شناسایی سیستم در کنترل تطبیقی

علی خاکی صدیق
گروه کنترل
بهمن ۱۳۹۰

مقدمه

- ✓ تعیین روی خط پارامترهای سیستم دینامیکی یک عنصر مهم کلیدی در کنترل تطبیقی
- ✓ مسایل مرتبط با شناسایی سیستم:

- انتخاب ساختار مدل : خطی-غیر خطی-مرتبه مدل-نوع مدل
- طراحی آزمایش : انتخاب ورودی آزمایشی برای شناسایی
- تخمین پارامتر : روش انتخاب شده برای تخمین (روش حداقل مربعات LS)
- تعیین اعتبار مدل: (Model Validation)

- شناسایی سیستم:
  - خارج خط off-Line
  - روی خط On-Line
- شناسایی خارج خط سیستم های دینامیکی:

  روش حداقل مربعات
- شمای کلی:

شناسایی خارج خط حداقل مربعات

- اصل اولیه(گاوس):

مجموع مربعات تفاضل بین مقادیر واقعی اندازه گیری شده (خروجی های سیستم) و خروجی های مدل ریاضی ضرب در اعدادی که درجه دقت اندازه گیری را وزن دهی می کنند حداقل باشد.

✓ مدل ریاضی را چه گونه بنویسیم؟

راه حل : Regression Model

Model o/p

$$\hat{y}(i) = \phi_1(i)\theta_1 + \phi_2(i)\theta_2 + \ldots + \phi_n(i)\theta_n$$

$$= [\phi_1(i) \ldots \phi_n(i)] \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix}$$

$$= \phi^T(i)\theta$$

Regressors

Model parameters

- مجهول مساله: θ

- معلومات: متغیرهای $\phi^T(i)$ و خروجی واقعی سیستم $y(i)$

- مدل کاربردی ؟

مدل واقعی
ولی
ناشناخته

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$A(q)y(t) = B(q)u(t)$$

مدل گسسته

where,

$$A(q) = q^n + a_1 q^{n-1} + \cdots + a_n$$

$$B(q) = b_1 q^{m-1} + b_2 q^{m-2} + \cdots + b_m$$

عکس
تبدیل

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \cdots + a_n y(t-n) = b_1 u(t+m-n-1) + \cdots + b_m u(t-n)$$

$$y(t) = -a_1 y(t-1) - \cdots - a_n y(t-n) + b_1 u(t+m-n-1) + \cdots + b_m u(t-n)$$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = [-y(t-1) \cdots -y(t-n)\; u(t+m-n-1) \cdots u(t-m)] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = \phi^T(t-1)\,\theta \longrightarrow$$

Regression Model

- **مساله:** تخمین θ به گونه ای که $e(t) = y(t) - \hat{y}(t)$ خطای تخمین یا Residuals حداقل باشد.

- **معیار:**

$$V(\theta,t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t}(y(i) - \phi^T(i)\theta)^2$$

- **تعاریف:**

$$Y(t) = [y(1)\cdots y(t)]^T$$

$$E(t) = [e(1)\cdots e(t)]^T$$

$$\Phi^T(t) = [\phi(1)\cdots\phi(t)]$$

- **حل مساله:** (قضیه تخمین LS)

$V(\theta,t)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t}(y(i)-\phi^T(i)\theta)^2$ برای $\hat{\theta}$ می نیمال است به گونه ای که:

$$\Phi^T\Phi\hat{\theta}=\Phi^T Y$$

معادله نرمال

و اگر $\left|\Phi^T\Phi\right|\neq 0$ می نیمم یکتا است و

$$\boxed{\hat{\theta}=\left(\Phi^T\Phi\right)^{-1}\Phi^T Y}$$

- **نکات مهم:**

✓ شرط معکوس پذیری $\Phi^T \Phi \equiv$ شرط تحریک

✓ وزن دهی اطلاعات :

$$V(\theta,t)=\frac{1}{2}E^T W E$$

✓ تعبیر هندسی تخمین LS

- مثال ۲-۱ کتاب Astrom

EXAMPLE 2.1 **Least-squares estimation of static system**

Consider the system

$$y(i) = b_0 + b_1 u(i) + b_2 u^2(i) + e(i)$$

where $e(i)$ is zero mean Gaussian noise with standard deviation 0.1. The system is linear in the parameters and can be written in the form (2.1) with

$$\varphi^T(i) = \begin{pmatrix} 1 & u(i) & u^2(i) \end{pmatrix}$$
$$\theta^T = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

The output is measured for the seven different inputs shown by the dots in Fig. 2.1. In practice the model structure is usually unknown, and the user must decide on an appropriate model. We illustrate this by estimating parameters of the following models:

$$\begin{aligned}
\text{Model 1}: \quad y(i) &= b_0 \\
\text{Model 2}: \quad y(i) &= b_0 + b_1 u \\
\text{Model 3}: \quad y(i) &= b_0 + b_1 u + b_2 u^2 \\
\text{Model 4}: \quad y(i) &= b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + b_3 u^3
\end{aligned}$$

The different models give a polynomial dependence of different orders between y and u.

Table 2.1 shows the least-squares estimates of the different models together with the resulting loss function. Figure 2.1 also shows the estimated relation between u and y for the different models. From the table it is seen that about the same losses are obtained for Models 3 and 4. The fit to the data points is almost the same for these two models, as is seen in Fig. 2.1. □

The example shows that it is important to choose the correct model structure to get a good model. With few parameters it is not possible to get a good fit to the data. If too many parameters are used, the fit to the measured data will be very good but the fit to another data set may be very poor. This latter situation is called *overfitting*.

Table 2.1 Least-squares estimates and loss functions for the system in Example 2.1 using different model structures.

Model	$\hat{b}_0$	$\hat{b}_1$	$\hat{b}_2$	$\hat{b}_3$	V
1	3.85				34.46
2	0.57	1.09			1.01
3	1.11	0.45	0.11		0.031
4	1.13	0.37	0.14	−0.003	0.027

Figure 2.1 The dots represent the measured data points. Resulting models, indicated by the solid lines, based on the least-squares estimates are also given for (a) Model 1, (b) Model 2, (c) Model 3, (d) Model 4.

