چکیده

در این پایان‌نامه، ما نخست مفاهیم $\mathcal{MT}$-تابع، τ-تابع و τ°-متر را معرفی نموده، سپس با به کارگیری این مفاهیم، قضایای نقطه ثابت جدیدی برای نگاشت‌های انقباضی مجموعه-مقدار غیرخطی اثبات می‌کنیم.
سپس رده‌ی نگاشت‌های مستعد مجموعه-مقدار را معرفی نموده و قضایای نقطه ثابت جدیدی، که گسترش‌هایی از قضیه نقطه ثابت کنان [1] و قضیه نقطه ثابت چاترجی [2] برای نگاشت‌های انقباضی مجموعه-مقدار غیرخطی در فضاهای متری کامل هستند، برای چنین نگاشت‌هایی اثبات می‌کنیم.
همچنین، مفهوم انقباض‌های جهت پنهان در فضاهای متری را که در واقع گسترشی از نگاشت‌های انقباضی کلاسیک است، معرفی می‌کنیم. وجود خاصیت نقطه ثابت تقریبی تعمیم یافته برای انواع مختلف نگاشت‌های انقباضی غیرخطی نیز نشان داده می‌شود.
سپس با اثبات قضایای نقطه ثابت جدید برای نگاشت‌های انقباضی جهت پنهان، نشان می‌دهیم نتایج شناخته شده‌ی قبلی را می‌توان بهبود بخشید و گسترش داد. نتایج جدید ما، پاسخی جزئی به مسئله‌ی باز رایش [3] می‌دهد و گسترش‌هایی جدید از قضیه نقطه ثابت برایند-برایند [4] و قضیه نقطه ثابت میزوگوچی-تاکاهاشی [5] به دست می‌دهد.
در نهایت چند قضیه برای وجود نقطه انطباق و نقطه ثابت برای نگاشت‌های مجموعه-مقدار در فضاهای متری کامل اثبات می‌کنیم.

کلمات کلیدی : نقطه ثابت، $\mathcal{MT}$-تابع، τ-تابع، τ°-متر، قضیه نقطه ثابت کنان، قضیه نقطه ثابت چاترجی، انقباض جهت پنهان، خاصیت نقطه ثابت تقریبی، قضیه نقطه ثابت میزوگوچی-تاکاهاشی تعمیم یافته، قضیه نقطه ثابت برایند-برایند تعمیم یافته، نقطه انطباق.

1. Kannan
2. Chatterjea
3. Reich
4. Berinde-Berinde
5. Mizoguchi-Takahashi

فهرست مطالب

مقدمه

نظریه نقطه ثابت، یکی از شاخه‌های میان رشته‌ای در ریاضیات است و به عنوان یک موضوع مناسب در ریاضی محض و کاربردی، یک شاخه‌ی رشد یافته از آنالیز غیرخطی محسوب می‌شود که در جهات مختلفی گسترش یافته و کاربردهای فراوانی در خود ریاضیات و همچنین سایر علوم دارد.
این نظریه دارای سه مسئله‌ی عمده می‌باشد که عبارتند از: وجود نقطه ثابت، پیدا کردن آن در صورت وجود و ساختار مجموعه‌ی نقاط ثابت. این نظریه همچنین دارای سه زیر شاخه در فضاهای توپولوژیک، فضاهای متری و گسسته است.
قضیه نقطه ثابت براور [۱] ، اصل انقباضی باناخ [۲] و قضیه نقطه ثابت تارسکی [۳] به ترتیب قضیه‌های بنیادی و نقطه‌ی آغاز هر یک از این شاخه‌ها محسوب می‌شوند.
موضوع این پایان‌نامه بر مبحث نظریه نقطه ثابت، برای نگاشت‌های انقباضی در فضاهای متری متمرکز است.
این پایان‌نامه در پنج فصل تدوین شده است.
در فصل اول به بیان تعاریف مقدماتی، لم و قضیه‌های پیش نیاز پرداخته‌ایم.
در فصل دوم نخست تعریف $\mathcal{MT}$-تابع و خصوصیات آن را بیان می‌کنیم. سپس مفاهیم τ-تابع و τ°-متر را به عنوان گسترش‌های جدیدی از مفهوم متر معرفی می‌کنیم. با به کارگیری این مفاهیم، گسترش‌های جدیدی از قضایای نقطه ثابت پرایند-برایند، میزوگوچی-تاکاهاشی، نادلر [۴] ، کنان و چاترجی برای نگاشت‌های انقباضی مجموعه-مقدار غیرخطی در فضاهای متری کامل، به دست می‌آوریم.
در فصل سوم، که برگرفته از مرجع [۱۴] است، ابتدا رده‌ی نگاشت‌های مستعد مجموعه-مقدار را معرفی نموده و سپس قضایای نقطه ثابت جدیدی که گسترش‌هایی از قضایای نقطه ثابت کنان و چاترجی برای نگاشت‌های مجموعه-مقدار غیرخطی در فضاهای متری کامل هستند، برای چنین نگاشت‌هایی اثبات می‌کنیم.
در فصل چهارم، که مطالب آن از مرجع [۱۲] گرفته شده‌اند، به منظور گسترش نظریه نقطه ثابت متری، نخست مفهوم نگاشت‌های انقباضی جهت پنهان در فضاهای متری، که در واقع گسترشی از نگاشت‌های انقباضی نوع کلاسیک است، معرفی می‌کنیم و با اثبات قضایای نقطه ثابت جدید برای

