چکیده

در این پایان نامه در ابتدا رده‌ی مهمی از توابع را که p -تابع می‌نامیم، مشخص نموده و قضایای جدیدی در نظریه‌ی نقطه ثابت و انطباق در فضاهای متریک تام بدست آورده و نشان می‌دهیم که خود تعمیمی از قضایای نقطه ثابت نادلر،برایند-برایند، میزوگوچی-تاکاهاشی و دو می‌باشد.

مثال‌های مهم و غیر بدیهی از نگاشت‌های غیر خطی و چند-مقداری در رابطه با نتایج جدید بدست آمده ارائه می‌نماییم.

در ادامه مسئله‌ی شمول انتگرال نامحدب را در نظر گرفته و صورت دیگری از قضیه‌ی فیلیپوف[1]، را با استفاده از نرمی مناسب تعریف شده بر قضایای انتخاب یک تابع
چند-مقداری و انقباض چند-مقداری برای نگاشت‌های مجموعه مقداری بدست می‌آوریم.

---

[1] Filippov

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف اولیه

۱-۱ مقدمه وتاریخچه

فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد. در سال [۱۹۲۲] باناخ[۱] [۱]، قضیه معروف نقطه ثابت نگاشت انقباضی را ثابت نمود. بدین صورت که اگر $T : X \to X$ در شرط زیر صدق کند.

$$\exists\, k \in [0,1) \ ; d\,(Tx,Ty) \leq kd\,(x,y) \qquad \forall x,y \in X$$

و اگر (X,d) تام باشد، آن‌گاه نقطه منحصر به فرد $x_0 \in X$ وجود دارد به طوری‌که

$$.\ T\,(x_0) = x_0$$

قضیه نقطه ثابت باناخ دارای کاربردهای فراوان از جمله وجود و یکتایی جواب مسائل غیر خطی در ریاضیات و مهندسی و علوم طبیعی می‌باشد [۱۱، ۱۸، ۱۵، ۱۶] درسال [۱۹۶۹] نادلر[۲] [۳]، اصل انقباض باناخ را برای نگاشت‌های مجموعه-مقداری به صورت زیر معرفی نمود.

$$.\ \exists\, \alpha \in [0,1) ; H\,(Tx,Ty) \leq \alpha d\,(x,y) \qquad \forall x,y \in X$$

---

[۱] Banach

[۲] Nadler

که در آن H متریک هاسدورف و به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$H\left(Tx,Ty\right)=\max\left\{\sup_{b\in Ty}d\left(b,Tx\right),\sup_{a\in Tx}d\left(a,Ty\right)\right\}.$$

نادلر قضیه وجودی نقطه ثابت برای نگاشت‌های چند-مقداری $T:X\rightarrow CB\left(X\right)$ را ثابت نمود که در آن

$CB\left(X\right)=\left\{A\subseteq X:\text{ ناتهی بسته و کراندار است } A\right\}.$

در اینجا نقطه $x_\circ\in X$ را نقطه ثابت T می‌نامیم هرگاه $x_\circ\in T\left(x_\circ\right)$.

در سال [۱۹۷۲]، چترجی [۳] [۴]، نگاشت $T:X\rightarrow CB\left(X\right)$ را به صورت زیر معرفی نمود، $\alpha\in\left(\circ,\frac{1}{2}\right)$ وجود دارد به طوری‌که

$$d\left(Tx,Ty\right)\leq\alpha\left(d\left(x,Ty\right)+d\left(y,Tx\right)\right)\qquad\forall x,y\in X.$$

نظریه نقطه ثابت برای نگاشت‌های چند-مقداری توسط محققین دیگری از جمله رایخ [۴] [۵]، برایند-برایند [۵] [۶]، میزوگوچی-تاکاهاشی [۶] [۷] و دو [۷] [۸] به صورت های مختلف گسترش داده شد.