- **تعبیر آماری:**

مقادیر واقعی

$$y(i) = \phi^T(i)\,\theta^0 + e(i) \qquad (*)$$

نویز فرایند: دنباله مستقل متغیرهای تصادفی با میانگین صفر و واریانس σ^2

$$\Rightarrow \quad Y = \Phi\theta^0 + E$$

- **قضیه** اگر داده با (*) داده شوند و تخمین با

$$\hat{\theta} = \left(\Phi^T \Phi\right)^{-1} \Phi^T Y$$

آنگاه:

(i) $\quad E\,\hat{\theta} = \theta^0 \longrightarrow$ Unbiased estimate

(ii) $\quad \mathrm{COV}\,\hat{\theta} = \sigma^2 \left(\Phi^T \Phi\right)^{-1}$

(iii) $\quad \hat{\sigma}^2(t) = 2V\,(\hat{\theta}, t)/(t-n) \longrightarrow$ Unbiased Estimate of the Covariance

- **خاصیت سازگاری** Consistency : اگر تعداد مشاهدات یا اندازه گیری ها به بی نهایت میل نماید آنگاه

$$\hat{\theta}(t) \rightarrow \theta^{0}$$

- مثال ۲-۲ کتاب Astrom

شناسایی روی خط سیستم های دینامیکی

- **هدف**: به دست آوردن مدل سیستم دینامیکی در هر لحظه نمونه برداری و کاربرد آن در کنترل.

- شمای کلی:

- **راهکار:** بازگشتی کردن تخمین حداقل مربعات به گونه ای که در زمان t بتوان از نتایج تا $t-1$ برای به دست آوردن تخمین استفاده کرد.

Recursive Least Squares (RLS)

- **محاسبات بازگشتی:**

مقدمات:

$$\hat{\theta}(t-1) = \text{LS Estimation up to } t-1$$

$$\left|\Phi^T \Phi\right| \neq 0$$

$$P(t) \triangleq \left[\Phi^T \Phi\right]^{-1} \longrightarrow \text{ماتریس کوواریانس}$$

داریم:

$$P^{-1}(t) = \Phi^T(t)\Phi(t)$$

$$= P^{-1}(t-1) + \phi(t)\phi^T(t) \qquad (1)$$

$$\text{Normal Equation} \rightarrow \hat{\theta}(t) = P(t)[\sum_{i=1}^{t} \phi(i)\, y(i)]$$

$$= P(t)[\sum_{i=1}^{t-1} \phi(i)\, y(i) + \phi(t) y(t)] \qquad (2)$$

Equations (1) and (2) give:

$$\sum_{i=1}^{t-1}\phi(i)\,y(i)=P^{-1}(t)\hat{\theta}(t)-\phi(t)y(t)$$

$$=P^{-1}(t-1)\hat{\theta}(t-1)$$

$$=P^{-1}(t)\hat{\theta}(t-1)-\phi(t)\phi^{T}(t)\hat{\theta}(t-1) \qquad (3)$$

Equations (2) and (3) give:

$$\hat{\theta}(t)=\hat{\theta}(t-1)-P(t)\phi(t)\phi^{T}(t)\hat{\theta}(t-1)+P(t)\phi(t)y(t)$$

$$=\hat{\theta}(t-1)+P(t)\phi(t)[y(t)-\phi^{T}(t)\hat{\theta}(t-1)]$$

$$=\hat{\theta}(t-1)+K(t)e(t)$$

Kalman Gain

Estimation Error or Prediction Error

لم معکوس سازی ماتریس:

$$\left(A+BCD\right)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}B\left(C^{-1}+DA^{-1}B\right)^{-1}DA^{-1}$$

با اعمال لم به معادله (۱) داریم:

$$P(t)=[P^{-1}(t-1)+\phi(t)\phi^{T}(t)]^{-1}$$
$$=P(t-1)-P(t-1)\phi(t)[I+\phi^{T}(t)P(t-1)\phi(t)]^{-1}\phi^{T}(t)P(t-1)$$

$$\Rightarrow \qquad K(t)=P(t)\phi(t)=P(t-1)\phi(t)[I+\phi^{T}(t)P(t-1)\phi(t)]^{-1}$$

- الگوریتم RLS:

$$\left|\Phi^T \Phi\right| \neq 0 \qquad \forall t \neq 0, \quad \hat{\theta}(t_0), \text{ and } P(t_0) \text{ given:}$$

Correcting gain

Estimation error

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + K(t)[y(t) - \phi^T(t)\hat{\theta}(t-1)]$$

Correcting Factor

$$K(t) = P(t-1)\phi(t)[I + \phi^T(t)P(t-1)\phi(t)]^{-1}$$

$$P(t) = [I - K(t)\phi^T(t)]P(t-1)$$

- **نکات مهم:**

✓ RLS یک Kalman Filter برای سیستم زیر است:

$$\theta(t+1) = \theta(t)$$
$$y(t) = \phi(t)\theta(t) + e(t)$$

✓ انتخاب اولیه ماتریس کوواریانس بسیار مهم است:

- ناویژه بودن
- نشان دادن خطای بزرگ تخمین
- مثبت معین بودن

✓ $P(0) = \alpha I, \quad \alpha = 10^4$

- پارامترهای متغیر با زمان و شناسایی روی خط

✓ تغییرات ناگهانی پارامترهای سیستم:

- Covariance Resetting
- Periodic Resetting
- Parallel RLS

✓ تغییرات مداوم ولی آهسته پارامترها:

- Forgetting Factor

- فاکتور فراموشی:

$$V(\theta,t)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t}\lambda^{t-i}\left(y(t)-\phi^{T}(i)\theta\right)^{2}$$

فاکتور فراموشی

$\lambda\in(0,1]$

- وزن دهی متغیر با زمان داده – داده های اخیر وزن بیشتری دارند.

- انتخاب فاکتور فراموشی؟

- فراموشی نمایی:

$$\lambda(t) = 1 - \beta e^{-\alpha t}$$

$$\rightarrow 1 \quad t \rightarrow \infty$$

$$\lambda(0) = 1 - \beta$$

- الگوریتم RLS با فراموشی نمایی

$$\left|\Phi^T \Phi\right| \neq 0 \qquad \forall t \neq 0, \quad \hat{\theta}(t_0), \text{ and } P(t_0) \text{ given:}$$

Correcting gain

Estimation error

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + K(t)[y(t) - \phi^T(t)\hat{\theta}(t-1)]$$