1. Brouwer
2. Banach
3. Tarski
4. Nadler

چنین نگاشت‌هایی، گسترش‌هایی از قضیه نقطه ثابت برایند- برایند و میزوگوچی- تاکاهاشی ارائه می‌کنیم. همچنین خاصیت نقطه ثابت تقریبی تعمیم یافته برای انواع مختلف نگاشت‌های انقباضی غیرخطی نیز نشان داده شده است. نتایج ما وجود خاصیت نقطه ثابت تقریبی را برای نگاشت‌های نوع رایش اثبات می‌کند و پاسخی جزئی به مسئله‌ی باز رایش می‌دهد.

در فصل پنجم اثبات چند قضیه برای وجود نقطه انطباق و نقطه ثابت برای نگاشت‌های مجموعه- مقدار در فضاهای متری کامل در [۱۱] مورد مطالعه قرار گرفته است.

فهرست نمادها

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف اولیه

در این فصل به بیان تعاریف و قضایای مقدماتی که پیش نیازی برای فصل‌های بعدی است، می‌پردازیم.

۱.۱ فضاهای متری

تعریف ۱.۱.۱. [۲۰] فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی و $d : X \times X \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد. d را یک متر روی X نامیم هرگاه به ازای هر x، y، $z \in X$،

(الف) $d(x,y) > ۰$ و $d(x,y) = ۰$ اگر و تنها اگر $x = y$.

(ب) $d(x,y) = d(y,x)$.

(ج) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. (نامساوی مثلثی)

اگر d یک متر روی X باشد، آن‌گاه (X,d) را یک فضای متری نامیم.
توجه به این امر مهم است که هر زیر مجموعه‌ی L از فضای متری X، خود فضایی متری با همان تابع متر می‌باشد.
دنباله‌ی $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ در فضای متری (X,d) را یک دنباله‌ی کوشی نامیم هرگاه به ازای هر $\varepsilon > ۰$، $N \in \mathbb{N}$ موجود باشد که به ازای هر $n \geq N$، m داشته باشیم $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.
(X,d) را یک فضای متری کامل نامیم هرگاه هر دنباله‌ی کوشی، در X همگرا باشد.

تعریف ۲.۱.۱. [۲۰] فرض کنید X یک مجموعه و $\mathfrak{P}(X)$ مجموعه‌ی شامل همه‌ی زیر مجموعه‌های X باشد. $\tau \subseteq \mathfrak{P}(X)$ را یک توپولوژی روی X نامیم هرگاه خواص زیر برقرار باشد:

(الف) $X \in \tau$، $\varnothing$.

(ب) اجتماع هر زیر گردایه از عناصر τ، عضوی از τ باشد.

(ج) اشتراک هر گردایه متناهی از عناصر τ، عضوی از τ باشد.

مجموعه‌ی X با توپولوژی τ یک فضای توپولوژیک نامیده می‌شود. اعضای τ را مجموعه‌های باز نامیم.

فرض کنید X یک فضای متری باشد. اگر توپولوژی τ روی X را گردایه همه‌ی اجتماع‌های گوی‌های باز X در نظر بگیریم، آن‌گاه τ توپولوژی معمولی روی فضای متری نامیده می‌شود و گوییم که این مجموعه‌ها، مجموعه‌های باز تولید شده توسط متر روی فضا می‌باشند. در واقع، هر فضای متری یک فضای توپولوژیک می‌باشد.

تعریف ۳.۱.۱. [۲۹] فضای توپولوژیک X که هاوسدورف نیز می‌باشد، یعنی هر جفت نقاط مجزای داده شده همسایگی‌هایی مجزا داشته باشند، را یک فضای نرمال گویند در صورتی که برای دو زیر مجموعه‌ی بسته و جدا از هم A و B، مجموعه‌های باز جدا از هم مانند U و V موجود باشند به قسمی که $A \subseteq U$ و $B \subseteq V$.