در این پایان‌نامه، ابتدا مفهوم $\mathcal{P}$-توابع را بررسی نموده و با استفاده از آن قضایای نقطه ثابت و انطباق برای نگاشت‌های چند-مقداری را تعمیم داده و سپس با ارائه مثال‌های غیربدیهی تفاوت این نتایج را با نتایج از قبل ثابت شده نشان می‌دهیم.

درفصل آخر پایان‌نامه، کاربردهایی از قضایای بدست آمده را در خصوص مسئله‌ی شمول انتگرال نامحدب مورد بررسی قرار می‌دهیم.

این پایان‌نامه براساس مقاله‌ی [۱۷] می‌باشد،

و بسیاری از نتایج بدست آمده در[۹، ۱۰، ۱۲، ۱۳، ۱۴] را گسترش می‌دهد.

---

[۳] Chaterjea

[۴] Reich

[۵] Berinde-Berinde

[۶] Mizoguchi-Takahashi

[۷] Du

۱-۲ تعاریف و پیش‌نیازها

تعریف ۱-۲-۱. فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی باشد، که عناصرش مانند $x \in X$ است، آن‌گاه تابع $d : X \times X \to \mathbb{R}$ را یک متر بر X گوییم هرگاه،

۱: به ازای هر، $x, y \in X$، $d(x,y) = 0 \leftrightarrow x = y$, $d(x,y) \geq 0$،

۲: $d(x,y) = d(y,x)$،

۳: به ازای هر، $x, y, z \in X$، $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

آن‌گاه (X,d) را یک فضای متریک گویند.

تعریف ۱-۲-۲. فرض کنید X یک فضای متریک باشد و $A \subseteq X$، گوییم مجموعه A کراندار است هرگاه عدد حقیقی چون $M > 0$ و نقطه‌ای مانند $q \in X$ موجود باشد به طوری‌که به ازای هر $p \in A$، $d(p,q) < M$.

تعریف ۱-۲-۳. دنباله‌ی $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ در فضای متریک (X,d) به نقطه $x \in X$ همگراست، هرگاه:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_0 \in \mathbb{N}\ ;\ \forall\, n \geq N_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$$

و می‌نویسیم $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ یا $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

تعریف ۱-۲-۴. دنباله‌ی $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ در فضای متریک (X,d) را کوشی می‌نامیم، هرگاه:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_0 \in \mathbb{N}\ ;\ \forall\, n, m \geq N_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

مثال ۱-۲-۵. فرض کنیم:

$$X = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

به ازای هر $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ تعریف می‌کنیم:

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad d(x,y) = \|x - y\|_2 \quad \forall x, y \in X$$

آن‌گاه (X,d) یک فضای متریک تام است (جزئیات در مرجع [۱۹] آمده است).

دنباله‌ی $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ را در X به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$z_k = \{x_{n,k}\}_{n=1}^{\infty} \quad , \quad k \in \mathbb{N} \quad ; \quad x_{n,k} = \frac{1}{nk} \quad , n,k \in \mathbb{N}$$

نشان می‌دهیم که دنباله‌ی $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ همگراست.

$$\begin{aligned} \|z_k - z_m\|_2^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_{n,k} - x_{n,m}|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{nk} - \frac{1}{nm}\right|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{k} - \frac{1}{m}\right|^2 \frac{1}{n^2} \\ &= \left|\frac{1}{k} - \frac{1}{m}\right|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{\pi^2}{6}\left|\frac{1}{k} - \frac{1}{m}\right|^2 \end{aligned}$$

بنابراین دنباله‌ی $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ در $l^2(\mathbb{N})$ کوشی بوده و چون $l^2(\mathbb{N})$ نسبت به نرم $\|.\|_2$ تام است لذا دنباله‌ی $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ در $l^2(\mathbb{N})$ همگراست. در واقع $\lim\limits_{k\to\infty} \|z_k - 0\|_2 = 0$ زیرا:

$$\begin{aligned} \|z_k - 0\|_2^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_{n,k} - 0|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{nk} - 0\right|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 n^2} \\ &= \frac{1}{k^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{k^2}\frac{\pi^2}{6} \to 0 \quad (k \to \infty) \end{aligned}$$