Correcting Factor

$$K(t) = P(t-1)\phi(t)[\lambda I + \phi^T(t)P(t-1)\phi(t)]^{-1}$$

$$P(t) = [I - K(t)\phi^T(t)]P(t-1)/\lambda$$

- یک مشکل: Covariance Bursting

مثال

$$y(t) + a_1 y(t-1) = b_1 u(t-1)$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \begin{bmatrix} -y(t-1) & u(t-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

$$= \phi^T(t-1)\theta(t-1)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi^T(1) \\ \phi^T(2) \end{bmatrix} \Rightarrow \Phi = \begin{bmatrix} -y(t-2) & u(t-2) \\ -y(t-1) & u(t-2) \end{bmatrix}$$

$$\Phi^T\Phi = \begin{bmatrix} y^2(t-2)+y^2(t-1) & -y(t-2)u(t-2)-y(t-1)u(t-1) \\ -u(t-2)y(t-2)-u(t-1)y(t-1) & u^2(t-2)+u^2(t-1) \end{bmatrix}$$

$$P(t)\phi(t)=\left[\Phi^T\Phi\right]^{-1}\phi(t)$$

$$=\frac{1}{\left|\Phi^T\Phi\right|}\begin{bmatrix} u^2(t-2)+u^2(t-1) & y(t-2)u(t-2)+y(t-1)u(t-1) \\ u(t-2)y(t-2)+u(t-1)y(t-1) & y^2(t-2)+y^2(t-1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -y(t-1) \\ u(t-1) \end{bmatrix}$$

In the steady state, we have

$$y(t-2)\approx y(t-1)\approx \bar{y}, u(t-2)\approx u(t-1)\approx \bar{u}$$

$$\Rightarrow P(t)\phi(t)\approx\frac{1}{\left|\Phi^T\Phi\right|}\begin{bmatrix} 2\bar{u}^2 & 2\overline{yu} \\ 2\overline{yu} & 2\bar{y}^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\bar{y} \\ \bar{u} \end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hence, $K(t)\approx 0$

$$\Rightarrow P(t)\approx\frac{1}{\lambda}P(t-1)\Rightarrow$$ Instability for $\lambda<1$

• نتیجه گیری

✓ اگر شناسایی به حالت ماندگار رسیده باشد $P\phi \approx 0$

در این حالت $K(t)\approx 0$ و ماتریس کوواریانس به صورت

$$P(t+1) \approx \frac{1}{\lambda} P(t)$$

به روز درآورده می شود، اگر فاکتور نمایی کوچکتر از یک باشد، آنگاه انفجار نمایی در ماتریس کوواریانس رخ میدهد!

• **یک نکته مهم:** الگوریتم های ساده شده از قبیل Projection

■ کاربرد RLS در شناسایی روی خط سیستم های دینامیکی

شمای کلی:

- سیستم در حضور نویز:

  - اگر نویز سفید باشد RLS تخمین بدون بایاس می دهد.
  - اگر نویز رنگی باشد RLS تخمین بایاس دار می دهد.

- راه حل: استفاده از ELS

- مدل سیستم:

نویز رنگی

$$A(q)y(t)=B(q)u(t)+C(q)e(t)$$

نویز سفید
غیر قابل
اندازه گیری
نامعلوم

همبستگی نویزها

- تقریب خطاها:

$$\varepsilon(t)=y(t)-\phi^T(t-1)\hat{\theta}(t-1)$$

$$[-y(t-1)\cdots-y(t-n)\quad u(t+m-n-1)\cdots u(t-m)\quad \varepsilon(t-1)\cdots\varepsilon(t-n)]$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

ELS:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + P(t)\phi(t)\varepsilon(t)$$

$$P^{-1}(t) = P^{-1}(t-1) + \phi(t)\phi^{T}(t)$$

- یک روش دیگر: RML or Recursive Maximum Likelihood
- مدل های غیر خطی خاص: خطی در پارامترها

- **شرایط آزمایشی:**

سیگنال ورودی برای شناسایی سیستم به روش LS چه ویژگی هایی باید داشته باشد؟

- ✓ سیگنال ورودی باید PE باشد.
- ✓ چه سیگنالی PE است؟
- ✓ مرتبه PE بودن سیگنال چیست؟

▪ یک مثال

سیستم زیر را در نظر بگیرید. پارامترهای آن نـامعلوم هسـتند و مطلـوب است که با داده های اندازه گیری شده ورودی-خروجی آن ها را تخمـین بزنیم:

$$\dot{y} = -ay + bu, \qquad y(0) = y_0$$

حالت اول:

$$u = 0 \Rightarrow y(t) = e^{-at} y_0 \qquad \text{Information on } b\,?$$

$$y_0 = 0 \Rightarrow y(t) = 0 \qquad \forall t, \qquad \text{Information on } a\,?$$

حالت دوم: ورودی ثابت غیر صفر

$$y(t) = e^{-at}\left(y_0 - \frac{b}{a}\bar{u} \right) + \frac{b}{a}\bar{u}$$

نکته: در حالت ماندگار تنها بهره حالت ماندگار سیستم قابل تخمین زدن است و پارامترهای سیستم را نمی توان تعیین کرد. با اطلاعات حالت گذرا می توان پارامترهای سیستم را تخمین زد، اگر:

$$y_0 \neq \frac{b}{a}\bar{u}$$

حالت سوم:

$$u = \sin(\omega_0 t) \qquad \omega_0 > 0$$

در حالت ماندگار:

$$y \approx A\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\frac{|b|}{|j\omega_0 + a|} = \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + \omega_0^{\,2}}}$$

$$\varphi = (\mathrm{sgn}(b) - 1)90^\circ - \tan\frac{\omega_0}{a}$$

نکته: تخمین زدن یکتای پارامترهای سیستم با اندازه گیری دامنه و فاز امکان پذیر است.

- سیگنال ورودی را چنان انتخاب کنید که بتوان با اطلاعات ورودی و خروجی سیستم، پارامترهای آن را تخمین زد.
- این نتیجه مستقل از روش یا طرح تخمین است.

