

فهرست مطالب

ی	فهرست تصاویر
۱	فهرست جداول
۲	۱ آشنایی
۳	۱.۱ اهمیت موضوع
۳	۲.۱ پیشینه موضوع
۱۰	۳.۱ فصول پایان نامه
۱۲	۲ مفاهیم و تعاریف مقدماتی
۱۳	۱.۲ بخش الف: نمایش اندیسی
۱۳	۱.۱.۲ قرارداد جمع؛ اندیس های ظاهری
۱۴	۲.۱.۲ دلتای کرونگر
۱۶	۲.۲ بخش ب: تانسور
۱۶	۱.۲.۲ مؤلفه های تانسور
۱۷	۲.۲.۲ مؤلفه های بردار تبدیل یافته
۱۹	۳.۲.۲ جمع تانسورها
۱۹	۴.۲.۲ ضرب دو تانسور
۲۱	۵.۲.۲ ترانهاد تانسور
۲۲	۶.۲.۲ ضرب دیادیک بردارها
۲۳	۷.۲.۲ رد تانسور
۲۳	۸.۲.۲ تانسور همانی و وارون تانسور
۲۴	۹.۲.۲ تانسور متعامد

۲۵	قانون تبدیل مؤلفه های دکارتی تانسور	۱۰.۲.۲
۲۶	بردار ویژه و مقدار ویژه	۱۱.۲.۲
۲۸	مقادیر اصلی و راستاهای اصلی تانسور متقارن حقیقی	۱۲.۲.۲
۲۹	بخش ج: مختصات منحنی الخط	۳.۲
۲۹	مختصات قطبی	۱.۳.۲
۳۴	مختصات استوانه‌ای	۲.۳.۲
۳۷	معادلات حاکم بر مواد کشسان	۳
۳۷	مقدمه	۱.۳
۳۸	تنش و کرنش	۲.۳
۴۰	مدل سازی رفتار الاستیک	۳.۳
۴۳	خانواده‌ی توابع انرژی-کرنش	۴.۳
۴۴	معادلات پایه‌ای برای تغییر شکل های کرنش صفحه‌ای	۵.۳
۴۸	تحلیل خمش محدود سطوح صاف الاستیکی استوانه‌ی توخالی از جنس مونی-ریولین	۴
۴۹	مقدمه	۱.۴
۵۰	معادلات اصلی برای تغییر شکل سطوح صاف	۲.۴
۵۳	وارونگی بخش استوانه‌ای شکل در ماده مونی-ریولین	۳.۴
۵۵	نتایج عددی برای ماده مونی-ریولین	۴.۴
۵۸	نتیجه‌گیری	۵.۴
۵۹	پیشنهادات	۶.۴
۶۰	مراجع	
۶۳	آ ضمیمه	
۶۴	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	

فهرست تصاویر

۷	تماس دو نقطه‌ای	۱.۱
۷	تماس یک نقطه‌ای	۲.۱
۳۰	مختصات قطبی (r, θ)	۱.۲
۳۰	بردارهای پایه ی یکه ی e_r و e_θ	۲.۲
۳۸	تغییر شکل یک میله نازک	۱.۳
۳۹	یک منحنی عادی از کشش در بساری از مواد به جز الاستیک	۲.۳
۴۰	منحنی عادی از کشش در ماده الاستیکی	۳.۳
۴۲	کرنش همگن (a) تغییر شکل نیافته (b) تغییر شکل یافته	۴.۳
	تفاوت نیروی f در نقاط بدون فشار، با ازدیاد y در فشار دو محور برابر، جهت مواد وارگا، وارگای اصلاح شده، مونی-ریولین و نیو هوکان در مقایسه با داده تجربی ریولین و ساندرز	۵.۳
۴۴		
۵۳	نیرو و برآیند گشتاور جایگزین جسم تغییر شکل نیافته است $(U = V + 2S)$	۱.۴
۵۵	تغییرات M نسبت به k^*	۲.۴
	تغییر شکل واقعی برای ماده مونی-ریولین در $\frac{B}{A} = 1/2$ حالت (a): تغییر شکل نیافته	۳.۴
۵۷	(b): تغییر شکل یافته	
	تغییر شکل واقعی برای ماده مونی-ریولین در $\frac{B}{A} = 1/4$ حالت (a): تغییر شکل نیافته	۴.۴
۵۸	(b): تغییر شکل یافته	

فهرست جداول

۱.۴ مقادیر α ، k^* و p_0 برای مقادیر مختلف $\frac{B}{A}$ ۵۷

فصل ۱

آشنایی

۱.۱ اهمیت موضوع

مواد الاستیکی قابلیت تغییر شکل بالایی دارند و هم‌چنین این قابلیت را دارند تا وقتی فشار وارد شده از روی آن‌ها برداشته شد به شکل و حالت اولیه بازگردند. چنین موادی را که دارای خواص فیزیکی هم‌سان، همگن، تراکم‌ناپذیر باشند را مواد کشسان می‌نامند. نظریه چند بعدی مواد کشسان، شکل‌دهی محدود این مواد را ممکن می‌سازد به این معنا که طبق محاسبات ریاضی هیچ‌گونه تغییر شکل که موجب تغییر ماهیت یا تغییر شکل آن می‌شود را امکان‌پذیر نمی‌سازد. به عبارت دیگر، تغییر شکل‌هایی وجود دارند که یک مرتبه از حالت بی‌شکلی به تغییر شکل بزرگ مشخص می‌شوند. پیچش یک لوله استوانه‌ای با پشت و رو کردن آن و پیچش یک پوسته کروی با برش دادن آن دو مثال آشنا از چنین تغییر شکل‌هایی هستند برای همه مواد کشسان به‌کار می‌روند.