تبصره ۱-۲-۶. *هر دنباله‌ی همگرا در فضای متریک، کوشی است ولی عکس آن لزوما برقرار نیست. زیرا با فرض $X = (0,1)$ و $d(x,y) = |x-y|$ و $z_k = \frac{1}{k}$ آن‌گاه $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ در X کوشی است ولی همگرا نیست. زیرا $z_k \to 0$ اما $0 \notin X$.*

تعریف ۱-۲-۷. فضای متریک (X,d) کامل نامیده می‌شود اگر و تنها اگر هر دنباله‌ی کوشی در X همگرا به یک نقطه در X باشد.

تعریف ۱-۲-۸. فضای برداری X را یک فضای خطی نرمدار گوییم هرگاه به ازای هر $x \in X$، عدد حقیقی و نامنفی $\|x\|$ به نام (نرم x) وجود داشته باشد به طوری‌که به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ و $x,y \in X$، شرایط زیر برقرار باشد.

۱: $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$،

۲: $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$،

۳: $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

تبصره ۱-۲-۹. *هر فضای خطی نرمدار X را می‌توان به عنوان یک فضای متری در نظر گرفت به طوری‌که متر d در X به صورت زیر در نظر گرفته شود.*

$$d\left(x,y\right)=\|x-y\|$$

تعریف ۱-۲-۱۰. فضای نرمدار X را یک فضای باناخ گوییم هرگاه با نرم القا شده توسط متر آن فضای متریک کامل گردد، به عبارت دیگر هر دنباله‌ی کوشی در این فضا همگرا باشد.

مثال ۱-۲-۱۱. کلیه فضاهای هیلبرت، فضاهای توابع مشتق‌پذیر، فضاهای l_1، $l_\infty(\mathbb{N})$ باناخ‌اند.

تعریف ۱-۲-۱۲. فضای باناخ X را تفکیک‌پذیر گوییم هرگاه زیر مجموعه شمارای $A\subseteq X$ وجود داشته باشد به طوری‌که $\bar{A}=X$.

تعریف ۱-۲-۱۳. فرض کنید A زیر مجموعه‌ای از فضای متریک X باشد. در این صورت A را محدب گوییم هرگاه برای هر $x,y\in A$ و $0\leq t\leq 1$ داشته باشیم:

$$tx+\left(1-t\right)y\in A.$$

تعریف ۱-۲-۱۴. اگر (X,d) یک فضای متریک باشد، آن‌گاه تابع فاصله بین هر نقطه از X و هر مجموعه ناتهی Y از X به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$d\left(x,Y\right)=\inf_{y\in Y}d\left(x,y\right)$$

تعریف ۱-۲-۱۵. اگر (X,d) یک فضای متریک باشد، آن‌گاه تابع فاصله بین دو مجموعه ناتهی A,B از X به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$d\left(A,B\right)=\sup_{x\in A}d\left(x,B\right)$$

که در آن $d\left(x,B\right)$ فاصله نقطه x از مجموعه ناتهی B را نشان می‌دهد.

فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد، قرارمی‌دهیم:

$N\left(X\right)=\{A\subseteq X : A\neq\phi\}$،

$CB\left(X\right)=\left\{A\subseteq X : \text{بسته و کراندار است } A\neq\phi\right\}$،

$K\left(X\right)=\{A\subseteq X : \text{و فشرده باشد } A\neq\phi\}$.

