رگلاتورهای خودتنظیم تصادفی
(Stochastic STR)

علی خاکی صدیق
گروه کنترل- آبان ۱۳۸۹

■ مقدماتی از تئوری فرایندهای تصادفی

- تعریف فرایند تصادفی $\{x(t), t \in T\}$ را ساکن یا stationary اگر توزیع
$$x(t_1+\tau), x(t_2+\tau), \cdots, x(t_k+\tau)$$
و توزیع
$$x(t_1), x(t_2), \cdots, x(t_k)$$
باهم معادل باشند.

- فرایندهای تصادفی را می توان بر حسب Autocorrelation Function آن مشخص کرد.

- Power Spectral Density or Power Spectrum فرایند تصادفی تبدیل فوریه Autocorrelation Function آن است.

- Power Spectral Density or Power Spectrum توزیع توان را بر حسب فرکانس می دهد.

- قضیه Spectral Factorization

یک فرایند تصادفی ساکن با چگالی طیفی گویای ϕ را در نظر بگیرید. آنگاه وجود دارد تابع گویای پایدار و می نیمم فاز H به گونه ای که

$$\phi(\omega) = H(e^{-j\omega})H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right|^2$$

- تعریف فرایند تصادفی $\{e(t), t \in T\}$ را به صورت دنباله متغیرهای تصادفی طبیعی مستقل (۱و ۰) در نظر بگیرید. فرایند تصادفی $\{x(t), t \in T\}$ را به صورت زیر یک فرایند Moving Average (MA) از مرتبه n می نامند:

$$x(t) = e(t) + c_1 e(t-1) + \cdots + c_n e(t-n)$$

- قضیه Representation Theorem

برای چگالی طیفی گویای $\phi(\omega)$ یک سیستم دینامیکی خطی پایدار وجود دارد که خروجی سیستم یک فرایند ساکن با چگالی طیفی $\phi(\omega)$ است اگر ورودی آن نویز سفید زمان گسسته باشد.

• سیستم های خطی با ورودی های تصادفی

• **مثال**

Let,

$$y(n) = ay(n-1) + w(n)$$

Impulse Response of the System: $h(n) = a^n \quad n \ge 0$

$= 0 \quad n < 0$

$E[y(n)] = aE[y(n-1)] + E[w(n)]$ initial condition $E[y(-1)]$

$$\Rightarrow E[y(n+1)] = a^{n+1}E[y(n-1)] + \sum_{i=0}^{N} a^{n-i}E[w(n)]$$

For $E[w(i)] = 0$

$\mathrm{var}\, y = E[(y(k) - E(y(k))^2]$

w, y are independent:

$$\mathrm{var}[y(k)] = \mathrm{var}[ay(k-1)] + \mathrm{var}[w(k)]$$

$$= a^2\mathrm{var}[y(k-1)] + \mathrm{var}[w(k)]$$

$$\Rightarrow \mathrm{var}[y(k)] = a^2\mathrm{var}[y(k-1)] + \mathrm{var}[w(k)]$$

• **مقدمه**

✓ رگلاتورهای حذف اثر اغتشاش

✓ نویز در فرایندها

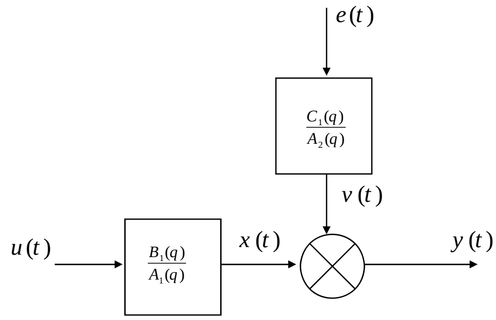
✓ کنترل فعال نویز

✓ کنترل بهینه تصادفی

✓ کنترل حداقل واریانس (Minimum Variance or MV) و میانگین متحرک (Moving Average or MA)

▪ کنترل کننده های حداقل واریانس

مدل فرایند:

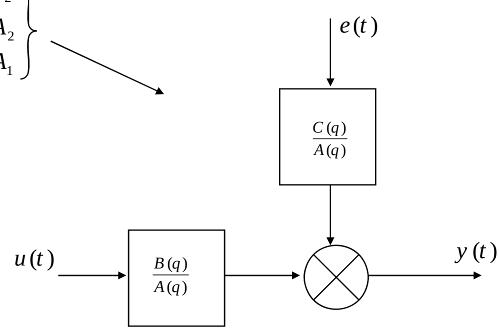


$\{A_1(q)B_1(q)\},\{C_1(q)A_2(q)\} \rightarrow$ Relatively Prime

$\{e(t)\} \rightarrow$ White noise SD=σ, Mean=0

لذا داریم

$$\left.\begin{aligned} A &= A_1A_2 \\ B &= B_1A_2 \\ C &= C_1A_1 \end{aligned}\right\}$$



$\{A(q),B(q),C(q)\} \rightarrow$ Relatively Prime, A,C monic and $\deg A = \deg C = n$

and, $A(q)y(t) = B(q)u(t) + C(q)e(t)$

$$A(q)y(t)=B(q)u(t)+C(q)e(t) \longrightarrow \text{Innovation Representation}$$

$\downarrow$

باید یک چند جمله ای پایدار باشد C

$\downarrow$

اگر C ناپایدار به دست آید آنگاه $C=C^{+}C^{-}$ و C را با $C^{+}C^{-*}$ جایگزین می کنیم.