- The FIR Model:

$$y(t) = b_1 u(t-1) + b_2 u(t-2) + \cdots + b_n u(t-n)$$

or

$$y(t) = \phi^T(t-1)\theta$$

Let us first consider estimation of parameters in a FIR model given by Eq. (2.33). The parameters of the model cannot be determined unless some conditions are imposed on the input signal. It follows from the condition for uniqueness of the least-squares estimate given by Theorem 2.1 that the minimum is unique if the matrix

$$\Phi^T\Phi = \begin{pmatrix} \sum_{n+1}^{t} u^2(k-1) & \sum_{n+1}^{t} u(k-1)u(k-2) & \dots & \sum_{n+1}^{t} u(k-1)u(k-n) \\ \sum_{n+1}^{t} u(k-1)u(k-2) & \sum_{n+1}^{t} u^2(k-2) & \dots & \sum_{n+1}^{t} u(k-2)u(k-n) \\ \vdots & & & \\ \sum_{n+1}^{t} u(k-1)u(k-n) & & & \sum_{n+1}^{t} u^2(k-n) \end{pmatrix} \tag{2.42}$$

has full rank. This condition is called an *excitation condition*. For long data sets, all sums in Eq. (2.42) can be taken from 1 to t. We then get

$$C_n = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \Phi^T \Phi = \begin{pmatrix} c(0) & c(1) & \dots & c(n-1) \\ c(1) & c(0) & \dots & c(n-2) \\ \vdots & & & \\ c(n-1) & c(n-2) & \dots & c(0) \end{pmatrix} \tag{2.43}$$

where $c(k)$ are the empirical covariances of the input, that is,

$$c(k) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t} u(i)u(i-k) \tag{2.44}$$

For long data sets the condition for uniqueness can thus be expressed as the matrix in Eq. (2.43) being positive definite. This leads to the following definition.

DEFINITION 2.1 Persistent excitation

A signal u is called *persistently exciting* (PE) of order n if the limits (2.44) exist and if the matrix C_n given by Eq. (2.43) is positive definite.

Remark 1. In the adaptive control literature an alternative definition of PE is often used. The signal u is said to be persistently exciting of order n if for all t there exists an integer m such that

$$\rho_1 I > \sum_{k=t}^{t+m} \varphi(k)\varphi^T(k) > \rho_2 I$$

where $\rho_1, \rho_2 > 0$ and the vector $\varphi(t)$ is given by

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} u(t-1) & u(t-2) & \dots & u(t-n) \end{pmatrix}$$

Notice that the matrix (2.43) can be written as

$$C_n = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{t} \varphi(k)\varphi^T(k)$$

Remark 2. Notice that no mean value is included in the definition of the empirical covariance $c(k)$ in Eq. (2.44). □

The following result can be established.

THEOREM 2.6 Consistency for FIR models

Consider least-squares estimation of the parameters of a finite impulse response model with n parameters. The estimate is consistent and the variance

of the estimates goes to zero as $1/t$ if the input signal is persistently exciting of order n.

Proof: The result follows from Definition 2.1 and Theorem 2.2. □

We now introduce the following theorem.

THEOREM 2.7 Persistently exciting signals

The signal u with the property (2.44) is persistently exciting of order n if and only if

$$U = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{t} (A(q)u(k))^2 > 0 \tag{2.45}$$

for all nonzero polynomials A of degree $n-1$ or less.

Proof: Let the polynomial A be

$$A(q) = a_0 q^{n-1} + a_1 q^{n-2} + \cdots + a_{n-1}$$

A straightforward calculation shows that

$$U = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{t} (a_0 u(k+n-1) + \cdots + a_{n-1}u(k))^2 = a^T C_n a$$

where C_n is the matrix given by Eq. (2.43). If C_n is positive definite, the right-hand side is positive for all a, and so is the left-hand side. Conversely, if the left-hand side is positive for all a, so is the right-hand side. □

The result is useful in investigating whether special signals are persistently exciting.

EXAMPLE 2.4 Pulse

It follows from Eq. (2.45) that $C_n \to 0$ for all n if u is a pulse. A pulse thus is not PE for any n. □

EXAMPLE 2.5 Step

Let $u(t) = 1$ for $t > 0$ and zero otherwise. It follows that

$$(q-1)u(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

A step can thus at most be PE of order 1. Since

$$C_1 = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{t} u^2(k) = 1$$

it follows that it is PE of order 1. □

EXAMPLE 2.6 **Sinusoid**

Let $u(t) = \sin \omega t$. It follows that

$$(q^2 - 2q\cos\omega + 1)\, u(t) = 0$$

A sinusoid can thus at most be PE of order 2. Since

$$C_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \cos\omega \\ \cos\omega & 1 \end{pmatrix}$$

it follows that a sinusoid is actually PE of order 2. □

EXAMPLE 2.7 **Periodic signal**

Let $u(t)$ be periodic with period n. It then follows that

$$(q^n - 1)\, u(t) = 0$$

The signal can thus at most be PE of order n. □

EXAMPLE 2.8 **Random signals**

Consider the stochastic process

$$u(t) = H(q)e(t)$$

where $e(t)$ is white noise and $H(q)$ is a pulse transfer function. It follows from the definition of white noise that Eq. (2.45) is satisfied for the signal e for any nonzero polynomial $A(q)$. This property also holds for the signal u. The signal u is thus PE of any order. □

To be able to give a frequency domain interpretation of PE, it is useful to use the following theorem, which is given without proof.

THEOREM 2.8 **Parseval's theorem**

Let

$$H(q^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k q^{-k}$$

$$G(q^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k q^{-k}$$

be two stable transfer functions, and let $e(t)$ be white noise of zero mean and covariance σ^2. Then

$$\sigma^2 \sum_{k=0}^{\infty} h_k g_k = \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{i\omega}) G(e^{i\omega})\, d\omega$$

□

Remark. The left-hand side can be interpreted as $E\left(H(q^{-1})e(t) \cdot G(q^{-1})e(t)\right)$, that is, the covariance of the two signals obtained by sending white noise through the transfer functions $H(q^{-1})$ and $G(q^{-1})$. □

EXAMPLE 2.9 Frequency domain characterization

Consider a quasi-stationary signal $u(t)$ with spectrum $\Phi_u(\omega)$. It follows from Parseval's theorem that

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{t} (A(q)u(k))^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |A(e^{i\omega})|^2 \, \Phi_u(\omega) \, d\omega \tag{2.46}$$

This equation gives considerable insight into the notion of persistent excitation. A polynomial of degree $n-1$ can at most vanish in $n-1$ points. The right-hand side of Eq. (2.46) will thus be positive if $\Phi_u(\omega) \neq 0$ for at least n points in the interval $-\pi \leq \omega \leq \pi$. A signal whose spectrum is different from zero in an interval is thus persistently exciting of any order. □

A sinusoid has a point spectrum that differs from zero at two points. It is thus persistently exciting of second order. A signal that is a sum of k sinusoids is persistently exciting of order $2k$. The frequency domain characterization also makes it possible to derive the following result.