به ازای هر $A, B \in CB\left(X\right)$، نگاشت H را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H : CB\left(X\right) \times CB\left(X\right) \to \mathbb{R}$$
$$H\left(A, B\right) = \max\left\{\sup_{x\in B} d\left(x, A\right), \sup_{y\in A} d\left(y, B\right)\right\}.$$

که در آن $d\left(x, A\right) = \inf_{y\in A} d\left(x, y\right)$.
نگاشت H متریک هاسدورف القاشده نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۲-۱۶. فرض کنیم $f, g : X \to X$ نگاشت‌های دلخواه و $T : X \to N\left(X\right)$ نگاشت چند-مقداری باشد،
نقطه $x \in X$ را نقطه انطباق f, g, T می‌نامیم هرگاه: $f\left(x\right) = g\left(x\right) \in T\left(x\right)$.
هم‌چنین اگر $x = f\left(x\right) = g\left(x\right) \in T\left(x\right)$ آن‌گاه x را نقطه ثابت T می‌نامیم . $\left(f = g = id\right)$
مجموعه نقاط ثابت و انطباق را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F\left(T\right) = \left\{x \in X : x \in T\left(x\right)\right\},$$
$$COP\left(f, g, T\right) = \left\{x \in X : f\left(x\right) = g\left(x\right) \in T\left(x\right)\right\}.$$

تعریف ۱-۲-۱۷. اگر X یک فضای متریک باشد، آن‌گاه $T : X \to 2^X$ را نگاشت چند-مقداری می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x \in X$ $\quad T\left(x\right) \neq \phi$.

تعریف ۱-۲-۱۸. نگاشت $T : X \to CB\left(X\right)$ را چند-مقداری انقباضی می‌نامیم هرگاه $0 < k < 1$ وجود داشته باشد به طوری‌که،

$$H\left(Tx, Ty\right) \leq kd\left(x, y\right) \qquad \forall x, y \in X.$$

تعریف ۱-۲-۱۹. اگر $\left(X, d\right)$ یک فضای متریک باشد، آن‌گاه نگاشت $S : X \to X$ را ناگسترشی می‌نامیم هرگاه،

$$d\left(Sx, Sy\right) \leq d\left(x, y\right) \qquad \forall x, y \in X.$$

مثال ۱-۲-۲۰. فرض کنید $C_0 = \left\{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C} : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\right\}$ و فرض کنید
$x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in C_0\ ,\ \|x\|_\infty = \sup_{n\geq 1}|x_n|$
آن‌گاه $\left(C_0, \|.\|_\infty\right)$ یک فضای باناخ است (تمرین ۱۰ آنالیز تابعی [۱۹]).
نگاشت $T : C_0 \to C_0$ را با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم:

$$T\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right)=\left(x_1, 1-|x_1|, x_2, x_3, \cdots\right)$$

آن‌گاه T یک نگاشت ناگسترشی می‌باشد.

زیرا به ازای هر $x, y \in C_0$ داریم:

$$\begin{aligned} Tx-Ty &= \left(x_1, 1-|x_1|, x_2, x_3 \cdots\right)-\left(y_1, 1-|y_1|, y_2, y_3 \cdots\right) \\ &= \left(x_1-y_1, |y_1|-|x_1|, x_2-y_2, x_3-y_3, \cdots\right) \end{aligned}$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} \|Tx-Ty\| &= \sup|Tx-Ty| \\ &= \sup\left\{|x_1-y_1|, ||y_1|-|x_1||, |x_2-y_2|, \cdots\right\} \\ &\leq \sup\left\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|, |x_3-y_3|, \cdots\right\} \\ &= \|x-y\|_{\infty} \end{aligned}$$

چون $x_n \to 0 \quad (n\to\infty)$، بنابراین اگر $Tx = x$ آن‌گاه $x_2 = x_3 = \cdots = 0$ و لذا $|x_1| = 1$ که در نتیجه $F(T) = \{e_1, -e_1\}$ که در آن $e_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0, \cdots)$ و $-e_1 = (-1, 0, 0, \cdots, 0, \cdots)$.