EXAMPLE 4.1 Modification of the polynomial C

Consider the polynomial

$$C(z) = z + 2$$

which has the zero $z = -2$ outside the unit disc. Consider the signal

$$v(t) = C(q)e(t)$$

where $\{e(t)\}$ is a sequence of uncorrelated random variables with zero mean and unit variance. The spectral density of v is given by

$$\Phi(e^{i\omega h}) = \frac{1}{2\pi} C(e^{i\omega h})C(e^{-i\omega h})$$

Because

$$\begin{aligned} C(z)C(z^{-1}) &= (z+2)(z^{-1}+2) = (1+2z^{-1})(1+2z) \\ &= (2z+1)(2z^{-1}+1) \\ &= 4(z+0.5)(z^{-1}+0.5) \end{aligned}$$

the signal v may also be represented as

$$v(t) = C^*(q)e(t)$$

where

$$C^*(z) = 2z + 1$$

is the reciprocal of the polynomial $C(z)$ (see Section 3.2). □

- معیار عملکرد:

$$J = E\left\{y^2(t) + \rho u^2(t)\right\} \longrightarrow$$

واریانس حالت ماندگار خروجی و سیگنال کنترل

کنترل کننده LQG و برای $\rho = 0$ کنترل کننده MV

- Deadbeat Controller?

EXAMPLE 4.2 Minimum-variance control of a first-order system

Consider the first-order system

$$y(t+1) + ay(t) = bu(t) + e(t+1) + ce(t) \tag{4.4}$$

where $|c| < 1$ and $\{e(t)\}$ is a sequence of independent random variables with unit variance.

Consider the output at time $t+1$. From (4.4) it follows that by using $u(t)$ it is possible to change $y(t+1)$ arbitrarily. Further, $e(t+1)$ is independent of $y(t)$ and $u(t)$; thus

$$\operatorname{var} y(t+1) \geq \operatorname{var} e(t+1) = 1$$

Given measurements up to time t, we can use Eq. (4.4) to compute $e(t)$. The controller

$$u(t) = \frac{ay(t) - ce(t)}{b} \tag{4.5}$$

gives

$$y(t+1) = e(t+1) \tag{4.6}$$

which gives the lower bound of the variance of y. If Eq. (4.5) is used all the time, then from Eq. (4.6), it follows that $y(t) = e(t)$, and we get the controller

$$u(t) = \frac{a-c}{b}\, y(t) \tag{4.7}$$

□

$$d_0 = \deg A - \deg B \Rightarrow y(t+d_0) = \frac{B}{A}u(t+d_0) + \frac{C}{A}e(t+d_0)$$

Let,

$$\frac{q^{d_0-1}C(q)}{A(q)} = F(q) + \frac{G(q)}{A(q)}$$

$$\Rightarrow q^{d_0-1}C(q) = A(q)F(q) + G(q) \longrightarrow$$

یک معادله دیوفانتین

$$\Rightarrow y(t+d_0) = \frac{B}{A}u(t+d_0) + Fe(t+1) + \frac{qG}{A}e(t)$$

از معادله سیستم داریم:

$$e(t) = \frac{A}{C}y(t) - \frac{B}{C}u(t) \longrightarrow$$

یک رویتگر برای e(t) با دینامیک C(q)

$$\Rightarrow y(t+d_0) = Fe(t+1) + \frac{qG}{A}[\frac{A}{C}y(t) - \frac{B}{C}u(t)] + \frac{B}{A}u(t+d_0)$$

$$= Fe(t+1) + [\frac{q^{d_0}B}{A} - \frac{qGB}{AC}]u(t) + \frac{qGA}{AC}y(t)$$

$$= Fe(t+1) + \frac{Bq}{AC}[q^{d_0-1}C - G]u(t) + \frac{qG}{C}y(t)$$

$$= Fe(t+1) + \underline{\frac{qBF}{C}u(t) + \frac{qG}{C}y(t)}$$

نویزهایی که در آینده برسیستم عمل میکنند: $t+d_0,\cdots,t+1$

$= \hat{y}(t+d_0|t) =$ Mean Square Prediction of $y(t+d_0)$ up to t

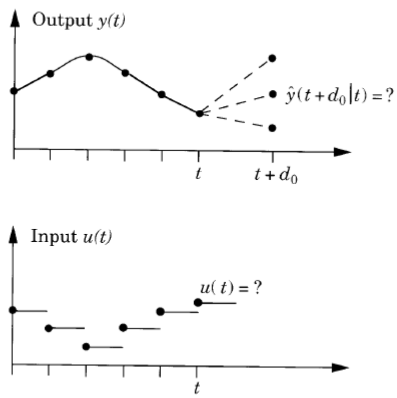


Figure 4.1 Minimum variance control is based on prediction d_0 steps ahead.