قضیه ۴.۱.۱. [۲۹] *هر فضای متری یک فضای نرمال است.*

لم ۵.۱.۱. [۲۵] *فرض کنید (X, d) یک فضای متری، $A \subseteq X$ و $U \subseteq X$ باز باشد. در این صورت*

$$U \cap \overline{A} \subseteq \overline{U \cap A},$$

بنابراین، اگر $U \cap A = \varnothing$، آن‌گاه $U \cap \overline{A} = \varnothing$.

لم ۶.۱.۱. [۲۵] *اگر (X, d) یک فضای متری باشد، آن‌گاه تابع $f : X \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = d(x, A)$ پیوسته است. در حالت خاص، اگر $a \in A$ نقطه‌ای از A باشد، آن‌گاه تابع $f : X \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = d(x, a)$ پیوسته است.*

تعریف ۷.۱.۱. [۲۰] فضای برداری X را یک فضای نرم‌دار گویند هرگاه به هر $x \in X$، یک عدد حقیقی $\|x\|$ به نام نرم x نسبت داده شود به قسمی که

(الف) $\|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

(ب) به ازای هر $x \in X$ و هر اسکالر α، $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

(ج) به ازای هر $x, y \in X$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

دقت شود که با قرار دادن $d(x, y) := \|x - y\|$، زوج (X, d) یک فضای متری خواهد بود که متر d را متر تولید شده توسط نرم گوییم.

تعریف ۸.۱.۱. [۲۰] فرض کنید X یک فضای برداری و $\|\cdot\|$ یک نرم روی X باشد. اگر X با متر تولید شده توسط نرم یک فضای کامل باشد، آن‌گاه $(X, \|\cdot\|)$ را یک فضای باناخ گویند.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید f یک تابع حقیقی مقدار، تعریف شده روی $\mathbb{R}$ باشد در این صورت

$$\limsup_{x\to c} f(x) = \inf_{\varepsilon>0} \sup_{0<|x-c|<\varepsilon} f(x),$$

$$\limsup_{x\to c^+} f(x) = \inf_{\varepsilon>0} \sup_{0<x-c<\varepsilon} f(x),$$

به همین ترتیب

$$\liminf_{x\to c} f(x) = \sup_{\varepsilon>0} \inf_{0<|x-c|<\varepsilon} f(x),$$

$$\liminf_{x\to c^+} f(x) = \sup_{\varepsilon>0} \inf_{0<x-c<\varepsilon} f(x).$$

اگر دنباله‌ی $\{x_n\}$ یک دنباله‌ی کراندار در $\mathbb{R}$ باشد، آن‌گاه

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_n \sup_{k\geq n} x_k,$$

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \sup_n \inf_{k\geq n} x_k.$$

تعریف ۱۰.۱.۱. [۲۹] فرض کنید (X,d) یک فضای متری باشد. تابع $f : X \to (-\infty,\infty]$ را روی X نیم پیوسته پایینی نامیم هرگاه برای هر عدد حقیقی a، مجموعه‌ی $\{x \in X : f(x) \leq a\}$ در X بسته باشد.

قضیه ۱۱.۱.۱. [۲۹] *فرض کنید (X,d) یک فضای متری باشد. تابع $f : X \to (-\infty,\infty]$ روی X نیم پیوسته پایینی است اگر و تنها اگر برای دنباله‌ی $\{x_n\}$ و برای هر $x_0 \in X$، اگر $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$، آن‌گاه $f(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$.*

قضیه ۱۲.۱.۱. [۲۹] *فرض کنید (X,d) یک فضای متری، توابع f، $g : X \to (-\infty,\infty]$ نیم پیوسته پایینی و α یک عدد نامنفی باشد. در این صورت توابع $f+g$ و αf که برای هر $x \in X$، به صورت*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (\alpha f)(x) = \alpha f(x),$$

تعریف می‌شوند نیز، نیم پیوسته پایینی می‌باشند.

تعریف ۱۳.۱.۱. [۲۰] تابع $\phi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ را نیم پیوسته پایینی از راست گویند هرگاه برای دنباله‌ی نزولی $\{r_j\}$ به طوری که $r_j \downarrow r \geq 0$، داشته باشیم $\liminf_{j\to\infty} \phi(r_j) \geq \phi(r)$.

۲.۱ نگاشت‌های مجموعه-مقدار

بررسی نگاشت‌های مجموعه-مقدار دارای اهمیت فراوانی در نظریه نقطه ثابت و کاربردهای آن از جمله نظریه تعادل و نابرابری‌های تغییراتی است. در این بخش، ضمن معرفی یک متر روی مجموعه‌ها و تعریف یک نگاشت مجموعه-مقدار، دسته‌های مختلف نگاشت‌های انقباضی مجموعه-مقدار را بررسی کرده و مقایسه می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱. [۲۰] فرض کنید (X,d) یک فضای متری باشد. نگاشت $T : X \to X$ را لیپ شیتس گویند هرگاه ثابت $k \geq 0$ موجود باشد به قسمی که برای هر x، $y \in X$،

$$d(Tx,Ty) \leq kd(x,y),$$

کوچکترین kی موجود، که به ازای آن رابطه‌ی فوق برقرار باشد را ثابت لیپ شیتس T گویند.