تعریف ۱-۲-۲۱. فرض کنید X مجموعه و $T : X \to X$ نگاشت باشد، آن‌گاه $A \subseteq X$ را T-پایا می‌نامیم هرگاه،

$$T(A) \subseteq A.$$

تعریف ۱-۲-۲۲. نگاشت $\varphi : (0,\infty) \to \left[0, \frac{1}{2}\right)$ را یک $\mathcal{P}$-تابع می‌نامیم اگر در شرط زیر صدق کند،

$$\limsup_{r\to t^+} \varphi(r) < \frac{1}{2} \qquad \forall t \in [0,\infty).$$

تعریف ۱-۲-۲۳. نگاشت $\varphi_{m\tau} : (0,\infty) \to [0,1)$ را $m\tau$-تابع می‌نامیم اگر در شرط میزوگوچی-تاکاهاشی صدق کند، یعنی:

$$\limsup_{r\to t^+} \varphi_{m\tau}(r) < 1 \qquad \forall t \in [0,\infty).$$

مثال ۱-۲-۲۴. اگر $\varphi : (0,\infty) \to [0, \frac{1}{2})$ یک $\mathcal{P}$ -تابع باشد، آن‌گاه نگاشت $\varphi_{m\tau} : (0,\infty) \to [0,1)$ با ضابطه زیر یک $m\tau$ -تابع است.

$$\varphi_{m\tau}(t) = 2\varphi(t).$$

یعنی هر $\mathcal{P}$ -تابع یک $m\tau$ -تابع است.

تعریف ۱-۲-۲۵. نگاشت $\varphi : (0,\infty) \to [0, \frac{1}{2})$ را یک تابع از ضریب نیمه-انقباضی می‌نامیم هرگاه در شرط زیر صدق کند،

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq [0,\infty) \ , \exists N_0 \in \mathbb{N} \, ; \forall n \geq N_0 \ , x_n < x_{n-1} \ , 0 \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi(x_n) < \tfrac{1}{2}.$$

مثال ۱-۲-۲۶. فرض کنید $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در $[0,\infty)$ باشد به طوری‌که،

$$x_n = \begin{cases} 2^n - 1, & \text{اگر } n \leq 5, \\ 1 - 2^n, & \text{اگر } n > 5. \end{cases}$$

تابع $\varphi : (0,\infty) \to [0, \frac{1}{2})$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{3+t}, & \text{اگر } 0 < t < 1, \\ \frac{1}{2} - \frac{t}{2^6}, & \text{اگر } 1 \leq t < 32, \\ 0. & \text{اگر } t \geq 32. \end{cases}$$

آن‌گاه به راحتی می‌توان نشان داد که φ یک $\mathcal{P}$ -تابع است. هم‌چنین φ یک تابع ضریب نیمه-انقباضی است. زیرا $\{x_n\}$ یک دنباله‌ی اکیدا نزولی است و در شرط زیر صدق می‌کند،

$$.0 \leq \sup \varphi_{n\in\mathbb{N}}(x_n) = \tfrac{31}{64} < \tfrac{1}{2}$$

تعریف ۱-۲-۲۷. فضای توپولوژی X را هاسدورف گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ دو همسایگی U, V به ترتیب حول x و y باشد که $U \cap V \neq \phi$.

تعریف ۱-۲-۲۸. فضای برداری توپولوژیک (TVS) فضای برداری مانند X به همراه یک توپولوژی است، به طوری‌که شرایط زیر برقرار باشد:

۱: نگاشت $X \times X \to X$ با ضابطه $(x,y) \mapsto x + y$ پیوسته باشد،

۲: نگاشت $F \times X \to X$ با ضابطه $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ پیوسته باشد.

فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیک و X^* فضای تابعک‌های خطی پیوسته بر X، باشد، که

$$X^* = \left\{\Lambda : X \to \mathbb{R} \quad : \quad \text{خطی و پیوسته است}\ \Lambda\right\}$$

و فرض کنید $\mathcal{M}$ یک σ -جبر بر مجموعه‌ی D باشد.
اگر $f : \mathcal{M} \to X$ یک نگاشت، آن‌گاه به ازای هر $\Lambda \in X^*$ تعریف می‌کنیم:

$$(\Lambda f)(A) = \Lambda(f(A)) \qquad (A \in \mathcal{M})$$

اگر $y \in X$ چنان باشد که:

$$\Lambda y = \int_D (\Lambda f)\, d\mu \qquad \forall \Lambda \in X^*،$$

آن‌گاه تعریف می‌کنیم:

$$\int_D f d\mu = y.$$

انتگرال فوق را انتگرال مقدار برداری نامیده و قرار می‌دهیم:

$$L^1(I, X) = \left\{f : \mathcal{M} \to X \mid \text{با نمادهای فوق انتگرال‌پذیر است}\ f\right\}$$

$L^1(I, X)$ را فضای تمام توابع انتگرال‌پذیر باخنر می‌نامند.