خطای تخمین عبارت است از:

$$\tilde{y}(t+d_0|t)=y(t+d_0)-\hat{y}(t+d_0|t)$$
$$=F(q)e(t+1)$$
$$\Rightarrow \operatorname{var}\tilde{y}(t+d_0|t)=\sigma^2(1+f_1^2+\cdots+f_{d_0-1}^2)$$

وکنترل MV عبارت است از:

$$u(t)=-\frac{G}{BF}y(t)$$

$$\text{C-L System}\Rightarrow Ay=-\frac{G}{BF}By(t)+Ce$$
$$\Rightarrow ABFy=-GBy+BFCe$$
$$\Rightarrow B[AF+G]y=BFCe$$
$$\Rightarrow y=\frac{BFC}{q^{d_0-1}CB}e$$

قطب های حلقه بسته
و
مساله جاپابی قطب

- سیستم های غیر می نیمم فاز:

C-L Characteristic Equation:

$$q^{d_0-1}B^{+}(q)B^{-*}(q)C(q)=0$$

جایگزینی صفرهای ناپایدار

$$\Rightarrow \qquad u(t)=-\frac{S}{R}y(t)$$

where,

$$q^{d_0-1}B^{+}(q)B^{-*}(q)C(q)=A(q)R(q)+B(q)S(q)$$

- **کنترل کننده MA:**

کنترل کننده MV

سیستم حلقه بسته یک Moving Average از مرتبه d_0-1 است.

می توان کنترل کننده را به گونه ای طراحی کرد که خروجی Moving Average از مرتبه بالاتر باشد.

- به جای جایابی d_0-1 قطب در مبدا $(d \ge d_0)\; d-1$ قطب را در مبدا جایابی می کنیم.

$$B(q) = B^+(q)B^-(q)$$

$$q^{d-1}B^+C = AR + BS \Rightarrow S, R \qquad , R = B^+R_1$$

$$\text{Let,} \quad u(t) = -\frac{S}{R}y(t)$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{CR}{AR+BS}e(t) = \frac{CB^+R_1}{q^{d-1}B^+C}e(t)$$

$$= \frac{R_1}{q^{d-1}}e(t)$$

$$= (1 + r_1q^{-1} + \cdots + r_{d-1}q^{-d+1})e(t)$$

- ✓ کنترل MV و MA یکسان هستند و تنها تفاوت در تعداد صفرهای حذف شده است.
- ✓ اگر $d = d_0$ تمامی صفرها حذف می شوند.
- ✓ اگر $d = \deg A = n$ هیچ صفری حذف نمی شود.

EXAMPLE 4.3 Moving-average controller

Consider the system (4.1) with

$$A(q) = q^2 + a_1q + a_2$$
$$B(q) = b_0q + b_1$$
$$C(q) = q^2 + c_1q + c_2$$

In this case, $d_0 = 1$. The minimum-variance controller is obtained from Eq. (4.9), giving the controller

$$u(t) = -\frac{(c_1 - a_1) + (c_2 - a_2)q^{-1}}{b_0 + b_1q^{-1}}y(t)$$

and the closed-loop system is

$$y(t) = e(t)$$

The minimum-variance controller can be used only if $|b_1/b_0| < 1$, that is, for the minimum-phase case.

The moving-average controller is obtained by solving Eq. (4.18). In this case, $d = 2$ and $B^+(q) = 1$. This gives the Diophantine equation

$$q(q^2 + c_1q + c_2) = (q^2 + a_1q + a_2)(q + r_1) + (b_0q + b_1)(s_0q + s_1)$$

Notice that this is the same as Eq. (3.19) with $A_o(q) = q$ and $A_m(q) = C(q)$. The solution is thus given by Eqs. (3.20) and (3.21):

$$r_1 = \frac{(a_2 - c_2)b_0b_1 + (c_1 - a_1)b_1^2}{b_1^2 + a_1b_0b_1 + a_2b_0^2}$$

$$s_0 = \frac{b_1(a_1^2 - a_2 - c_1a_1 + c_2) + b_0(c_1a_2 - a_1a_2)}{b_1^2 + a_1b_0b_1 + a_2b_0^2}$$

$$s_1 = \frac{b_1(a_1a_2 - c_1a_2) + b_0(a_2c_2 - a_2^2)}{b_1^2 + a_1b_0b_1 + a_2b_0^2}$$

The closed-loop system is

$$y(t) = (1 + r_1q^{-1})e(t) \qquad \square$$

- رگلا تورهای خودتنظیم تصادفی

✓ رگلا تورهای خودتنظیم غیر مستقیم

✓ رگلا تورهای خودتنظیم مستقیم

روشهای شناسایی:

ELS (Extended Least Squares)

RML (Recursive Maximum Likelihood)

- مثال هایی از رگلا تورهای خودتنظیم غیر مستقیم

EXAMPLE 4.4 Stochastic indirect self-tuning regulator

Consider the process (4.4) in Example 4.2 with $a = -0.9, b = 3$, and $c = -0.3$. The minimum-variance controller is given by the proportional controller

$$u(t) = \frac{a-c}{b}\, y(t) = -s_0 y(t) = -0.2 y(t)$$

This gives the closed-loop system

$$y(t) = e(t)$$

The ELS method is used to estimate the unknown parameters a, b, and c. The estimates are obtained from Eq. (2.21) with

$$\theta^T = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$$

$$\varphi^T(t-1) = \begin{pmatrix} -y(t-1) & u(t-1) & \varepsilon(t-1) \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon(t) = y(t) - \varphi^T(t-1)\hat{\theta}(t-1)$$