تعریف ۲.۲.۱. [۲۰] نگاشت لیپ شیتس $T : X \to X$ را یک انقباض گویند در صورتی که $0 \leq k < 1$ باشد.

تعریف ۳.۲.۱. [۲۰] خود-نگاشت $T : X \to X$ را کاهنده گویند هرگاه برای هر x، $y \in X$،

$$d(Tx,Ty) \leq d(x,y).$$

تعریف ۴.۲.۱. [۱۳] خود-نگاشت $T : X \to X$ را در نظر بگیرید. در این صورت

(الف) نگاشت T را از نوع کنان گویند، هرگاه $\gamma \in [0, \frac{1}{2})$ موجود باشد به قسمی که برای هر x، $y \in X$،

$$d(Tx,Ty) \leq \gamma\{d(x,Tx) + d(y,Ty)\},$$

(ب) نگاشت T را از نوع چاترجی گویند، هرگاه $\gamma \in [0, \frac{1}{2})$ موجود باشد به قسمی که برای هر x، $y \in X$،

$$d(Tx,Ty) \leq \gamma\{d(x,Ty) + d(y,Tx)\}.$$

تعریف ۵.۲.۱. تابع $\varphi : [0,\infty) \to [0,1)$ را یک $\mathcal{MT}$-تابع گویند هرگاه در شرط میزوگوچی-تاکاهاشی صدق کند. یعنی برای هر $t \in [0,\infty)$،

$$\limsup_{s \to t^+} \varphi(s) < 1.$$

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. مجموعه‌ی همه‌ی زیر مجموعه‌های ناتهی X را با $\mathfrak{N}(X)$، خانواده‌ی زیر مجموعه‌های ناتهی و بسته‌ی X را با $\mathfrak{C}(X)$ و خانواده‌ی همه‌ی زیر مجموعه‌های ناتهی، بسته و کراندار X را با $\mathfrak{CB}(X)$ نمایش می‌دهیم.
هرگاه نگاشت T از مجموعه‌ی X به هر یک از خانواده مجموعه‌های فوق، تعریف شود در این صورت T را یک نگاشت مجموعه-مقدار گوییم.

برای معرفی نگاشت‌های انقباضی مجموعه-مقدار، لازم است ابتدا متر هاوسدورف را معرفی کنیم.

تعریف ۷.۲.۱. [۲۰] فرض کنید (X,d) یک فضای متری باشد. تابع $\mathcal{H} : \mathfrak{CB}(X) \times \mathfrak{CB}(X) \to \mathbb{R}^+$ را متر هاوسدورف روی $\mathfrak{CB}(X)$ القا شده توسط متر d روی X گویند، هرگاه برای هر جفت عناصر A، $B \in \mathfrak{CB}(X)$ داشته باشیم:

$$\mathcal{H}(A,B) = \max\{\sup_{x \in A} d(x,B), \sup_{x \in B} d(x,A)\},$$

که $d(x,A) = \inf_{y \in A} d(x,y)$.

تعریف ۸.۲.۱. [۲۰] نگاشت مجموعه-مقدار $T : X \to \mathfrak{N}(X)$ را یک انقباض گویند هرگاه $0 \leq k < 1$ موجود باشد به قسمی که برای هر x، $y \in X$،

$$\mathcal{H}(Tx, Ty) \leq kd(x, y).$$

تعریف ۹.۲.۱. نقطه‌ی v در X یک نقطه ثابت نگاشت T است هرگاه $v = Tv$، وقتی $T : X \to X$ نگاشتی تک-مقداری باشد و $v \in Tv$، وقتی $T : X \to 2^X$ نگاشتی مجموعه-مقدار باشد. مجموعه‌ی نقاط ثابت T را با $\mathcal{F}(T)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۲.۱. [۱۳] فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. نگاشت مجموعه-مقدار $T : X \to 2^X$ را در $x \in X$ نیم پیوسته بالایی گویند هرگاه برای هر مجموعه‌ی باز V شامل Tx $(Tx \subset V)$، همسایگی باز $U(x)$ از x موجود باشد به قسمی که برای هر $x_0 \in U(x)$، $Tx_0 \subset V$. نگاشت T روی X نیم پیوسته بالایی است هرگاه در هر نقطه‌ی آن نیم پیوسته بالایی باشد.

