.D (کلی) (global)

مثبت نیمه معین (P.S.D): تابع اسکالر $V(x)$ را P.S.D گوییم هرگاه:

$V(0) = 0 \quad , \quad V(x) \geq 0 \quad for \ X \neq 0$

۱- $V(x)$ را N.D گوییم هرگاه $-V(x)$ P.D باشد.

۲- $V(x)$ را N.S.D گوییم هرگاه $-V(x)$ P.S.D باشد.

$\dot V(x) = \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} = \nabla V \cdot \dot x(t)$

قضیه 1 : سیستم غیرخطی اتونومس $\dot X = f(X)$ را با نقطه تعادل صفر در نظر بگیرید :

در این صورت اگر تابع اسکالر $V(x)$ (تابع لیاپانوف) با مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته در ناحیه D یافت شود .

الف) $V(x)$ ، P.D (مثبت معین) باشد .

ب) $\dot V(x)$ ، N.S.D (منفی نیمه معین) باشد .

← نقطه تعادل صفر سیستم پایدار لیاپانوفی است .

ج) اگر $\dot V(x)$ ، N.D (منفی معین) باشد الف و ج ← نقطه تعادل صفر سیستم ، پایدار مجانبی مطلق است .

EX) $\ddot X + \dot X + \underbrace{\sin(X)}_{\text{تابع } x} = 0$ ← فنر

دمپر = تابع $\dot X$

تابع متناظر تابع لیاپانوف را به صورت مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل در نظر می‌گیریم :

$m\ddot x + \frac{1}{2}\dot x^2 + \int_0^x$

$V(x) = \frac{1}{2}\dot x^2 + \int_0^x \sin(x)\,dx$

$\dot V(X) = -\dot X^2$

$\dot V(x \neq 0 , \dot X = 0) = 0$ → N.S.D → دو حالت داریم که یکی نیامده پس حتماً ←

$V(x) = \frac{1}{2}\dot X^2 + (1-\cos x)$, $V(\dot x = 0 , X = 2\pi)$

بایستی X محدود به ناحیه خاصی شود که در آن ناحیه $V(x)$ ، P.D باشد لذا (محلی) از طرفی $\dot V$ (N.S.D) ← پایدار لیاپانوفی محلی است .

Subject:

Year. Month. Date. ( )

Ex) $x'' + \underbrace{\frac{K}{m} x'}_{\text{تابع } x} + \underbrace{\frac{g}{L} \sin x}_{\text{تابع } x} = 0$

پایداری سیستم را بررسی کنید

تابع لیاپانوف $= V(x)$ ← اولین کار انتخاب

برای هر تابعی به صورت داده شده

$L(x, x', x'')$ تابع لیاپانوف

I

(I) $V(x) = \frac{1}{2} x'^2 + \int^{x} \frac{g}{L} \sin(x)\, dx$

(II) $\dot V(x) = x' x'' + x' \frac{g}{L} \sin(x) = -\frac{K}{m} x'^2$

(I) $= \frac{1}{2} x'^2 + \frac{g}{L} (\underbrace{1 - \cos x}_{\to\ L.P.D}) \rightarrow V \begin{pmatrix} x = 2\pi \\ x' = 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad 0 < x < 2\pi$

(II) $\dot V \begin{pmatrix} x \neq 0 \\ x' = 0 \end{pmatrix} = \quad \dot V$ is N.S.D

(نقطه تعادل صفر سیستم پایدار لیاپانوفی محلی است)

قضیه ۲: سیستم غیرخطی اتونومی $\dot{X}=f(x)$ را با نقطه تعادل صفر در نظر بگیرید که در کل صفحه فضای حالت داشته باشیم:

الف) $V(x)$، P.D باشد. (مثبت معین)

ب) $\dot{V}(x)$، منفی معین باشد. (ولی منفی معین خیلی سخت است و اگر در امتحان بیاید از منفی نیمه معین حل کنید.)

ج) $V(x)$ شعاعی نامحدود باشد $\leftarrow$ $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} V(x) \to \infty$ $\leftarrow$ این شرط همیشه اتفاق می‌افتد.