The controller is

$$u(t) = \frac{\hat{a}(t) - \hat{c}(t)}{\hat{b}(t)}\, y(t)$$

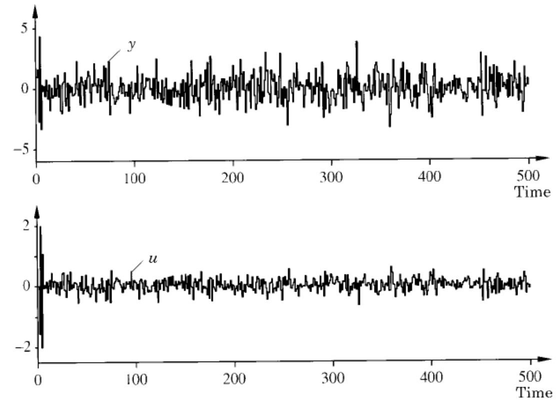


Figure 4.2 Output and input when an indirect self-tuning regulator based on minimum-variance control is used to control the system in Example 4.4.

Figure 4.2 shows the result of a simulation of the algorithm. The initial values in the simulation are

$$\hat{a}(0) = 0$$
$$\hat{b}(0) = 1$$
$$\hat{c}(0) = 0$$
$$P(0) = 100I$$

Figure 4.3 shows the accumulated loss

$$V(t) = \sum_{i=1}^{t} y^2(i)$$

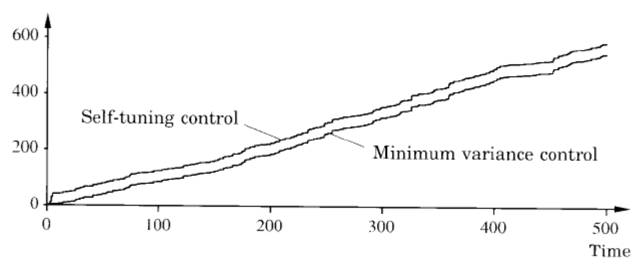


Figure 4.3 The accumulated loss when a self-tuning regulator and the optimal minimum-variance controller are used on the system in Example 4.4.

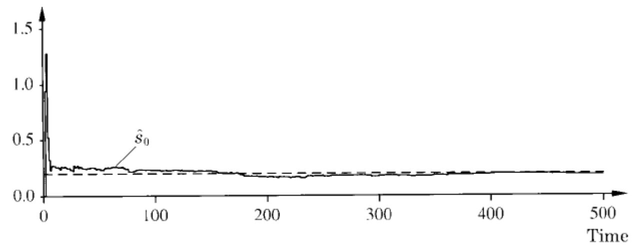


Figure 4.5 The controller parameter $\hat{s}_0(t)$ when the system in Example 4.4 is controlled. The dashed line is the optimal parameter for the minimum-variance controller.

- رگلا تورهای خودتنظیم مستقیم

MV Control: $$y(t+d_0) = Fe(t+1) + \frac{qBF}{C}u(t) + \frac{qG}{C}y(t)$$

$$\Downarrow$$

$$y(t+d_0) = \frac{1}{C^*}[R^*u(t) + S^*y(t)] + R_1^*e(t+d_0)$$

؟

$$\boxed{R_1^* = F^*, \deg R_1 = d_0 - 1}$$

$$\text{Also,}\quad q^{d-1}B^{+}C = AR + BS$$

$$\Rightarrow y(t+d) = \frac{AR}{B^{+}C}y(t) + \frac{BS}{B^{+}C}y(t)$$

$$= \frac{R}{B^{+}C}[Bu(t) + Ce(t)] + \frac{B^{-}}{C}Sy(t)$$

$$= \frac{B^{-}}{C}[Sy(t) + Ru(t)] + \frac{R}{B^{+}}e(t)$$

$$\Downarrow$$

$$y(t+d) = \frac{B^{-*}}{C^{*}}[R^{*}u(t) + S^{*}y(t)] + R_1^{*}e(t+d)$$

؟

$$\deg R_1 = d-1$$

• الگوریتم STR مستقیم

✓ داده: افق پیش بینی d و $k = \deg R^{*}, l = \deg S^{*}, \frac{Q^{*}}{P^{*}}$ a stable filter

✓ گام ۱: استفاده از مدل زیر برای تخمین پارامترها

$$y(t+d) = R^{*}(q^{-1})u_f(t) + S^{*}(q^{-1})y_f(t) + \varepsilon(t+d)$$

where,

$$R^{*}(q^{-1}) = r_0 + r_1 q^{-1} + \cdots + r_k q^{-k}$$

$$S^{*}(q^{-1}) = s_0 + s_1 q^{-1} + \cdots + s_l q^{-l}$$

and

$$u_f(t) = \frac{Q^{*}(q^{-1})}{P^{*}(q^{-1})}u(t),\ y_f(t) = \frac{Q^{*}(q^{-1})}{P^{*}(q^{-1})}y(t)$$

RLS is used with:

$$\varepsilon(t) = y(t) - R^{*}(q^{-1})u_f(t-d) - S^{*}(q^{-1})y_f(t-d) = y(t) - \phi^{T}(t-d)\hat{\theta}(t-1)$$

✓ گام ۲: محا سبه سیگنال کنترل از

$$R^*(q^{-1})u(t) = -S^*(q^{-1})y(t)$$

با تخمین به دست آمده از گام۱.