تعریف ۱۱.۲.۱. [۲۶] فرض کنید L یک زیر مجموعه‌ی ناتهی و بسته از فضای متری (X, d) باشد. نگاشت مجموعه-مقدار $T : L \to \mathfrak{CB}(X)$ را H-نیم پیوسته بالایی گویند هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ و هر $x \in L$، $r = r(x, \varepsilon) > 0$ موجود باشد به قسمی که برای هر $x_0 \in \mathcal{B}(x, r)$،

$$\sup_{y \in Tx_0} d(y, Tx) < \varepsilon,$$

که در اینجا $\mathcal{B}(x, r)$ گوی باز به مرکز $x \in X$ و شعاع $r > 0$ می‌باشد.

تذکر: تعریف فوق برای نگاشت‌های تک-مقداری، معادل پیوستگی می‌باشد.

حال به معرفی دسته‌های مختلف از نگاشت‌های انقباضی مجموعه-مقدار می‌پردازیم.

تعریف ۱۲.۲.۱. نگاشت مجموعه-مقدار $T : X \to \mathfrak{N}(X)$ را در نظر بگیرید. در این صورت

(الف) T را انقباض نوع نادلر (یا یک k-انقباض مجموعه-مقدار) گویند هرگاه ثابت $0 < k < 1$ موجود باشد به قسمی که برای هر x، $y \in X$،

$$\mathcal{H}(Tx, Ty) \leq kd(x, y).$$

(ب) T را انقباض نوع میزوگوچی-تاکاهاشی گویند هرگاه یک $\mathcal{MT}$-تابع $\alpha : [0, \infty) \to [0, 1)$ موجود باشد به قسمی که برای هر x، $y \in X$،

$$\mathcal{H}(Tx, Ty) \leq \alpha(d(x, y))d(x, y).$$

(ج) T را یک (θ, L)-انقباض تقریبی مجموعه-مقدار گویند هرگاه ثابت‌های $\theta \in (0, 1)$ و $L \geq 0$ موجود باشند به قسمی که برای هر x، $y \in X$،

$$\mathcal{H}(Tx, Ty) \leq \theta d(x, y) + Ld(y, Tx).$$

(د) T را انقباض نوع بریند-بریند (یا یک انقباض تقریبی مجموعه-مقدار تعمیم یافته) گویند هرگاه $\mathcal{MT}$-تابع $\alpha : [0,\infty) \to [0,1)$ و ثابت $L \geq 0$ موجود باشند به قسمی که برای هر $x, y \in X$،
$$\mathcal{H}(Tx,Ty) \leq \alpha(d(x,y))d(x,y) + Ld(y,Tx).$$

انقباض‌های نوع میزوگوچی-تاکاهاشی و بریند-بریند از انواع مطرح، در تحقیقات اخیر روی نظریه نقطه ثابت متری برای نگاشت‌های انقباضی می‌باشد.
کاملاً واضح است که هر انقباض نوع میزوگوچی-تاکاهاشی از نوع بریند-بریند نیز می‌باشد ($L = 0$).
مثال زیر نشان می‌دهد که یک انقباض نوع بریند-بریند در حالت کلی یک انقباض از نوع میزوگوچی-تاکاهاشی نیست .

مثال ۱۳.۲.۱. فرض کنید l^∞ فضای باناخ شامل همه‌ی دنباله‌های حقیقی و کراندار با سوپریمم نرم d_∞ و پایه‌ی کانونی $\{e_n\}$ باشد. فرض کنید $\{\tau_n\}$ دنباله‌ی اعداد حقیقی مثبت باشد که $\tau_0 = \tau_1$ و برای $n \geq 1$، $\tau_{n+1} < \tau_n$. (دنباله‌ی $\{\tau_n\}$ را به گونه‌ای اختیار می‌کنیم که $\tau_n \to 0$ و $\frac{\tau_{n+2}}{\tau_n} \to 0$ باشد. به عنوان مثال، فرض می‌کنیم $\tau_0 = \tau_1 = 1$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$ که $n \geq 1$، $\tau_n = \frac{1}{n!}$). دنباله‌ی نزولی $\{\tau_n\}$ از اعدادحقیقی مثبت، کراندار و در نتیجه همگراست. برای هر $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$، $v_n = \tau_n e_n$ در نظر می‌گیریم (فرض می‌کنیم $v_0 = 0$).
اگر $X = \{v_n\}_{n=0}^\infty$ در نظر بگیریم، آن‌گاه X یک زیر مجموعه‌ی کامل و کراندار از l^∞ خواهد بود. در واقع، چون $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = 0$ و $\{e_n\}$ کراندار، پس $v_n = \tau_n e_n \to 0$ و در نتیجه $\|v_n\| = \tau_n \to 0$. پس وقتی $0 \in X$، در این حالت X بسته خواهد بود. (همان طور که ما در اینجا این فرض را در نظر گرفتیم که $X = \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$ و $v_0 = 0$).
بنابراین (X, d_∞) یک فضای متری کامل است که وقتی $m > n$، $d_\infty(v_n, v_m) = \tau_n$ در نظر می‌گیریم.
نگاشت مجموعه-مقدار $T : X \to \mathfrak{CB}(X)$ را به صورت
$$Tv_n = \begin{cases} \{v_0, v_1\} & n \in \{0,1\} \ , \\ X \setminus \{v_1, \ldots v_{n+1}\} & n \geq 2 \ . \end{cases}$$
و تابع $\varphi : [0,\infty) \to [0,1)$ را به صورت
$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{\tau_{n+2}}{\tau_n} & t = \tau_n \ , \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$
تعریف می‌کنیم. در این صورت شرایط زیر برقرارند:

(الف) T انقباض نوع بریند-بریند است.

(ب) T انقباض نوع میزوگوچی-تاکاهاشی نیست.

ابتدا ملاحظه می‌کنید که برای هر $t \in [0,\infty)$،
$$\limsup_{s\to t^+} \varphi(s) = \limsup_{s\to \tau^+} \varphi(s) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\tau_{n+2}}{\tau_n} = 0 < 1,$$

یعنی φ یک $\mathcal{MT}$-تابع است. برای هر $m \geq ۲$ داریم:

$$\mathcal{H}_\infty(Tv_۰, Tv_m) = \tau_۰ > \tau_۲ = \varphi(d_\infty(v_۰, v_m))d_\infty(v_۰, v_m),$$

که $\mathcal{H}_\infty$ متر هاوسدورف القا شده به‌وسیله‌ی d_∞ می‌باشد.

در واقع، چون $d_\infty(v_۰, v_m) = \tau_۰$ پس $\varphi(d_\infty(v_۰, v_m)) = \frac{\tau_۲}{\tau_۰}$ و بنابراین $\varphi(d_\infty(v_۰, v_m))d_\infty(v_۰, v_m) = \tau_۲$.
از طرفی

$$\mathcal{H}_\infty(Tv_۰, Tv_m) = \max\{\sup_{z \in Tv_m} d_\infty(z, Tv_۰), \sup_{z \in Tv_۰} d_\infty(z, Tv_m)\},$$

اگر $z \in Tv_۰ = \{v_۰, v_۱\}$، آن‌گاه $d_\infty(v_۰, Tv_m) = d_\infty(v_۱, Tv_m) = \tau_۰ = \tau_۱$. بنابراین

$$d_\infty(z, Tv_m) = \tau_۰ = \tau_۱.$$

برای هر $m \geq ۲$، اگر $z \in Tv_m = \{v_{m+۲}, v_{m+۳}, \dots\}$، آن‌گاه $d_\infty(z, v_۰) = d_\infty(z, v_۱) = \tau_۰ = \tau_۱$. بنابراین

$$d_\infty(z, Tv_۰) = \inf_{w \in Tv_۰} d_\infty(z, w) = \tau_۰ = \tau_۱.$$

لذا $\mathcal{H}_\infty(Tv_۰, Tv_m) = \tau_۰ = \tau_۱$. پس در واقع برای $m \geq ۲$،

$$\mathcal{H}_\infty(Tv_۰, Tv_m) > \varphi(d_\infty(v_۰, v_m))d_\infty(v_۰, v_m),$$

نشان می‌دهد، T انقباض نوع میزوگوچی-تاکاهاشی نیست.

ادعا می‌کنیم T یک انقباض نوع برایند-برایند با $L \geq ۱$ می‌باشد. یعنی برای هر x، $y \in X$،

$$\mathcal{H}_\infty(Tx, Ty) \leq \varphi(d_\infty(x, y))d_\infty(x, y) + Ld_\infty(y, Tx).$$

ما ۴ حالت ممکن را بررسی می‌کنیم.

(۱) $\varphi(d_\infty(v_۰, v_۱))d_\infty(v_۰, v_۱) + Ld_\infty(v_۱, Tv_۰) = \tau_۲ > ۰ = \mathcal{H}_\infty(Tv_۰, Tv_۱).$

زیرا، $d_\infty(v_۰, v_۱) = \tau_۰$ پس $\varphi(d_\infty(v_۰, v_۱)) = \frac{\tau_۲}{\tau_۰}$ و بنابراین $\varphi(d_\infty(v_۰, v_۱))d_\infty(v_۰, v_۱) = \tau_۲$. همچنین $v_۱ \in Tv_۰ = \{v_۰, v_۱\}$ و $v_۰ = v_۱$، لذا $d_\infty(v_۱, Tv_۰) = ۰$. از طرفی $Tv_۰ = Tv_۱$، پس $\mathcal{H}_\infty(Tv_۰, Tv_۱) = ۰$.