اندازه‌پذیری بر حاصل‌ضرب‌های دکارتی:

اگر X, Y دو مجموعه باشند، حاصل‌ضرب دکارتی $X \times Y$ آن‌ها مجموعه تمام جفت‌های مرتب (x, y) است که $x \in X$ و $y \in Y$.
اگر $A \subset X$ و $B \subset Y$ داریم، $A \times B \subset X \times Y$
هر مجموعه به شکل $A \times B$ را یک مستطیل در $X \times Y$ می‌نامیم.
حال فرض کنیم (X, g) و (Y, f) دو فضای اندازه‌پذیر باشند، که این یعنی g یک σ -جبر در X و f یک σ -جبر در Y است.
هر مستطیل اندازه‌پذیر مجموعه‌ای است به شکل $A \times B$ که در آن $A \in g$ و $B \in f$.

قضیه ۱-۲-۲۹. انتخاب اندازه‌پذیر: *فرض کنید X فضای متریک، (Ω, A) فضای اندازه‌پذیر، و $F : \Omega \to P(X)$، یک نگاشت باشد. فرض کنید روابط زیر برقرار باشند:*

۱: $F(\omega) \neq \phi$ *به ازای هر* $\omega \in \Omega$،

۲: $G_r(F) \in A \times B(X)$

آن‌گاه F دارای یک انتخاب اندازه‌پذیر است، یعنی نگاشتی مانند $f : \Omega \to X$ وجود دارد به طوری‌که $f(A)$ اندازه‌پذیر، و $f(\omega) \in F(\omega) \quad , \quad \forall \omega \in \Omega$ است.

تعریف ۱-۲-۳۰. تابع اندازه‌پذیر: تابع $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ اندازه‌پذیر است، هرگاه به ازای هر مجموعه‌ی باز $U \subseteq \mathbb{R}$ داشته باشیم $f^{-1}(U) \in \mathcal{M}$.

قضیه ۱-۲-۳۱. نادلر: *فرض کنید (X, d) یک فضای متریک تام، $T : X \to CB(X)$ یک نگاشت k-انقباضی باشد، فرض کنید رابطه زیر برقرار باشد،*

$$\forall x, y \in X \quad 0 < k < 1 \quad H(Tx, Ty) \leq kd(x, y)،$$

آن‌گاه

$$F(T) \neq \phi.$$

برهان. به مرجع [۳] مراجعه شود. □

قضیه ۱-۲-۳۲. برایند-برایند: *فرض کنید (X, d) یک فضای متریک تام، $T : X \to CB(X)$ یک نگاشت چند-مقداری، $\varphi_{m\tau} : (0, \infty) \to [0, 1)$ یک $m\tau$-تابع باشد و فرض کنید رابطه زیر برقرار باشد،*

$$x \neq y \quad , \forall x, y \in X \; , L > 0 \; , H(Tx, Ty) \leq \varphi_{m\tau}(d(x, y))\, d(x, y) + Ld(y, Tx)،$$

آن‌گاه

$$F(T) \neq \phi.$$

برهان. به مرجع [۵] مراجعه شود. □

قضیه ۱-۲-۳۳. رایخ: *فرض کنید (X,d) یک فضای متریک تام، $T : X \to K(X)$ یک نگاشت چند-مقداری، $\varphi_{m\tau} : (0,\infty) \to [0,1)$ یک $m\tau$-تابع باشد و فرض کنید رابطه زیر برقرار باشد،*

$$H\left(Tx,Ty\right) \leq \varphi_{m\tau}\left(d\left(x,y\right)\right)d\left(x,y\right) \qquad ,\forall x,y \in X \qquad ,x \neq y،$$