خمش یک بلوک مستطیلی به داخل یک بخش از لوله استوانه‌ای و بر عکس آن یعنی تغییر شکل مکعب که در ابتدا خمیده است، به داخل یک بلوک مستطیلی، دو مثال دیگر از چنین تغییر شکل‌هایی هستند.

۲.۱ پیشینه موضوع

در ۶۰ سال گذشته علاقه‌ی دوباره به جنبه‌های بنیادی مکانیک پیوسته غیرخطی منجر به پیشرفت‌های وسیعی در این ناحیه شده است. مهم‌ترین این پیشرفت‌ها جواب‌های دقیق ریولین [۳، ۲۲، ۲۳، ۲۶، ۲۸] به مواد کشسان همگن تراکم‌ناپذیر بوده است. این جواب‌ها بینش خوبی برای رفتار فیزیکی مواد الاستیک مانند است و منجر به نتایج تئوری مهمی می‌شود که با داده‌های تجربی هم‌خوانی دارد. [۲۷]

بسیاری از جواب‌های مونی-ریولین، تغییرشکل‌های جهانی است، که تغییرشکل‌های قابل کنترل هستند که در هر ماده‌ی کشسان همگن، تراکم‌پذیر یا تراکم‌ناپذیر وجود دارند. و هم‌چنین تغییرشکل‌های مواد کشسان تراکم‌پذیر همگن را بررسی می‌کند که جهانی نیستند اما تحت شرایط خاصی قابل کنترل هستند، مواد در این شرایط از معادله‌های تعادل در غیاب نیرو تبعیت می‌کنند. این جواب‌های مونی-ریولین، جواب‌های نسبی نامیده می‌شوند در مقاله ی [۶] به جواب‌هایی گفته می‌شود که جواب‌های دقیق برای معادلات الاستیسیته محدود هستند که فقط برای تابع کرنش-انرژی به کار می‌رود و غیرخطی هستند فقط تعداد کمی از آن‌ها جواب‌های دقیق دارند.

جواب‌های دقیق معادلات تعادل برای مواد مونی-ریولین تراکم‌ناپذیر توسط ادکینز [۲] و کلینگیل و شیلد [۱۹] ارائه شده است. ادکینز تغییرشکل‌های صفحه‌ای به شکل زیر را بررسی کرد:

$$x = f(X), \quad y = g(X)Y + h(X), \quad z = Z, \quad (1.1)$$

که در آن (X, Y, Z) و (x, y, z) به ترتیب مختصات دکارتی و مختصات فضایی جسم هستند و نشان داده شد که جواب‌ها را می‌توان بر حسب توابع مثلثاتی و هیپربولیک نوشت. کلینگ‌بیل و شیلد هم تغییرشکل‌هایی را بررسی کردند که محور تقارن به شکل زیر دارند:

$$r = Rf(Z), \quad \theta = \Theta, \quad z = g(Z), \quad (2.1)$$

که به طریق مشابه، این‌جا (R, Θ, Z) و (r, θ, z) مختصات قطبی استوانه‌ای ماده و مختصات استوانه‌ای فضایی هستند. آن‌ها متوجه شدند که برای مواد مونی-ریولین می‌توان جواب‌ها را بر حسب توابع بیضوی بیان کرد. در حالی‌که برای مواد نئوهوکین و مواد اکستریم-مونی-ریولین، که از رابطه ۴.۷ با $C_1 = 0$ داده می‌شوند، جواب‌ها را می‌توان باز هم بر حسب توابع مثلثاتی و هیپربولیک نوشت.