تکرار گام های ۱ و ۲ در هر زمان نمونه برداری.

• خواص مجانبی

$$\frac{Q^*}{P^*} \text{ a stable filter} \rightarrow ????$$

الگوریتم به مقادیر درست پارامترها همگرا می شود حتی اگر فیلتر نادرست انتخاب شود !!!!

The Self Tuning Property

• قضیه خواص مجانبی ۱

فرضیات:

- الگوریتم STR مستقیم با فیلتر واحد و شناسایی RLS.
- پارامتر $r_0 = b_0$ ثابت یا تخمین زده شده.
- بردارهای رگرسیون کراندار.
- همگرایی تخمین ها.

آنگاه سیستم حلقه بسته در حد عبارت است از:

$$\overline{y(t+\tau)y(t)} = 0, \tau = d, d+1, \cdots, d+l$$
$$\overline{y(t+\tau)u(t)} = 0, \tau = d, d+1, \cdots, d+k$$

اثبات

$$\varepsilon(t) = y(t) - R^*(q^{-1})u_f(t-d) - S^*(q^{-1})y_f(t-d) = y(t) - \phi^T(t-d)\hat{\theta}(t-1)$$
$$\Downarrow$$
$$y(t+d) = \phi^T(t)\hat{\theta} + \varepsilon(t+d)$$

Control Law:

$$\phi^T(t)\hat{\theta}(t+d) = 0$$

در نقطه تعادل پارامترهای تخمین زده شده ثابت و معادله نرمال را براورده می سازند:

$$\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{t}\phi(k)y(k+d) = \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{t}\phi(k)\phi^T(k)\hat{\theta}(t+d)$$
$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{t}\phi(k)y(k+d) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{t}\phi(k)\phi^T(k)[\hat{\theta}(t+d) - \hat{\theta}(k+d)]$$
$$\to 0$$

- قضیه خواص مجانبی ۲

فرضیات:

- الگوریتم STR مستقیم با فیلتر واحد و شناسایی RLS.
- $\min(k,l) \geq n-1$

آنگاه اگر تخمین مجانبی پارامترهای کنترل نسبت به هم اول باشند پاسخ تعادلی به گونه ای است که:

$$\overline{y(t+\tau)y(t)} = 0, \tau = d, d+1, \cdots$$

یعنی انکه خروجی فرایند میانگین متحرک از مرتبه *d-1* است.

اثبات

C-L System:

$$R^*(q^{-1})u(t) = -S^*(q^{-1})y(t)$$
$$A^*(q^{-1})y(t) = B^*(q^{-1})u(t-d_0) + C^*e(t)$$

$\Rightarrow$

$$(A^*R^* + q^{-d_0}B^*S^*)y(t) = R^*C^*e(t)$$
$$(A^*R^* + q^{-d_0}B^*S^*)u(t) = -S^*C^*e(t)$$

Let,

$$(A^*R^* + q^{-d_0}B^*S^*)w(t) = C^*e(t)$$

$\Rightarrow$ $y = R^*w, u = -Sw$

$\Rightarrow$

$$\overline{R^*w(t)y(t+\tau)} = 0, \tau = d, d+1, \cdots, d+l$$
$$\overline{S^*w(t)y(t+\tau)} = 0, \tau = d, d+1, \cdots, d+k$$

EXAMPLE 4.5 **Direct minimum-variance self-tuning regulator**

Consider the same process as in Example 4.4. The process model of Eq. (4.23) is now

$$y(t+1) = r_0 u(t) + s_0 y(t) + \varepsilon(t+1)$$

It is assumed that r_0 is fixed to the value $\hat{r}_0 = 1$. Notice that this is different from the true value, which is 3. The parameter s_0 is estimated by using the least-squares method. The control law becomes

$$u(t) = -\frac{\hat{s}_0}{\hat{r}_0} y(t)$$

Figure 4.6 shows $\hat{s}_0/\hat{r}_0$, which is seen to converge rapidly to a value corresponding to the value of the optimal minimum-variance controller, even if $\hat{r}_0$ is not equal to its true value. This is also seen in Fig. 4.7, which shows the loss function when the self-tuner and the optimal minimum-variance controller are used. Compare Figs. 4.3 and 4.5. □

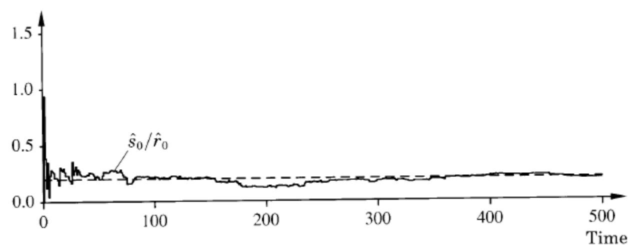


Figure 4.6 The parameter $\hat{s}_0/\hat{r}_0$ in the controller, when the process in Example 4.5 is controlled by using the direct minimum-variance self-tuning controller.