نقطه تعادل صفر سیستم پایدار مجانبی کلی است.

* دقت شود که اغلب اثبات پایداری مجانبی با قضایای ① و ② اتفاق می‌افتد. زیرا شرط N.D بودن $\dot{V}$ اغلب میسر نمی‌شود.

EX: $\dot{x} = ax + bx^5$

ناحیه خطی $\quad A = a + 5bx^4\big|_{0} = a$

$V(x)=\frac{1}{2}x^2 \longrightarrow \dot{V} = x\dot{x} = bx^6$

EX: $\dot{x} + c(x) = 0$ که $\begin{cases} c(0)=0 \\ x\cdot c(x) > 0 \quad x \neq 0 \end{cases}$

بررسی پایداری: با انتخاب $\begin{cases} V(x) = \frac{1}{2}x^2 \\ \dot{V}(x) = x\dot{x} = -x\cdot c(x) < 0 \end{cases}$ $\rightarrow$ نقطه تعادل صفر سیستم پایدار مجانبی کلی است.

ضمناً $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{2}x^2 \to \infty$

Subject:

Year.   Month.   Date.   ( )

* در اکثر مواقع اثبات منفی معین کردن $\dot{V}(x)$ بسیار مشکل بوده لذا در قضیه (I.S) تا حدی این مشکل برطرف می‌شود.

EX) $y'' + (a + b\cos y)\,y' + c\cdot\sin y = 0$ $\left\{ a, b, c > 0 \right.$ (شرط)

$0 < y < 2\pi$

$V = \frac{1}{2} y'^2 + \int_0^y c\cdot\sin y\, dy = \frac{1}{2} y'^2 + c\cdot(1 - \cos y) \longrightarrow (L.P.D)$

$\dot{V} = -(a + b\cos y)\, y'^2$, $\underbrace{a > b}_{\text{شرطی که اضافه کردیم}} \longrightarrow \dot{V}\begin{pmatrix} y \neq 0 \\ y = 0 \end{pmatrix} \longrightarrow (N.S.D)$

نقطه تعادل صفر سیستم فوق براساس قضایایی که تا اینجا گفته شده پایدار لیاپانوفی مطلق است.

Invarian set : (I.S) ← مجموعه نامتغیرها

* ناحیه G را invarian set گویند هرگاه حالت سیستم در آن قرار گیرد و همواره در آن باقی بماند.

مانند (نقطه تعادل، L.C، ناحیه جذب، ...)

قضیه (I.S):

$$I.S: \begin{cases} x' = f(x) \quad , \quad x_e = 0 \rightarrow \text{نقطه تعادل} \\ V(x) = L.P.D \end{cases}$$

اگر بخواهیم در مورد پایداری صحبت کنیم یک لیاپانوف تعریف کنیم

→ ناحیه ای یافت شود → $V(x) < l$ و $\xrightarrow[\text{ای}]{\text{از ناحیه}}$ $V'(x) < 0 \rightarrow N.S.D$

قضیه 1 الف و ج رخ می دهد

آنگاه ناحیه R را در ناحیه ای برگزیده ای انتخاب می کنیم که در R، $V'(x)=0$ باشد.

در این صورت اگر M بزرگترین I.S درون R باشد آنگاه هر حالت سیستم که از درون ناحیه شروع به حرکت کند نهایتاً به M می رسد.

نکته: اگر M نقطه تعادل سیستم باشد آنگاه تمام حالات سیستم که از بالا حرکت می کند و به سمت نقطه تعادل حرکت می کند و لذا M پایدار مجانبی است.