آن‌گاه

$$F\left(T\right) \neq \phi.$$

برهان. به مرجع [۴] مراجعه شود. □

قضیه ۱-۲-۳۴. میزوگوچی-تاکاهاشی: *فرض کنید (X,d) یک فضای متریک تام، $T : X \to CB(X)$ یک نگاشت چند-مقداری، $\varphi_{m\tau} : (0,\infty) \to [0,1)$ یک $m\tau$-تابع باشد و فرض کنید رابطه زیر برقرار باشد،*

$$H\left(Tx,Ty\right) \leq \varphi_{m\tau}\left(d\left(x,y\right)\right)d\left(x,y\right) \qquad ,\forall x,y \in X،$$

آن‌گاه

$$F\left(T\right) \neq \phi.$$

برهان. به مرجع [۶] مراجعه شود. □

قضیه ۱-۲-۳۵. دو: *فرض کنید (X,d) یک فضای متریک تام، $T : X \to CB(X)$ یک نگاشت چند-مقداری، $g : X \to X$، یک نگاشت پیوسته دلخواه و $\varphi_{m\tau} : (0,\infty) \to [0,1)$ یک $m\tau$-تابع باشد و فرض کنید روابط زیر برقرار باشند،*

الف: Tx مجموعه‌ی g-پایا است (یعنی $g\left(Tx\right) \subseteq Tx \quad ,\forall x \in X$)،

ب: تابع $h : X \to [0,\infty)$ وجود دارد به طوری‌که

$$H\left(Tx,Ty\right) \leq \varphi_{m\tau}\left(d\left(x,y\right)\right)d\left(x,y\right) + h\left(gy\right)d\left(gy,Tx\right) \qquad ,\forall x,y \in X،$$

آن‌گاه

$$COP\left(g,T\right) \cap F\left(T\right) \neq \phi.$$

برهان. به مرجع [۸] مراجعه شود. □

فصل ۲

قضایای نقطه ثابت و انطباق برای نگاشت‌های چند-مقداری

در این فصل ابتدا خواص $\mathcal{P}$ -توابع را بررسی نموده و تعمیمی از قضایای نادلر، برایند-برایند، رایخ، میزوگوچی-تاکاهاشی و دو، را بدست آورده و در پایان فصل مثال‌های مهم (غیربدیهی) در فضاهای باناخ $l^\infty(\mathbb{N})$ (غیربدیهی) ارائه می‌نماییم.

۲-۱ قضایای نقطه ثابت و انطباق برای نگاشت‌های چند-مقداری

لم ۲-۱-۱. *فرض کنید $\varphi : [0,1) \to [0, \frac{1}{2})$ یک تابع باشد، آن‌گاه عبارت‌های زیر معادلند.*

۱: φ یک $\mathcal{P}$ -تابع است،

۲: $\forall\, t \in [0,\infty),\ \exists\, r_t^{(1)} \in \left[0, \frac{1}{2}\right),\ \varepsilon_t^{(1)} > 0;\ \varphi(s) \le r_t^{(1)}\ \forall s \in \left(t, t+\varepsilon_t^{(1)}\right)$،

۳: $\forall\, t \in [0,\infty),\ \exists\, r_t^{(2)} \in \left[0, \frac{1}{2}\right),\ \varepsilon_t^{(2)} > 0;\ \varphi(s) \le r_t^{(2)}\ \forall s \in \left[t, t+\varepsilon_t^{(2)}\right]$،

۴: $\forall t\ \in [0,\infty),\ \exists\, r_t^{(3)} \in \left[0, \frac{1}{2}\right),\ \varepsilon_t^{(3)} > 0;\ \varphi(s) \le r_t^{(3)}\ \forall s \in \left(t, t+\varepsilon_t^{(3)}\right]$،

۵: $\forall\, t \in [0,\infty),\ \exists\, r_t^{(4)} \in \left[0, \frac{1}{2}\right),\ \varepsilon_t^{(4)} > 0;\ \varphi(s) \le r_t^{(4)}\ \forall s \in \left[t, t+\varepsilon_t^{(4)}\right)$،

۶: $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq [0,\infty),\ \exists\, N_0 \in \mathbb{N};\ \forall n \ge N_0, x_n < x_{n-1},$

$0 \le \sup \varphi_{n\in\mathbb{N}}(x_n) < \frac{1}{2}$ ،

۷: φ یک تابع ضریب نیمه-انقباضی است.