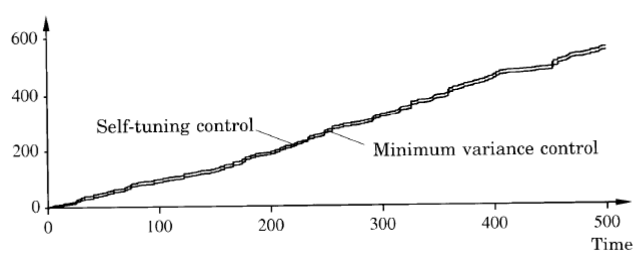


Figure 4.7 The loss function when the direct self-tuning regulator and the optimal minimum-variance controller are used on the system in Example 4.5.

EXAMPLE 4.6 MA control of a nonminimum-phase system

Consider an integrator with a time delay τ. For the sampling period $h > \tau$ the system is described by

$$A(q) = q(q-1)$$
$$B(q) = (h-\tau)q + \tau = (h-\tau)(q+b)$$

where

$$b = \frac{\tau}{h-\tau} \qquad \text{and} \qquad d_0 = 1$$

The noise is assumed to be characterized by

$$C(q) = q(q+c) \qquad |c| < 1$$

The sampled-data system is nonminimum-phase if $\tau > h/2$. This implies that the basic minimum-variance self-tuner can be used only if $\tau < h/2$. Let the

controller have the structure

$$u(t) = -\hat{s}_0(t)y(t) - \hat{r}_1(t)u(t-1)$$

Simulations of the system are shown in Fig. 4.8 for $h = 1$ and $c = -0.8$. The time delay is initially 0.4 and is increased to 0.6 at time $t = 100$, at which time the sampled-data system gets a zero outside the unit circle. Figure 4.8(a) shows the results obtained with $d = 1$, the minimum-variance structure. The parameters first converge toward the minimum-variance controller. At $t = 100$ the sampled-data system gets a zero outside the unit circle. The self-tuning regulator then tries to cancel the zero, and the closed-loop system becomes unstable after some time. It does not become unstable exactly at $t = 100$ because it takes a while for the controller parameters to change. The control signal is limited to ± 20, which explains why the signals do not grow exponentially. The forgetting factor is $\lambda = 0.99$. Figure 4.8(b) shows the results for the algorithm with $d = 2$. The moving-average controller is a stable equilibrium for both $\tau = 0.4$ and $\tau = 0.6$. There will be a shift in the parameter values when the delay is changed, but the closed-loop system is stable.

The controller that gives the smallest attainable variance of the output gives the standard deviations 1.000 and 1.004 when $\tau = 0.4$ and 0.6, respectively, while the moving-average controller gives the standard deviations 1.003 and 1.007 when $\tau = 0.4$ and 0.6, respectively. Degradation in the performance when the moving-average controller is used in this example is thus minor. □

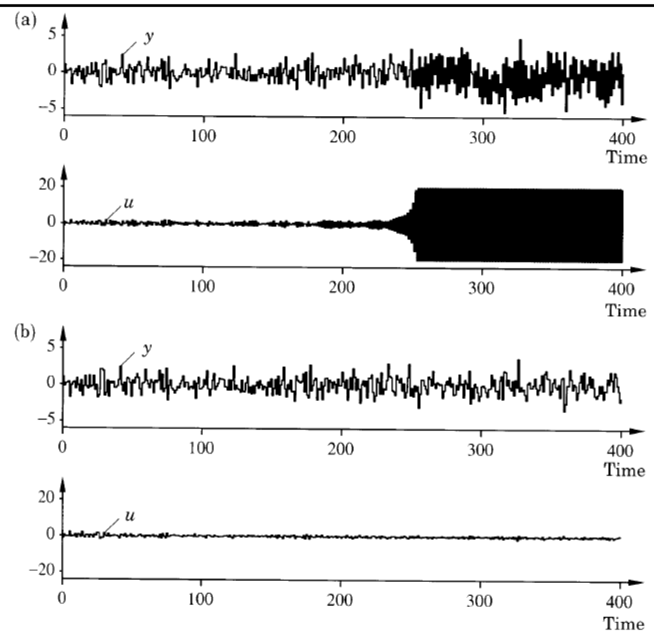


Figure 4.8 Simulation of the self-tuning algorithm on the integrator with time delay in Example 4.6. At $t = 100$ the delay is changed from 0.4 to 0.6. (a) $d = 1$; (b) $d = 2$.

▪ صورت کلی کنترل کننده MV

- کنترل کننده MV ساده ترین صورت کنترل پیش بین است.

System Model:

$$Ay(t) = q^{-k}Bu(t) + Ce(t)$$

$$\Rightarrow \qquad y(t+k) = \frac{B}{A}u(t) + \frac{C}{A}e(t+k)$$

Let,

$$F = 1 + f_1 q^{-1} + \cdots f_{k-1} q^{-(k-1)}$$

$$G = g_0 + g_1 q^{-1} + \cdots g_{n_g} q^{-n_g}$$

$$n_g = \max(n_a - 1, n_c - k)$$

Where,

$$C = AF + q^{-k}G \qquad (*)$$

- مراحل طراحی

I. F,G را از (❋) به دست آورید.

II. سیگنال کنترل را از $u(t) = -\frac{G}{BF} y(t)$ محاسبه کنید.

- نکات مهم

✓ حل معادله دیوفانتین

✓ تاخیر زمانی باید معلوم باشد.