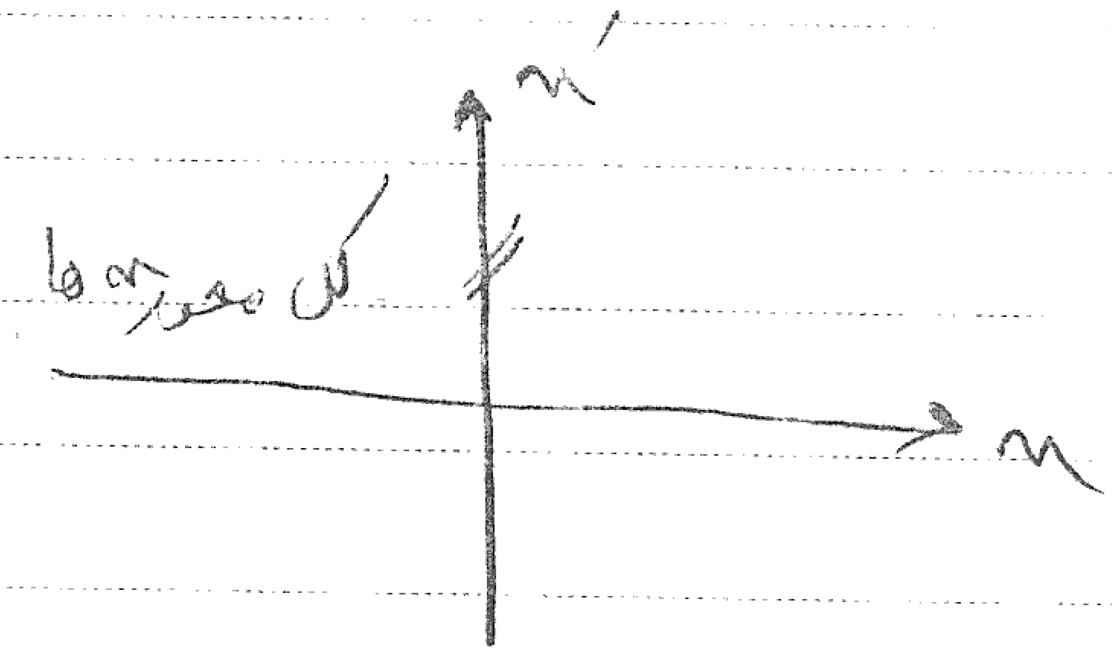
Subject:
Year. Month. Date. ( )

EX) لیاپانوف

$$V(x) = \frac{1}{2} m x'^2 + \int_0^x (\sin(\alpha))\, dx \longrightarrow L.P.P$$

$$V'(x) = -b(x'^2) \longrightarrow N.S.D$$

$$\text{if. } V'(x) = 0 \Rightarrow x' = 0 \rightarrow R = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$



حال فرض کنید M مجموعه نقاط $X \neq 0$ باشد ← با جایگذاری $X \neq 0$ و $X' = 0$ در معادلات سیستم داریم:

$$m x'' + K_0 X + K_1 X^3 \Rightarrow m x'' = -K_0 X - K_1 X^3$$

* لذا ملاحظه می شود که فرض فوق ناممکن است پس M فقط شامل مبدا مختصات می باشد

* و طبق قضیه I.S نقطه تعادل سیستم پایدار مجانبی است.

Subject:

Year. Month. Date. ۲۳

EX) سوال تمرینی

$$\begin{cases} x_1' = \sin(x_2)\cdot\cos(x_1) + x_1^3 + u \\ x_2' = -x_1 x_2 \cos(x_1) \\ V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

باید اول ناحیه‌ای پیدا کنیم که $V' = 0$

$x_2' = -x_1 x_2 \cos(x_1) \rightarrow$ (N.D) (نادیده بگیرید) وقتی ۲ تا state داشته باشیم هر یکی باید می‌شود

$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \rightarrow$ مثبت معین است

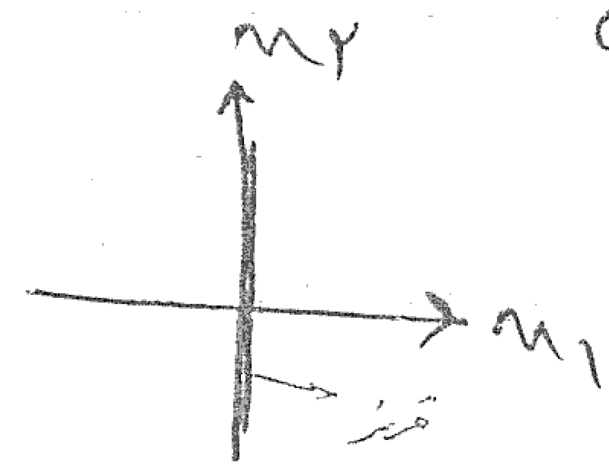
برای کنترل u را طوری تعیین کنید که نقطه تعادل مبدا سیستم پایدار مجانبی باشد؟