THEOREM 2.9 PE of filtered signals

Let the signal u be persistently exciting of order n. Assume that $A(q)$ is a polynomial of degree $m < n$. The signal v defined by

$$v(t) = A(q)u(t)$$

is then persistently exciting of order ℓ with $n - m \leq \ell \leq n$. Assuming that A is stable, the signal w defined by

$$w(t) = \frac{1}{A(q)} u(t)$$

is persistently exciting of order n. □

- **مدل های تابع تبدیل**

سیستم مولد داده ها:

$$A^0(q)y(t)=B^0(q)u(t)+e(t+n) \qquad (+)$$

✓ A^0 و B^0 نسبت به هم اول.

✓ A و B تخمین هایی از A^0 و B^0 .

✓ اگر $e=0$ ، $\deg A > \deg A^0$ ، $\deg B > \deg B^0$ ، $\left|\Phi^T\Phi\right|=0$ و تخمین یکتا نیست.

- **قضیه** سیستم (+) با $e = 0$ و A^0 پایدار و:

✓ از LS برای تعیین A و B استفاده شده است.

✓ $\deg B > \deg B^0, \ \deg A = \deg A^0$

✓ $\mathrm{PE}\, u(t)$ از مرتبه $\deg B + \deg A + 1$ است.

آنگاه

$\lim_{t \to \infty} \left(\Phi^T \Phi \right) / t \ \to$ مثبت معین ماتریس

اثبات کتاب Astrom

- **نکات مهم:**

✓ مرتبه PE لازم برای سیگنال ورودی برابر با تعداد پارامترهای تخمین زده شده است.

✓ اگر در (+) نویز سفید باشد:

$$\lim_{t \to \infty} \left(\Phi^T \Phi \right) / t$$

برای کلیه مدل ها از هر مرتبه ای PD است به شرط آن که $u(t)$ از مرتبه $\deg B + 1$ PE باشد.

• شناسایی حلقه بسته

شناسایی در کنترل تطبیقی عمدتا به صورت حلقه بسته است.

- توجه کنید که:

$$\Phi=\begin{bmatrix} -y(n)\cdots & -y(1) & u(n)\cdots & u(1) \\ -y(n+1)\cdots & -y(2) & u(n+1)\cdots & u(2) \\ \vdots & & & \\ -y(t-1)\cdots & -y(t-n) & u(t-1)\cdots & u(t-n) \end{bmatrix}$$

فیدبک می تواند خروجی ها را به ورودی ها وابسته کند که ماتریس معادله نرمال ویژه گردد.

- **مثال** سیستم با فیدبک خروجی زیر را در نظر بگیرید:

$$y(t) = -ay(t-1) + bu(t-1), \quad u(t) = -ky(t)$$
$$\Rightarrow \quad \alpha u(t) = -\alpha k y(t) \Rightarrow 0 = -\alpha u(t) - \alpha k y(t)$$

$$\Rightarrow y(t) = -(a+\alpha k)\, y(t-1) + (b-\alpha) u(t-1)$$

سیستم های زیر از نظر ورودی-خروجی دقیقاً یکی هستند:

$$y(t) = -ay(t-1) + bu(t-1)$$
$$y(t) = -(a+\alpha k)\, y(t-1) + (b-\alpha) u(t-1)$$

سیستم شناسایی چه پارامترهایی را شناسایی کند؟

از طرف دیگر:

$$\Phi = \begin{bmatrix} -y(1) & u(1) \\ -y(0) & u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(1) & -ky(1) \\ -y(0) & -ky(0) \end{bmatrix}$$

حال اگر:

$$u(t) = -k_1 y(t) - k_2 y(t-1)$$

$$\Rightarrow y(t) = -ay(t-1) + bu(t-1) - u(t-1) - k_1 y(t-1) - k_2 y(t-2)$$
$$= -(ay + k_1) y(t-1) + (b-1)u(t-1) - k_2 y(t-2)$$

از نظر ورودی-خروجی با سیستم اولیه متفاوت است.

- **نتیجه گیری:** مرتبه فیدبک برای شناسایی حلقه بسته مهم است.

• دو مثال از [۱]:

EXAMPLE 2.12 Excitation

The need for persistency of excitation is illustrated in this example. A simulation of the estimates when the input is a unit pulse at $t = 50$ is shown in Fig. 2.7(a). The estimate $\hat{a}$ appears to converge to the correct value, but the estimate $\hat{b}$ does not. The reason for this is that information about the a parameter is obtained through the excitation by the noise. Information about the b parameter is obtained only through the pulse that is not persistently exciting.

In Fig. 2.7(b) the experiment is repeated, but the input is now a square wave of unit amplitude and a period of 100 samples. Both $\hat{a}$ and $\hat{b}$ will converge to their true values, because the input is persistently exciting. The absolute values of the elements of $P(t)$ are decreasing with time. For the simulation in

Figure 2.7 The estimated (solid line) and true (dashed line) parameter values in estimating the parameters in the model (2.53). The input signal $u(t)$ is (a) a unit pulse at $t = 50$, (b) a unit amplitude square wave with period 100.

Fig. 2.7(b) we have

$$\begin{pmatrix} \hat{a}(1000) \\ \hat{b}(1000) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.796 \\ 0.511 \end{pmatrix} \qquad P(1000) = \begin{pmatrix} 0.550 & 1.114 \\ 1.114 & 3.258 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}$$

According to Theorem 2.2 this implies the following standard deviations for the estimates:

$$\sigma_{\hat{a}} = 0.5\sqrt{5.50} \cdot 10^{-2} = 0.012$$

$$\sigma_{\hat{b}} = 0.5\sqrt{32.58} \cdot 10^{-2} = 0.029$$

The estimates are thus well within one standard deviation of their true values.

□

EXAMPLE 2.13 Model structure

In this example, parameter c in Eq. (2.53) has the value -0.5. Figure 2.8(a) shows the estimates of parameters a and b. The estimates do not converge to their true values. This is because the equation error $e(t) + ce(t-1)$ is not white noise. The assumptions in Theorem 2.2 are thus violated. Figure 2.8(b) shows the estimates when the extended least squares (ELS) method is used. All three parameters a, b, and c are then estimated, and the estimates converge to the true values. When only a and b are estimated by using the least-squares

Figure 2.8 Estimated parameters when the model (2.53) is simulated with $c = -0.5$ by using (a) LS and (b) ELS.