برهان. ثابت می‌کنیم ۲ $\Leftrightarrow$ ۱،

فرض کنیم رابطه (۱) برقرار باشد، یعنی φ یک $\mathcal{P}$ -تابع است،

$$\left(\varphi : (0,\infty) \to \left[0, \tfrac{1}{2}\right);\ \lim_{s\to t^+} \sup \varphi(s) < \tfrac{1}{2}\ , \forall\, t \in [0,\infty)\right)$$

آن‌گاه،

$$\forall\, t \in [0,\infty),\ \exists\, \varepsilon_t > 0;\ \sup\nolimits_{t<s<t+\varepsilon_t} \varphi(s) < \tfrac{1}{2}$$

از طرفی از خاصیت چگال بودن اعداد گویا و اصم در $\mathbb{R}$ داریم:

$$\exists\, r_t \in [\circ, \infty)\,; \qquad \sup \varphi(s) \le r_t < \tfrac{۱}{۲}$$
$$\Rightarrow \varphi(s) \le r_t, \qquad \forall s \in (t, t+\varepsilon_t)$$

در نتیجه رابطه ۲ برقرار است.

اثبات ۱ $\Rightarrow$ ۲ واضح است.

ثابت می‌کنیم ۳ $\Leftrightarrow$ ۲،

اثبات ۲ $\Rightarrow$ ۳ واضح است (با فرض $\varepsilon_t^{(۱)} := \varepsilon_t^{(۲)}$ ، $r_t^{(۱)} := r_t^{(۲)}$).

اثبات ۳ $\Rightarrow$ ۲ :

فرض کنیم $t \in [\circ, \infty)$ داده شده باشد، بنابراین طبق فرض داریم:

$$\forall\, t \in [\circ, \infty)\,, \quad \exists\, r_t^{(۱)} \in \left[\circ, \tfrac{۱}{۲}\right), \quad \varepsilon_t^{(۱)} > \circ\;;$$
$$\varphi(s) \le r_t^{(۱)} \quad \forall s \in \left(t, t+\varepsilon_t^{(۱)}\right)،$$

قرار می‌دهیم:

$$\varepsilon_t^{(۲)} = \varepsilon_t^{(۱)}, \qquad r_t^{(۲)} = \max\left\{r_t^{(۱)}, \varphi(t), \varphi\left(t, t+\varepsilon_t^{(۱)}\right)\right\}.$$

درنتیجه

$$r_t^{(۲)} \in \left[\circ, \tfrac{۱}{۲}\right), \qquad \varphi(s) \le r_t^{(۲)} \quad \forall s \in \left[t, t+\varepsilon_t^{(۲)}\right].$$

استلزام‌های ۲ $\Rightarrow$ ۴ $\Rightarrow$ ۳ و۲ $\Rightarrow$ ۵ $\Rightarrow$ ۳ به وضوح قابل اثبات می‌باشند.

اثبات ۶ $\Rightarrow$ ۵ :

فرض کنیم رابطه ۵ برقرار باشد،

دنباله‌ی نزولی $\{x_n\}$ در $[\circ, \infty)$ را در نظر می‌گیریم،

فرض کنیم

$$t_\circ := \lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n$$

با استفاده از فرض داریم:

$$\exists\, r_{t_\circ} \in \left[\circ, \tfrac{۱}{۲}\right), \qquad \varepsilon_t > \circ; \qquad \varphi(s) \le r_{t_\circ}, \qquad \forall s \in [t_\circ, t_\circ + \varepsilon_{t^\circ})$$