$$V'(x) = x_1 x_1' + x_2 x_2' = x_1 \sin(x_2)\cos(x_1) + x_1^4 + x_1 u + x_1 x_2^2 \cdot \cos(x_1)$$

$$u = -\sin(x_2)\cos(x_1) + x_2^2\cos(x_1) - 2x_1^3$$

$\rightarrow V' = -x_1^4 \rightarrow V'$ is N.S.D و $V'(x_1 = 0, x_2 \neq 0)$ و → برای اثبات پایداری مجانبی از I.S استفاده می‌کنیم.

$$V' = 0 \rightarrow x_1 = 0 \rightarrow R = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{L}$$



با جایگذاری بردار کنترل پیشنهادی u در معادلات سیستم داریم:

$$\begin{cases} x_1' = -x_1^3 + x_2^2 \cos(x_1) \\ x_2' = -x_1 x_2 \cos(x_1) \end{cases}$$

* حال با فرض اینکه M، شامل $x_2 \neq 0$ باشد داریم: ←

$$\begin{cases} x_1' = x_2^2 \\ x_2' = 0 \end{cases}$$

مشاهده می‌شود که فرض فوق غلط است.

چون اگر $x_2 \neq 0$ باشد ← $x_1' \neq 0$ که با فرض $x_1 \neq 0$ سازگاری ندارد.

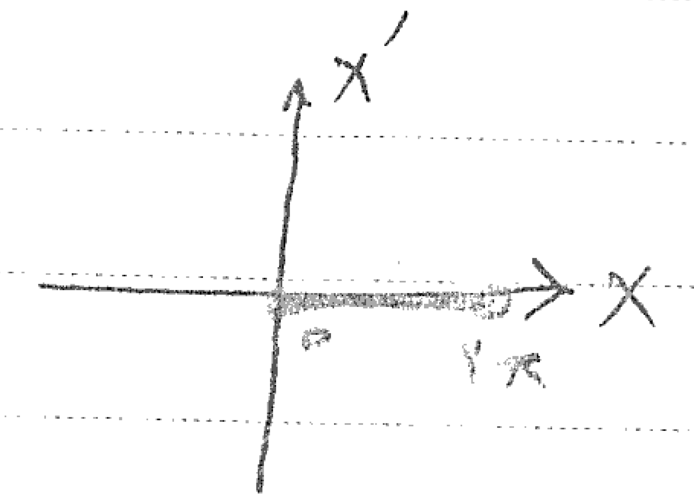
* لذا طبق قضیه I.S ، M فقط شامل مبدا مختصات بوده و نقطه تعادل پایدار مجانبی است.

EX) $x'' + \frac{k}{m}x' + \frac{g}{l}\cdot\sin x = 0$

$V = \frac{1}{2}x'^2 + \int_0^x \frac{g}{l}\cdot\sin x\cdot du$

$V' = -\frac{k}{m}x'^2$

$\Bigg\}\ \dot{V} = 0 \Rightarrow x' = 0 \Rightarrow R = \begin{pmatrix} x \\ x' = 0 \end{pmatrix}$ ی محورها



فرض کنید M شامل مبدأ نباشد یعنی $x \neq 0$ در این صورت باید $x'' + \frac{k}{m}x' + \frac{g}{l}\sin x = 0$

با جایگذاری M در سیستم داریم:

$x'' + \frac{g}{l}\cdot\sin x = 0$ یا $x'' = -\frac{g}{l}\cdot\sin x \rightarrow \sin(x) = 0$ $\quad \left.\begin{matrix} x' = 0 \\ x \neq 0 \end{matrix}\right\}$ در M

چون $x' = 0$ است ...