Figure 2.9 Estimates when the control signal is generated through feedback (a) $u(t) = -0.2y(t)$ and (b) $u(t) = -0.32y(t-1)$.

method, the estimates and the P-matrix at time $t = 1000$ are

$$\begin{pmatrix} \hat{a}(1000) \\ \hat{b}(1000) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.702 \\ 0.697 \end{pmatrix} \qquad P(1000) = \begin{pmatrix} 0.710 & 1.435 \\ 1.435 & 3.903 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}$$

The elements in the P-matrix are small. This would indicate good accuracy if the process had fulfilled the assumptions about the noise structure. Theorem 2.2 gives the following estimates of the standard deviation of $\hat{a}$ and $\hat{b}$:

$$\sigma_{\hat{a}} = 0.5\sqrt{7.10} \cdot 10^{-2} = 0.013$$
$$\sigma_{\hat{b}} = 0.5\sqrt{39.03} \cdot 10^{-2} = 0.031$$

It is thus deceptive to judge the accuracy of the estimates by only looking at the P-matrix. It is necessary that the data be generated from a model of the form (2.12) to use the P-matrix for accuracy estimates.

If we did not observe that the equation error is not white, we could thus be strongly misled. One possibility to avoid mistakes is to also compute the correlation of the equation error and check whether it is white noise. □

▪ خواص نظری RLS در تخمین پارامترهای سیستم های دینامیکی

- **لم.** الگوریتم RLS تابع هزینه زیر را می نیمم می کند:

$$J = \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{N}[y(t) - \phi^T(t-1)\hat{\theta}]^2 + \frac{1}{2}[\hat{\theta} - \hat{\theta}(0)]^T P_0^{-1}[\hat{\theta} - \hat{\theta}(0)]$$

اثبات. ص ۵۹ مرجع ۲.

- **لم.** الگوریتم RLS اعمال شده به سیستم:

$$y(t) = \phi(t-1)^T \theta_0$$

که در آن $y(t)$ خروجی سیستم $\phi(t-1)$ برداری از توابع خطی یا غیرخطی خروجی ها و ورودی های و θ_0 بردار پارامترهای نامعلوم- می دهد:

$$\text{(i)} \quad \left\|\hat{\theta}(t)-\theta_0\right\|^2 \le k_1 \left\|\hat{\theta}(0)-\theta_0\right\|^2 \qquad t \ge 1$$

$$\text{Where, } k_1 = Condition\ \text{Number}[P(-1)]^{-1} \triangleq \frac{\lambda_{\max} P(-1)^{-1}}{\lambda_{\min} P(-1)^{-1}}$$

$$\text{(ii)} \quad \lim_{N\to\infty} \sum_{t=1}^{N} \frac{e(t)^2}{1+\phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1)} < \infty$$

که نتیجه می دهد:

(a) $$\lim_{t\to\infty}\frac{e(t)}{[1+k_2\phi(t-1)^T\phi(t-1)]k_2}=0, \qquad k_2=\lambda_{\max}P(-1)$$

(b) $$\lim_{N\to\infty}\sum_{t=1}^{N}\frac{\phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1)e(t)^2}{[1+\phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1)]^2}<\infty$$

(c) $$\lim_{N\to\infty}\sum_{t=1}^{N}\left\|\hat{\theta}(t)-\hat{\theta}(t-1)\right\|^2\le\infty$$

(d) $$\lim_{N\to\infty}\sum_{t=1}^{N}\left\|\hat{\theta}(t)-\hat{\theta}(t-k)\right\|^2\le\infty$$

(e) $$\lim_{t\to\infty}\left\|\hat{\theta}(t)-\hat{\theta}(t-k)\right\|=0 \quad \text{for all bounded k}$$

اثبات. ص ۶۵ مرجع ۲

- **لم.** برای مدل:

$$y(t) = -\sum_{j=1}^{n} a_j y(t-j) + \sum_{j=1}^{n} b_j u(t-j)$$

$$or$$

$$y(t) = \phi(t-1)^T \theta_0$$

الگوریتم LS به θ_0 همگرا خواهد شد اگر:

(الف) سیستم پایدار است.

(ب) ورودی $\{u(t)\}$ تابع توزیعی با $2n$ نقطه غیر صفر(یا بیشتر) دارد.

(ج) $A(q)$ و $B(q)$ نسبت به هم اول هستند.

اثبات. ص۷۷مرجع ۲.

- **لم.** برای

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + e(t+n)$$

که $A(q)$ و $B(q)$ نسبت به هم اول و $\{e(t)\}$ نویز سفید با میانگین صفر و واریانس σ^2 . $\{u(t)\}$ سیگنال PE از مرتبه $\deg B + \deg A + 1$ آنگاه

$$\text{(i)} \quad \hat{\theta}(t) \to \theta_0, \quad t \to \infty$$

$$\text{(ii)} \quad \mathrm{var}(\hat{\theta}(t) - \theta_0) \approx \frac{\sigma^2}{t}[\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\Phi^T\Phi]^{-1}$$

اثبات. مرجع ۱

▪ شناسایی فضای حالت (حالت زمان پیوسته) [۳]

- مدل فضای حالت:

$$\dot{x} = A_p x + B_p u$$

$x \in R^n, u \in R^m,\ \ A_p, B_p$ Unknown matrices to be identifed

x, u available for measurement

تعریف مدل پارامتری فضای حالت SSPM :

$$\dot{x} = A_m x + (A_p - A_m)x + B_p u$$

$A_m,$ Arbitary stable matrix

- مدل تخمین :

$$\dot{\hat{x}} = A_m \hat{x} + (\hat{A}_p - A_m)x + \hat{B}_p u = A_m(\hat{x} - x) + \hat{A}_p x + \hat{B}_p u$$

$\hat{A}_p(t), \hat{B}_p(t)$ Estimates of A_p, B_p at time t

- بردار خطای تخمین:

$$\varepsilon = x - \hat{x} - (sI - A_m)^{-1}\varepsilon n_s^2 \text{ or } \varepsilon = x - \hat{x} - w, \dot{w} = A_m w + \varepsilon n_s^2$$

سیگنال نرمالیزه کننده استاتیکی برای کراندار کردن سیگنال های حالت و ورودی در صورتی که سیستم ناپایدار باشد. این سیگنال در صورت پایداری سیستم و کراندار بودن سیگنال ورودی ، صفر انتخاب می شود. $n_s^2 = x^T x + u^T u$ یک انتخاب است.