✓ اگر $k=1$ باشد $F=1$ است و داریم

$$G(q^{-1}) = q[C(q^{-1}) - A(q^{-1})]$$

✓ سیستم باید مینیمم فاز باشد.

- یک مثال

$$y(t) = 2y(t-1) + 2u(t-2) + e(t) + 0.5e(t-1)$$

where $\sigma_2 = 2$, we have

$$\left(1+0.5q^{-1}\right) = \left(1-2q^{-1}\right)\left(1+f_1q^{-1}\right) + q^{-2}g_0$$

$$\Rightarrow f_1 = 2.5, g_0 = 5$$

The MVcontrol is:

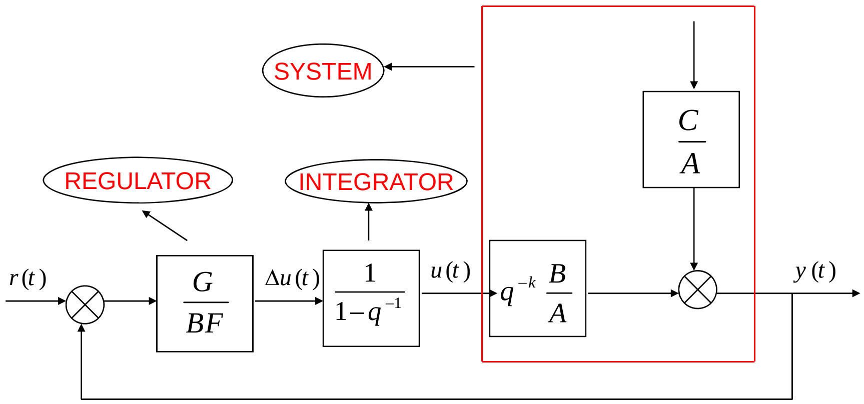
$$u(t) = -\frac{5}{2\left(1+2.5q^{-1}\right)} y(t) \Rightarrow u(t) = -2.5y(t) - 2.5u(t-1)$$

C-L system:

$$y(t) = e(t) + 2.5e(t-1) \Rightarrow J_{\min} = 2\left[1+(2.5)^2\right] = 14.5$$

■ سیستم های ردیاب

- یک راه حل: Incremental MV Controller



$$\text{Let,}\quad \Delta = (1-q^{-1})$$

$$\Rightarrow \Delta u(t) = \frac{G}{BF}(r(t)-y(t))$$

$$u(t) = \Delta u(t) + u(t-1)$$

چند جمله ای های کنترل از رابطه اصلاح شده زیر به دست می آیند:

$$C = FA\Delta + q^{-k}G$$

$$n_f = k-1, n_g = \max(n_a, n_c - k)$$

$$\text{C-L System} \Rightarrow y(t) = \frac{G}{C}r(t-k) + \Delta Fe(t)$$

- نکته: این کنترل کننده MV همانند قبل نیست زیرا F از رابطه دیگری به دست آمده است.

- ادامه مثال قبل

$$\left(1+0.5q^{-1}\right)=\left(1-2q^{-1}\right)\left(1-q^{-1}\right)\left(1+f_1q^{-1}\right)+q^{-2}\left(g_0+g_1q^{-1}\right)$$

$$\Rightarrow f_1=3.5, g_0=8.5, g_1=-7$$

C-L system:

$$y(t)=\Delta Fe(t)=e(t)+2.5e(t-1)-3.5e(t-2)$$

$$\Rightarrow \operatorname{var} y(t)=2\left[1+\left(2.5\right)^2+\left(3.5\right)^2\right]=39$$

- Detuned MV Control

Cost Function: $J=E[(Ty(t+k))^2]$

چند جمله ای از درجه n_1

Cost Function Minimization $\Rightarrow u(t)=-\dfrac{G}{BF}y(t)$

Where, $CT=FA+q^{-k}G$

$$\Rightarrow y(t)=\frac{F}{T}e(t)$$

$\Rightarrow$????

- سیستم های NMP

رگلاتور زیر را در نظر بگیرید:

$$Fu(t)+Gy(t)=0$$

Where,

$$AF+q^{-k}BG=CB^*$$

چند جمله ای با
ویژگی های زیر:
$B^*(0)=1,$
Stable Zeros of B +
Inverse of Unstable Zeros of B

and

$$F(0)=1, n_f=n_b+k-1, n_g=n_a-1$$

C-L System:

$$y(t)=\frac{F}{B^*}e(t), \quad u(t)=-\frac{G}{B^*}e(t)$$

- یک مثال

$$y(t)=2y(t-1)+u(t-2)+2u(t-3)+e(t)$$

we have

$$B^*(q^1)=1+0.5q^{-1}$$

$$\Rightarrow \left(1+0.5q^{-1}\right)=\left(1-2q^{-1}\right)\left(1+f_1q^{-1}+f_2q^{-2}\right)+q^{-2}\left(1+2q^{-1}\right)g_0$$

$$\Rightarrow f_1=f_2=2.5, g_0=2.5$$

The MV control is:

$$u(t)=-2.5y(t)-2.5u(t-1)-2.5u(t-2)$$

C-L system:

$$y(t)=-0.5y(t-1)+e(t)+2.5e(t-1)+2.5e(t-2)$$

$$\Rightarrow \operatorname{var} y(t)=11.5$$

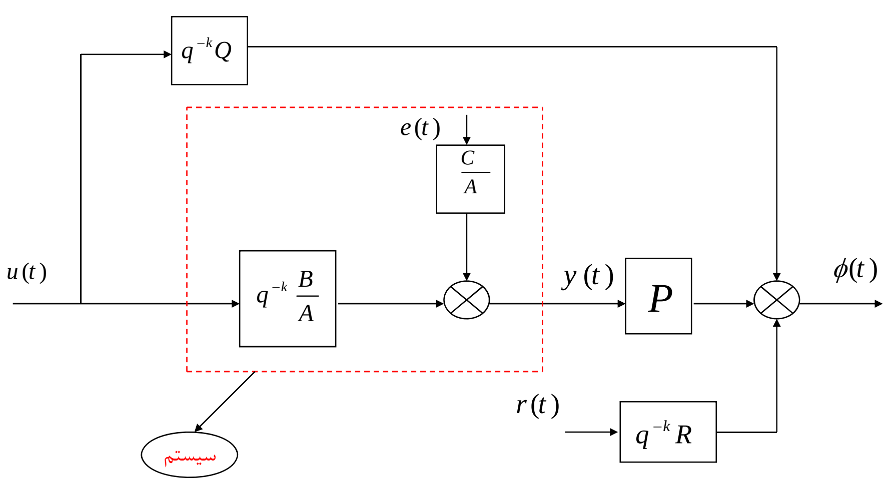
• کنترل MV تعمیم یافته (Generalized MV Control)

تعمیم کنترل MV برای
- ردیابی ورودی های مرجع
- سیستم های NMP

خروجی تعمیم یافته را تعریف کنید:

$$\phi(t+k) = Py(t+k) + Qu(t) - Rr(t)$$

✓ دیاگرام بلوکی خروجی تعمیم یافته



✓ اصلاحات انجام شده:

$$\text{Added Feed Forward } q^{-k}Q \Rightarrow PB+QA \text{ (New System Zeros)}$$
$$\text{Output Filtering } P$$
$$\text{Set-Point Filtering } R$$
$$\text{System Equation} + \phi \text{ Equation} \Rightarrow \quad \phi(t+k) = \frac{PB+QA}{A}u(t) + \frac{PC}{A}e(t+k) - Rr(t)$$
$$\text{Cost Function:} \quad J = E[\phi^2(t+k)]$$

همانند قبل $\phi(t+k)$ را به دو بخش تقسیم می کنیم. تعریف کنید:

$$PC = EA + q^{-k}G$$
$$\text{Where,} \quad P(0) = 1 \text{ and}$$
$$E = 1 + e_1q^{-1} + \cdots + e_{k-1}q^{-(k-1)}$$
$$G = 1 + g_1q^{-1} + \cdots + g_{n_g}q^{-n_g}, n_g = \max(n_a - 1, n_p + n_c - k)$$

توجه کنید که:

$$E(Ay(t+k) = Bu(t) + Ce(t+k))$$
$$\Rightarrow [PC - q^{-k}G]y(t+k) = EBu(t) + ECe(t+k)$$
$$\Rightarrow PCy(t+k) = EBu(t) + Gy(t) + ECe(t+k)$$
$$\Rightarrow C[Py(t+k) + Qu(t) - Rr(t)] = (BE+QC)u(t) + Gy(t) - CRr(t) + CEe(t+k)$$
$$\Rightarrow \phi(t+k) = \frac{1}{C}\underline{[(BE+QC)u(t) + Gy(t) - CRr(t)]} + Ee(t+k)$$

برای کنترل MV باید صفر باشد

$$\Rightarrow [BE+QC]u(t) = -Gy(t) + CRr(t)$$
$$\Rightarrow Fu(t) + Gy(t) + Hr(t) = 0$$

مقایسه با کنترل جایاب قطب

$$\text{Where,}$$
$$F = BE + QC$$
$$H = -CR$$

C-L System:

$$y(t)=\frac{q^{-k}BR}{PB+QA}r(t)+\frac{BE+QC}{PB+QA}e(t)$$

✓ نکات مهم:

– $Q=0$ به حذف قطب و صفر منجر می گردد.

– برای ردیابی

$$\left.\frac{BR}{PB+QA}\right|_{q=1}=1$$

برقراری رابطه؟

• الگوریتم Self-Tuning Generalized MV Control

✓ گام ۱: خروجی مجازی را تشکیل دهید:

$$\phi(t)=Py(t)+Qu(t-k)-Rr(t-k)$$

✓ گام ۲: تخمین پارامترها با RLS

$$\phi(t)=\hat{F}u(t-k)+\hat{G}y(t-k)+\hat{H}r(t-k)+\hat{e}(t)$$

✓ گام ۳: محاسبه سیگنال کنترلی:

$$\hat{F}u(t)=-\hat{G}y(t)-\hat{H}r(t)$$