در این صورت اگر ناحیه Ω را $0 < x < \pi$ انتخاب کنیم آنگاه در این ناحیه به ازای $x \neq 0$ و $\sin x \neq 0$ بوده یعنی M انتخابی در معادلات سیستم صدق نمی‌کند یعنی M فقط شامل مبدأ مختصات می‌شود لذا تحت شرایط فوق نقطه تعادل صفر سیستم به ازای (I.S) پایدار و مجانبی محلی است (P.D)

I.S ← کاربرد — پایداری

اگر M شامل لیمیت سایکل شود ← L.C را تعیین می‌کند.
(یعنی هم یک L.C است)

Subject:

Year. Month. Date. ۲٫٤

EX)
$$\begin{cases} x_1' = x_2 - x_1^7 (x_1^4 + 2x_2^2 - 10) \\ x_2' = -x_1^3 - 3x_2^5 (x_1^4 + 2x_2^2 - 10) \end{cases}$$

$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots$ ← قطبی

$x_e = (0,0)$

$G = (x_1^4 + 2x_2^2 - 10) \rightarrow G' = 4x_1^3 x_1' + 4x_2 x_2' \rightarrow$ x_1' و x_2' را جایگزین می‌کنیم مشتق در حدود آن صفر می‌شود

ناحیه $G = (x_1^4 + 2x_2^2 - 10)$ یک (I.S) است زیرا مشتق آن بر روی خودش صفر است.

در این صورت با تعریف تابع لیاپانوف به صورت زیر داریم:

$V = (x_1^4 + 2x_2^2 - 10)^2 \longrightarrow$ برای مثبت معین بودن به این صورت تعریف می‌شود

$$V' = 2(x_1^4 + 2x_2^2 - 10)(4x_1^3 x_1' + 4x_2 x_2') = -2\underbrace{(x_1^4 + 2x_2^2 - 10)}_{L.C}{}^2 (4x_1^{10} + 12x_2^6)$$

$V' \longrightarrow N.S.D$ است

if $V' = 0 \longrightarrow R = ($ L.C و مبدا مختصات $)$ $\xrightarrow{\text{با فرض}} V(x) < 1\dots$

$x = L.C$ ← در حالتی که از این ناحیه شروع به حرکت کند نهایتاً به L.C حرکت می‌کند (stable L.C)

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1^3 \end{cases}$$

روش تحلیلی محاسبه صفحه فاز ↑ ←

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_1^3}{x_2} \rightarrow x_2\, dx_2 = -x_1^3\, dx_1$$

که تفکیک‌پذیر شد پس می‌توان جواب را بدست آورد.

47

$\frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1^4}{4} = C \longrightarrow$ یعنی یک L.C است.

مربعی = $n\times n$

تحلیل لیاپانوفی سیستمهای LTI (ادامه بحث):

متقارن: ماتریس M را متقارن (symetric) گفته می‌شود هرگاه $M=M^T$

شبه متقارن: ماتریس M را شبه متقارن (skew-symetric) گفته هرگاه $M^T=-M$

هر ماتریس را می‌توان به صورت جمع یک ماتریس متقارن و شبه متقارن نوشت:

$$A=\underbrace{\frac{A+A^T}{2}}_{\text{متقارن}}+\underbrace{\frac{A-A^T}{2}}_{\text{شبه متقارن}}$$

* ماتریس مربعی M را مثبت معین (P.D) گفته هرگاه تمام minorهای (کهاد) آن مثبت باشد یا تمام مقادیر ویژه آن مثبت باشد و به ازای $x\neq0$ (بردار غیر صفر) $\rightarrow X^T.M.X>0$ باشد.

* ماتریس مربعی M را مثبت نیمه معین (P.S.D) گفته هرگاه تمام minorهای آن بزرگتر مساوی با صفر یا $eig(M)\geq0$ (مقادیر ویژه) باشد و به ازای $x\neq0$ $\rightarrow X^T.M.X\geq0$ باشد.

* ماتریس مربعی M، منفی معین (N.D) [منفی نیمه معین N.S.D] است هرگاه $-M$، مثبت معین (P.D) [مثبت نیمه معین P.S.D] باشد.