اکنون خطاهای پارامتری را به صورت زیر تعریف کنید:

$$\tilde{A}_p \triangleq \hat{A}_p - A_p, \tilde{B}_p \triangleq \hat{B}_p - B_p$$

دینامیک خطای تخمین به صورت زیر به دست می آید:

$$\dot{\varepsilon} = A_m \varepsilon - \tilde{A}_p x - \tilde{B}_p u - \varepsilon n_s^2$$

تابع لیاپانف زیر را در نظر بگیرید:

$$V(\varepsilon,\tilde{A}_p,\tilde{B}_p)=\varepsilon^T P\varepsilon+tr\left(\frac{\tilde{A}_p^T P\tilde{A}_p}{\gamma_1}\right)+tr\left(\frac{\tilde{B}_p^T P\tilde{B}_p}{\gamma_2}\right)$$

$$\gamma_1,\gamma_2>0;P=P^T>0:PA_m+A_mP^T=-Q,Q=Q^T>0$$

مشتق تابع لیاپانف:

$$\dot{V}(\varepsilon,\tilde{A}_p,\tilde{B}_p)=\dot{\varepsilon}^T P\varepsilon+\varepsilon^T P\dot{\varepsilon}+tr\left(\frac{\dot{\tilde{A}}_p^T P\tilde{A}_p}{\gamma_1}+\frac{\tilde{A}_p^T P\dot{\tilde{A}}_p}{\gamma_1}\right)+tr\left(\frac{\dot{\tilde{B}}_p^T P\tilde{B}_p}{\gamma_2}+\frac{\tilde{B}_p^T P\dot{\tilde{B}}_p^T}{\gamma_2}\right)$$

$$=-\varepsilon^T Q\varepsilon-2\varepsilon^T P\tilde{A}_p x-2\varepsilon^T P\tilde{B}_p u+2tr\left(\frac{\tilde{A}_p^T P\dot{\tilde{A}}_p}{\gamma_1}+\frac{\tilde{B}_p^T P\dot{\tilde{B}}_p}{\gamma_2}\right)-2\varepsilon^T P\varepsilon n_s^2$$

$$-2tr\left(\tilde{A}_p^T P\varepsilon x^T\right) \qquad -2tr\left(\tilde{B}_p^T P\varepsilon u^T\right)$$

$$\Rightarrow \dot{V}(\varepsilon,\tilde{A}_p,\tilde{B}_p) = -\varepsilon^T Q\varepsilon + 2tr\left(\underline{\frac{\tilde{A}_p^T P\dot{\tilde{A}}_p}{\gamma_1} - \tilde{A}_p^T P\varepsilon x^T + \frac{\tilde{B}_p^T P\dot{\tilde{B}}_p}{\gamma_2} - \tilde{B}_p^T P\varepsilon u^T}\right) - 2\varepsilon^T P\varepsilon n_s^2$$

باید صفر باشد، لذا:

$$\boxed{\dot{\tilde{A}}_p = \dot{\hat{A}}_p = \gamma_1 \varepsilon x^T} \quad \boxed{\dot{\tilde{B}}_p = \dot{\hat{B}}_p = \gamma_2 \varepsilon u^T}$$

$$\Rightarrow \dot{V}(\varepsilon,\tilde{A}_p,\tilde{B}_p) = -\varepsilon^T Q\varepsilon - 2\varepsilon^T P\varepsilon n_s^2 \le 0 \Rightarrow V, \hat{A}_p, \hat{B}_p \text{ are bounded}$$

$$\Rightarrow \dot{V} \le -|\varepsilon|^2 \lambda_{\min}(Q) - 2|\varepsilon n_s|^2 \lambda_{\min}(P) \le 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{\min}(Q)\int_0^\infty |\varepsilon|^2 d\tau + 2\lambda_{\min}(P)\int_0^\infty |\varepsilon n_s|^2 d\tau \le V(0) - V(\infty) < \infty$$

$$\Rightarrow \varepsilon, \varepsilon n_s^2 \text{ are square integrable or } \varepsilon, \varepsilon n_s^2 \in L_2$$

$$\dot{\hat{A}}_p = \gamma_1 \varepsilon x^T \longrightarrow \left\| \dot{\hat{A}}_p \right\| \le \gamma_1 \left| \varepsilon m_s \right| \frac{\left| x^T \right|}{m_s}$$

$$\dot{\hat{B}}_p = \gamma_2 \varepsilon u^T \longrightarrow \left\| \dot{\hat{B}}_p \right\| \le \gamma_2 \left| \varepsilon m_s \right| \frac{\left| u^T \right|}{m_s},$$

$m_s^2 = 1 + n_s^2$ is the normalizing signal

با توجه به خاصیت سیگنال نرمالیزه کننده داریم:

$$\frac{|x|}{m_s}, \frac{|u|}{m_s} \in L_\infty$$

بنابراین میتوانیم نشان دهیم که:

$$\left\| \dot{\hat{A}}_p \right\|, \left\| \dot{\hat{B}}_p \right\| \in L_2$$

- **جمع بندی:** نشان داده شده است که مستقل از پایـداری سیســتم و کراندار بودن ورودی، قانون تطابق به دست آمده موارد زیر را تضـمین می کند:

$$\left\|\hat{A}_p\right\|,\left\|\hat{B}_P\right\|,\varepsilon\in L_\infty \qquad \left\|\dot{\hat{A}}_p\right\|,\left\|\dot{\hat{B}}_p\right\|,\varepsilon,\varepsilon n_s\in L_2$$

قضیه

برای سیستم کنترل پذیر و پایدار زیر

$$\dot{x} = A_p x + B_p u$$

اگر عناصر بردار ورودی کراندار باشند و به اندازه کافی غنی از مرتبه n+1 و ناهمبسته باشند، تخمین های داده شده از قواعد تطابق زیر

$$\dot{\hat{A}}_p = \gamma_1 \varepsilon x^T \qquad \dot{\hat{B}}_p = \gamma_2 \varepsilon u^T$$

به مقادیر واقعی به طور نمایی سریع همگرا می شوند.