(۲) برای $m \geq ۲$:

$$\varphi(d_\infty(v_۰, v_m))d_\infty(v_۰, v_m) + Ld_\infty(v_m, Tv_۰) = \tau_۲ + L\tau_۱ > \tau_۰ = \mathcal{H}_\infty(Tv_۰, Tv_m).$$

زیرا، $d_\infty(v_۰, v_m) = \tau_۰$ پس $\varphi(d_\infty(v_۰, v_m)) = \frac{\tau_۲}{\tau_۰}$ و بنابراین $\varphi(d_\infty(v_۰, v_m))d_\infty(v_۰, v_m) = \tau_۲$.
اگر $u \in Tv_۰ = \{v_۰, v_۱\}$، آن‌گاه چون $d_\infty(v_m, v_۰) = d_\infty(v_m, v_۱) = \tau_۰ = \tau_۱$ بنابراین

$$d_\infty(v_m, Tv_۰) = \inf_{u \in Tv_۰} d_\infty(v_m, u) = \tau_۰ = \tau_۱.$$

(۳) برای $m \geq ۲$:

$$\varphi(d_\infty(v_۱, v_m))d_\infty(v_۱, v_m) + Ld_\infty(v_m, Tv_۱) = \tau_۳ + L\tau_۱ > \tau_۱ = \mathcal{H}_\infty(Tv_۱, Tv_m).$$

زیرا، $d_\infty(v_۱, v_m) = \tau_۱$ پس $\varphi(d_\infty(v_۱, v_m)) = \frac{\tau_۳}{\tau_۱}$ و بنابراین $\varphi(d_\infty(v_۱, v_m))d_\infty(v_۱, v_m) = \tau_۳$.
از طرفی چون $Tv_۰ = Tv_۱$، مشابه آنچه در قسمت‌های قبل ثابت کردیم، $d_\infty(v_m, Tv_۱) = \tau_۱$ و $\mathcal{H}_\infty(Tv_۱, Tv_m) = \tau_۱ = \tau_۰$.

(۴) برای $m > n \geq ۲$:

$$\varphi(d_\infty(v_n, v_m))d_\infty(v_n, v_m) + Ld_\infty(v_m, Tv_n) = \tau_{n+۲} = \mathcal{H}_\infty(Tv_n, Tv_m).$$

زیرا برای $m > n \geq ۲$ ، $d_\infty(v_n, v_m) = \tau_n$ پس $\varphi(d_\infty(v_n, v_m)) = \frac{\tau_{n+۲}}{\tau_n}$ و بنابراین

$$\varphi(d_\infty(v_n, v_m))d_\infty(v_n, v_m) = \tau_{n+۲}.$$

چون برای $m > n + ۱$، $v_m \in Tv_n$ بنابراین $d_\infty(v_m, Tv_n) = ۰$. از طرفی

$$\mathcal{H}_\infty(Tv_n, Tv_m) = \max\{\sup_{z \in Tv_m} d_\infty(z, Tv_n), \sup_{z \in Tv_n} d_\infty(z, Tv_m)\},$$

پس اگر $z \in Tv_n = \{v_{n+۲}, v_{n+۳}, \ldots\}$، آن‌گاه $d_\infty(z, Tv_m) = \inf_{u \in Tv_m} d_\infty(z, u) = \tau_{n+۲}$. به همین ترتیب برای $m > n$، اگر $z \in Tv_m = \{v_{m+۲}, v_{m+۳}, \ldots\}$، آن‌گاه $d_\infty(z, Tv_n) = \inf_{u \in Tv_n} d_\infty(z, u) = \tau_{n+۲}$.
بنابراین $\mathcal{H}_\infty(Tv_n, Tv_m) = \tau_{n+۲}$.

در نتیجه طبق موارد (۱)-(۴) ثابت می‌شود T یک انقباض نوع برایند-برایند است.

فصل ۲

$\mathcal{MT}$-توابع و چند گسترش از مفهوم متر

در بخش اول این فصل، به بیان ویژگی‌های $\mathcal{MT}$-توابع یا نگاشت‌های صادق در شرط میزوگوچی-تاکاهاشی می‌پردازیم و نتایجی که به تازگی توسط دو [1] برای این نگاشت‌ها به دست آمده است را ارائه می‌کنیم. با شناخت این خواص، در فصل‌های بعدی قضایای نقطه ثابت جدید برای $\mathcal{MT}$-توابع اثبات می‌کنیم. در بخش دوم، قضایای نقطه ثابت در فضاهای متری کامل که اصل انقباضی باناخ را گسترش می‌دهند، بیان می‌کنیم. در نهایت در بخش سوم، به معرفی τ-تابع و τ°-متر که گسترشی از مفهوم متر روی یک مجموعه و خانوده‌ای از مجموعه‌ها هستند، می‌پردازیم.