* یکی از معمول‌ترین کاندیدها برای تابع لیاپانوف، فرم درجه دوم آن به صورت $V(x)=X^T.P.X$ است که P ماتریس $n\times n$ است.

در این صورت: $V(x)$، مثبت معین (P.D) و [مثبت نیمه معین P.S.D] است هرگاه ماتریس P، مثبت معین و (مثبت نیمه معین) باشد.

۷(۱۲)، منفی معین (N.D) و [منفی نیمه معین (N.S.D)] است هرگاه ماتریس P، منفی معین و [منفی نیمه معین] باشد

* فرم درجه دوم هر ماتریس مربعی نیمه متقارن همواره صفر است.

$$M = -M^T$$

$$X^T . MX = -X^T_{1\times n} . M^T_{n\times n} . M_{n\times 1} \Rightarrow (-X^T . M^T . X)^T \Rightarrow \begin{cases} -X^T . M . X \\ \text{با} \\ 2X^T . M . X = 0 \rightarrow \cancel{M = 0} \end{cases}$$

اسکالر است ترانهاده بگیریم
خودش می‌شود.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

قضیه لیاپانوف برای سیستمهای LTI :

(*) سیستم LTI ، $\dot{X}(t)=AX(t)$ را در نظر بگیرید با تابع لیاپانوف $V(x)=X^T P X$ (مثبت معین) در این صورت و

که $\dot{V}(x)=-X^T Q X$ (منفی معین) است $A^TP+PA+Q=0$ (لیاپانوف (A)) . در این صورت سیستم پایدار مجانبی است

اگر و تنها اگر به ازای هر ماتریس P.D متقارن Q ($Q=I$) ، یک ماتریس مثبت معین متقارن P از معادله

لیاپانوف منتج شود.

اثبات A :

$$V(x)=X^T \cdot P \cdot X$$

$$\dot{V}(x)=\dot{X}^T \cdot P \cdot X+X^T \cdot P \cdot \dot{X}=(A \cdot X)^T \cdot P \cdot X+X^T \cdot P \cdot (A \cdot X)$$

$$\dot{V}=X^T \cdot A^T \cdot P \cdot X+X^T \cdot P \cdot A=X^T \underbrace{(A^T \cdot P+P \cdot A)}_{=-Q}X=-X^T \cdot Q \cdot X$$

Q را واحد انتخاب می‌کنیم و معادله را حل می‌کنیم بعد P را بر حسب Q بدست می‌آوریم اگر شرایط را داشت P مثبت معین است

مراحل بالا:
۱_ انتخاب $Q=I$
۲_ حل معادلات لیاپانوف
۳_ اگر P، مثبت معین شود آنگاه سیستم پایدار مجانبی است.

معادله لیاپانوف ... حل می‌کنیم

Subject:
Year. Month. Date. ۲۶

اگر نقطهٔ تعادل را جابجا نکنیم خطی سازی کرده‌ایم

روشهای پیشنهادی تعیین تابع لیاپانوف :

۱- روش کراسوفسکی :

$x' = f(x) \quad , \quad x_e = 0 \to$ نقطهٔ تعادل

گام ۱ : $A = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] \to$ ماتریس ژاکوبین f را حساب می‌کنیم $\to$ - خطی سازی نمی‌کنیم بلکه نقطهٔ تعادل را حول می‌کنیم

گام ۲ : $F = A + A^T$

- مشکل اصلی این روش منفی معین بودن F است که جای آن در گام بعد است

گام ۳ : $\to$

- در دامنه مثبت اگر در ناحیه D، ماتریس F منفی معین بود آنگاه نقطهٔ تعادل سیستم را پایدار مجانبی محلی گوییم. در این حالت $V(x) = f^T \cdot f$ تابع لیاپانوف است. ضمناً اگر ناحیه D تمام فضای حالت باشد و $V(x)$ شرط شعاعی نامحدود را داشته باشد آنگاه نقطهٔ تعادل صفر سیستم را پایدار مجانبی کلی گوییم.