Example 3.13.2 Consider the second-order plant

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

where $x = [x_1, x_2]^T$, $u = [u_1, u_2]^T$ is a bounded input vector, the matrices A, B are unknown, and A is a stable matrix. The estimation model is generated as

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -a_m & 0 \\ 0 & -a_m \end{bmatrix} (\hat{x} - x) + \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \hat{b}_{11} & \hat{b}_{12} \\ \hat{b}_{21} & \hat{b}_{22} \end{bmatrix} u,$$

where $\hat{x} = [\hat{x}_1, \hat{x}_2]^T$ and $a_m > 0$. The estimation error is given by

$$\varepsilon = x - \hat{x},$$

where $n_s = 0$ due to the stability of A and boundedness of u. The adaptive law (3.109) can be written as

$$\dot{\hat{a}}_{ij} = \gamma_1 \varepsilon_i x_j, \qquad \dot{\hat{b}}_{ij} = \gamma_2 \varepsilon_i u_j$$

for $i = 1, 2$, $j = 1, 2$, and adaptive gains γ_1, γ_2. An example of a sufficiently rich input for this plant is

$$u_1 = c_1 \sin 2.5t + c_2 \sin 4.6t,$$
$$u_2 = c_3 \sin 7.2t + c_4 \sin 11.7t$$

for some nonzero constants c_i, $i = 1, 2, 3, 4$. ∎

رویتگرهای تطبیقی (حالت زمان پیوسته) [۳]

- مدل فضای حالت سیستم پایدار با نمایش می نیمال زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0$$

$$y = C^T x$$

$$x \in R^n, \ u \text{ is a bounded function of time}$$

تعریف رویتگر تطبیقی طرحی است که پارامترهای سیستم، ماتریس های حالت-ورودی-خروجی، را همزمان با بردار حالت آن تنها با استفاده از داده های ورودی-خروجی، تخمین می زند.

- معادلات رویتگر و انتخاب مناسب بردار بهره رویتگر:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - \hat{y}), \qquad x(0) = x_0$$
$$\hat{y} = C^T \hat{x}$$

یک روند ساده طراحی رویتگر به کارگیری معادل های تخمین زده شده ماتریس های فضای حالت در معادله بالا است. اما چه گونه می توان تمامی *n*n+2n* پارامترهای ماتریس های فضای حالت را از داده های ورودی-خروجی تخمین زد. در بهترین حالت تنها می توان *2n* پارامترهای تابع تبدیل سیستم را تخمین زد.

راه حل: نمایش های کانونیکال فضای حالت.

$$\dot{x}_\alpha = \left[\begin{array}{c|c} -a_p & \begin{array}{c} I_{n-1} \\ \hline 0 \end{array} \end{array}\right] x_\alpha + b_p u, \qquad (3.112)$$
$$y = [1, 0, \ldots, 0] x_\alpha,$$

where $a_p = [a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0]^T$ and $b_p = [b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_0]^T$ are vectors of dimension n, and $I_{n-1} \in \mathcal{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ is the identity matrix. The elements of a_p and b_p are the coefficients of the denominator and numerator, respectively, of the transfer function

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_0 s}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_0 s} \qquad (3.113)$$

and can be estimated online from I/O data using the techniques presented in the previous sections.

Since both (3.110) and (3.112) represent the same plant, we can focus on the plant representation (3.112) and estimate x_α instead of x. The disadvantage is that in a practical situation x may represent some physical variables of interest, whereas x_α may be an artificial state vector.

The adaptive observer for estimating the state x_α of (3.112) is motivated from the Luenberger observer structure (3.111) and is given by

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \hat{A}(t)\hat{x} + \hat{b}_p(t)u + K(t)(y - \hat{y}), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0, \\ \hat{y} &= [1, 0, \ldots, 0]\hat{x}, \end{aligned} \qquad (3.114)$$

where $\hat{x}$ is the estimate of x_α,

$$\hat{A}(t) = \left[\begin{array}{c|c} -\hat{a}_p(t) & \begin{array}{c} I_{n-1} \\ \hline 0 \end{array} \end{array}\right], \qquad K(t) = a^* - \hat{a}_p(t),$$

$\hat{a}_p(t)$ and $\hat{b}_p(t)$ are the estimates of the vectors a_p and b_p, respectively, at time t, and $a^* \in \mathcal{R}^n$ is chosen so that

$$A^* = \left[\begin{array}{c|c} -a^* & \begin{array}{c} I_{n-1} \\ \hline 0 \end{array} \end{array}\right] \qquad (3.115)$$

is a stable matrix that contains the eigenvalues of the observer.

A wide class of adaptive laws may be used to generate $\hat{a}_p(t)$ and $\hat{b}_p(t)$ online. As in Chapter 2, the parametric model

$$z = \theta^{*T}\phi \tag{3.116}$$

may be developed using (3.113), where

$$\theta^* = [b_p^T, a_p^T]^T$$

and z, ϕ are available signals, and used to design a wide class of adaptive laws to generate $\theta(t) = [\hat{b}_p^T(t), a_p^T(t)]^T$, the estimate of θ^*. As an example, consider the gradient algorithm

$$\dot{\theta} = \Gamma\varepsilon\phi, \quad \varepsilon = \frac{z - \theta^T\phi}{m_s^2}, \tag{3.117}$$

where $m_s^2 = 1 + \alpha\phi^T\phi$ and $\alpha \geq 0$.

Theorem 3.14.1. *The adaptive observer described by* (3.114)–(3.117) *guarantees the following properties:*

(i) *All signals are bounded.*

(ii) *If u is sufficiently rich of order $2n$, then the state observation error $|\hat{x} - x_\alpha|$ and the parameter error $|\theta - \theta^*|$ converge to zero exponentially fast.*

Proof. (i) Since A is stable and u is bounded, we have $x_\alpha, y, \phi \in \mathcal{L}_\infty$ and hence $m_s^2 = 1+\alpha\phi^T\phi \in \mathcal{L}_\infty$. The adaptive law (3.117) guarantees that $\theta \in \mathcal{L}_\infty$ and $\varepsilon, \varepsilon m_s, \dot{\theta} \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$. The observer equation may be written as

$$\dot{\hat{x}} = A^*\hat{x} + \hat{b}_p(t)u + (\hat{A}(t) - A^*)x_\alpha.$$

Since A^* is a stable matrix and $\hat{b}_p$, $\hat{A}$, u, x_α are bounded, it follows that $\hat{x} \in \mathcal{L}_\infty$, which in turn implies that all signals are bounded.

(ii) The state observation error $\tilde{x} = \hat{x} - x_\alpha$ satisfies

$$\dot{\tilde{x}} = A^*\tilde{x} + \tilde{b}_p u - \tilde{a}_p y, \tag{3.118}$$

where $\tilde{b}_p = \hat{b}_p - b_p, \tilde{a}_p = \hat{a}_p - a_p$ are the parameter errors. Since for u sufficiently rich we have that $\theta(t) \to \theta^*$ as $t \to \infty$ exponentially fast, it follows that $\tilde{b}_p, \tilde{a}_p \to 0$ exponentially fast. Since $u, y \in \mathcal{L}_\infty$, the error equation consists of a homogenous part that is exponentially stable and an input that is decaying to zero. This implies that $\tilde{x} = \hat{x} - x_\alpha \to 0$ as $t \to \infty$ exponentially fast. $\square$