۱.۲ $\mathcal{MT}$-توابع

یادآوری می‌کنیم که تابع $\varphi : [\circ,\infty) \to [\circ,۱)$ را یک $\mathcal{MT}$-تابع گویند هرگاه برای هر $t \in [\circ,\infty)$،

$$\limsup_{s\to t^+} \varphi(s) < ۱.$$

واضح است که اگر $\varphi : [\circ,\infty) \to [\circ,۱)$ یک تابع صعودی یا نزولی باشد، آن‌گاه φ یک $\mathcal{MT}$-تابع خواهد بود. در واقع، اگر φ یک تابع صعودی باشد که $t < t_۱$، آن‌گاه برای $t \le s \le t_۱$، $\varphi(s) \le \varphi(t_۱)$. بنابراین

$$\limsup_{s\to t^+} \varphi(s) \le \varphi(t_۱) < ۱.$$

و هرگاه φ یک تابع نزولی باشد، اگر $t_۱ \le s$، آن‌گاه $\varphi(s) \le \varphi(t_۱)$ و بنابراین

$$\limsup_{s\to t^+} \varphi(s) \le \varphi(t_۱) < ۱.$$

---
1. Du

همچنین اگر برای $c \in [۰, ۱)$، $\varphi(t) = c$ در نظر بگیریم، آن‌گاه φ یک $\mathcal{MT}$-تابع است. بنابراین مجموعه‌ی $\mathcal{MT}$-توابع یک دسته‌ی غنی خواهد بود. اما توابعی وجود دارد که $\mathcal{MT}$ -تابع نیستند.

مثال ۱.۱.۲. [۱۱] فرض کنیم $\varphi : [۰, \infty) \to [۰, ۱)$ به صورت

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & t \in [۰, \frac{\pi}{۲}) \,, \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

تعریف شود. چون $\limsup_{s \to ۰^+} \varphi(s) = ۱$، بنابراین φ یک $\mathcal{MT}$-تابع نیست.

تعریف ۲.۱.۲. [۱۰] تابع $\varphi : [۰, \infty) \to [۰, ۱)$ را یک تابع عامل انقباض گویند هرگاه برای هر دنباله‌ی اکیداً نزولی $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ در $[۰, \infty)$،

$$۰ \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \varphi(x_n) < ۱.$$

به تازگی دو خواص $\mathcal{MT}$-توابع را بررسی کرده و در قضیه‌ی زیر این ویژگی‌ها را اثبات کرده است. با به کار بردن خواص $\mathcal{MT}$-توابع، می‌توانیم قضایای جدیدی برای وجود نقاط ثابت و انطباق در فضاهای متری کامل اثبات کنیم.

قضیه ۳.۱.۲. [۱۱]**(دو)** *فرض کنید $\varphi : [۰, \infty) \to [۰, ۱)$ یک تابع باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:*

(۱) *φ یک $\mathcal{MT}$-تابع است.*

(۲) *برای هر $t \in [۰, \infty)$، $r_t^{(۱)} \in [۰, ۱)$ و $\varepsilon_t^{(۱)} > ۰$ موجودند به قسمی که برای هر $s \in (t, t + \varepsilon_t^{(۱)})$، $\varphi(s) \leq r_t^{(۱)}$.*

(۳) *برای هر $t \in [۰, \infty)$، $r_t^{(۲)} \in [۰, ۱)$ و $\varepsilon_t^{(۲)} > ۰$ موجودند به قسمی که برای هر $s \in [t, t + \varepsilon_t^{(۲)}]$، $\varphi(s) \leq r_t^{(۲)}$.*

(۴) *برای هر $t \in [۰, \infty)$، $r_t^{(۳)} \in [۰, ۱)$ و $\varepsilon_t^{(۳)} > ۰$ موجودند به قسمی که برای هر $s \in (t, t + \varepsilon_t^{(۳)}]$، $\varphi(s) \leq r_t^{(۳)}$.*

(۵) *برای هر $t \in [۰, \infty)$، $r_t^{(۴)} \in [۰, ۱)$ و $\varepsilon_t^{(۴)} > ۰$ موجودند به قسمی که برای هر $s \in [t, t + \varepsilon_t^{(۴)})$، $\varphi(s) \leq r_t^{(۴)}$.*

(۶) *برای هر دنباله‌ی نزولی $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ در $[۰, \infty)$، $۰ \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \varphi(x_n) < ۱$.*

(۷) *φ یک تابع عامل انقباض می‌باشد.*

برهان.

(۱) $\Rightarrow$ (۲) فرض کنیم φ یک $\mathcal{MT}$-تابع باشد. یعنی برای هر $t \in [۰, \infty)$، $\limsup_{s \to t^+} \varphi(s) < ۱$. پس

$$\inf_{\varepsilon > ۰} \sup_{۰ < s - t < \varepsilon} \varphi(s) < ۱,$$