$$Ex)\ \begin{cases} x_1' = -6x_1 + 2x_2 = f_1 \\ x_2' = 2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3 = f_2 \end{cases}$$

گام ۱ $\to A = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -6-6x_2^2 \end{bmatrix}$

گام ۲ $\to F = A + A^T = \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -12-12x_2^2 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow -F = \begin{bmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12+12x_2^2 \end{bmatrix} \to \text{minor} \begin{cases} 12 > 0 \\ 144 + 14x_2^2 - 16 > 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $(-F)$ P.D است لذا F منفی معین است (شرایط را دارد)

از طرفی $\to \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = f_1^2 + f_2^2 \to$

$\to V(x) = f^T \cdot f = (-6x_1 + 2x_2)^2 + (2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3)^2 \to$

$\to \lim_{x \to \infty} V(x) \to \infty$ براساس قضیه کراسوفسکی $\to$ نقطهٔ تعادل مبدأ پایدار مجانبی کلی است

۲- روش گرادیان متغیر:

$$v(x)=\int_0^x \nabla v \, dx$$

گرادیان $\rightarrow$ $\nabla v = \left\{ \frac{\partial v}{\partial x_1} \dots \frac{\partial v}{\partial x_n} \right\}^T$

تعداد state ها

ضرایب نامعین به تعداد حالات دارد:

مراحل روش:

1: $\nabla v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \rightarrow$ ضرایب نامعین

2: شرط کرل: بردار کرل: $\frac{\partial \nabla v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \nabla v_j}{\partial x_i}$ (بررسی کرل)

3: منفی معین بودن $\dot{v}$ چک شود

4: $v(x) = \int_0^{x_1} \nabla v(x_1, 0, \dots) dx_1 + \int_0^{x_2} \nabla v(0, x_2, \dots) dx_2 + \dots$

(شرط قضیه لیاپانوف چک شود) و (P.D $\longrightarrow$ v چک شود)

* اگر $v(x)$ شرایط لازم را به عنوان تابع لیاپانوف داشت آنگاه نقطه تعادل پایدار مجانبی است.

* تابع لیاپانوف را از گرادیان آن بدست می‌آوریم.

* این روش برای سیستم‌های مرتبه پایین کارایی دارد.

Ex) $\begin{cases} x_1' = -2x_1 \\ x_2' = -2x_2 + c x_1 + x_2' \end{cases}$

مثال ۲.۷ خلیل ص ۱۰۷

① $\nabla V_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2$

$\nabla V_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2$

a_{ij} دلخواه

② $\dfrac{\partial \nabla V_1}{\partial x_2} = \dfrac{\partial \nabla V_2}{\partial x_1}$

$$x_1 \frac{\partial a_{11}}{\partial x_2} + a_{12} + x_2 \frac{\partial a_{12}}{\partial x_2} = a_{21} + x_1 \cdot \frac{\partial a_{21}}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial a_{22}}{\partial x_1}$$

فرض $\begin{cases} a_{11} = a_{22} = 1 \\ a_{21} = a_{12} = 0 \end{cases}$

توصیه: شروع با ماتریس واحد

$$V(x) = \int_0^{x_1} \nabla V_1 \, dx_1 + \int_0^{x_2} \nabla V_2 \cdot \partial x_2$$

$$V(x) = \int_0^{x_1} x_1 \, dx_1 + \int_0^{x_2} x_2 \, dx_2 = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) \xrightarrow{\text{حتماً}} (P.D)$$

$$\Rightarrow V' = x_1 x_1' + x_2 x_2' = -2x_1^2 - 2x_2' + 2x_1 x_2^3$$

$$V' = -2x_1^2 - 2x_2^2(1 - 2x_1 x_2) \longrightarrow$$

در صورتی که $(1-2x_1x_2) > 0$ باشد $\rightarrow V' \rightarrow N.P \rightarrow$ نقطه تعادل پایدار مجانبی محلی است

$$V(x) = \int_0^{x_1} \nabla V(x_1, \dots) \, dx_1 + \int_0^{x_2} \nabla V(0, x_2, \dots) \, dx_2 + \dots$$