کلینگ‌بیل و شیلد اولین افرادی بودند که متوجه شدند تغییرشکل‌های خاص به صورت روش‌هایی مانند جواب‌های تقریبی از مسائل مقدار مرزی در الاستیسیته محدود بیان می‌شوند و به همین دلیل اولین اشخاصی بودند که توانستند به صورت تقریبی فشردگی و تنش بلوک‌های الاستیکی طویل و لایه‌های الاستیکی استوانه‌ای را توصیف کنند و این جواب‌های تقریبی هم در معادلات تعادل و هم در شرط تراکم‌ناپذیری صدق می‌کند. اما این جواب‌ها هم‌چنان به صورت تقریب در نظر گرفته می‌شوند چرا که شرایط مرزی تنش به صورت نقطه به نقطه برقرار نیست بلکه به صورت متوسط یا انتگرالی برقرار است. در مقاله‌ی [۱۹] فرض بر این است که شرایط مرزی یک سطح، با کشش صفر، با این فرض جایگزین شده است که برآیند نیروها و گشتاورها برای هر مساحت کوچکی از سطح، صفر است. این روش‌های تقریبی در حقیقت مدل را به توصیف رفتار واقعی الاستیک در محیطی که نیروهای متراکم‌کننده وارد می‌شوند نزدیک می‌کند و می‌گوید آن‌ها به اندازه‌ی بزرگ هستند که با هم‌دیگر به تعادل می‌رسند، فارغ از این‌که در سطح الاستیک چه می‌گذرد. هیل در مقاله‌های [۹، ۱۰] از معادلات تعادل برای تغییرشکل‌های صفحه‌ای و متقارن محوری برای مواد کشسان تراکم‌ناپذیر همگن را به دست آورد. برای این تغییرشکل صفحه‌ای جواب‌های جدیدی در [۹] برای مواد مونی-ریولین به دست آمد که منجر به تغییر شکل زیر شد:

$$x = f(R), \quad y = g(R)\Theta + h(R), \quad z = \lambda Z, \quad (3.1)$$

که در آن f و g و h فقط تابعی از R هستند. سپس این جواب‌های جدید به عنوان جواب‌های تقریبی برای مسطح کردن و کشش یک بخشی از لوله‌ی استوانه‌ای ارائه شدند. به‌طور مشابه برای تغییر شکل‌های متقارن محوری، معادلات تعادل جواب‌های دقیقی برای مواد نئوهوکین و اکستریم مونی-ریولین به دست می‌داد که بر حسب توابع بسل مرتبه صفر بود، اما برای مواد مونی-ریولین چنین جواب ساده‌ای به دست نیامد. در

مقاله [۱۰] برای مواد نئوهوکین این جواب‌ها برای توصیف بزرگ متقارن شعاعی محوری برای یک صفحه حاوی حفره دایره‌ای متحدالمرکز به کار رفت. که تغییر شکل در این مسأله به فرم زیر در نظر گرفته شده است:

$$r = f(R), \quad \theta = \Theta, \quad z = g(R)Z + h(R), \quad (4.1)$$

که در آن f و g و h نشان‌دهنده توابع دلخواهی هستند که باید با استفاده از معادلات تعادل و شرط تراکم‌ناپذیری تعیین شوند. در حقیقت تغییر شکل؟ کلی‌ترین شکل یک تغییر شکل متقارن محوری یک ماده تراکم‌ناپذیر با فرض $r = f(R)$ است. اگرچه برای تغییر شکل کلی سه بعدی که توسط هیل در [۱۱] داده شده است ساده‌سازی‌های قابل توجهی روی معادلات تعادل انجام نشده است، غیر از این‌که تغییر شکل و وارون آن استفاده شده است. اگر این‌ها را به کار بگیریم، معادلات تعادل می‌توانند به صورت معکوس نوشته شوند که در این صورت نتایجی که شیلد در [۲۹] برای تغییر شکل وارون به دست آورده است، به دست خواهد آمد. به عنوان مثال، از این معادلات معکوس می‌توان تغییر شکل وارون را از یک تغییر شکل کلی سه بعدی به دست آورد.

$$x = f(R), \quad y = g(R) \cos \Theta + h(R), \quad z = l(R)\Theta + m(R) \cos \Theta + n(R), \quad (5.1)$$

که در آن (R, Θ, Φ) و (X, Y, Z) به ترتیب مختصات قطبی استوانه‌ای و مختصات استوانه‌ای فضایی جسم هستند و f, g, h, l, m, n توابعی هستند که فقط به R وابسته هستند. هیل در مقاله [۱۱] جواب‌های سه بعدی دقیق را برای مواد نئوهوکین و اکستریم مونی-ریولین تحت تغییر شکل‌های رابطه (۵.۱) به دست آورده است. جزئیات مربوط به تقریب‌هایی برای این جواب در زمینه فشردگی، صاف کردن، کشش و برش بخشی از یک پوسته کروی نئوهوکین زده شده است، توسط هیل بیان شده است. به علاوه برای مواد مونی-ریولین هیل و لی [۱۶] تغییر شکل سه بعدی را در نظر گرفتند.

$$x = f(R), \quad y = g(R)\Theta, \quad z = h(R)Z \quad (6.1)$$

که در آن (R, Θ, Φ) و (X, Y, Z) به ترتیب مختصات قطبی استوانه‌ای و دکارتی فضایی هستند و طبق f و g و h توابعی هستند که فقط به R بستگی دارند. برای این تغییر شکل برخی از جواب‌های خاص مربوط به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی غیر خطی مشخص شدند. این باعث شد تا بررسی‌هایی در مورد تغییر شکل سه بعدی انجام بگیرد.

$$x = f(Y)X, \quad y = g(Y), \quad z = h(Y)Z \quad (7.1)$$

این بررسی برای مواد مونی-ریولین و به منظور به دست آوردن یک رابطه تقریبی تحت فشار برای یک بلوک مستطیلی از الاستیکی انجام شده است [۱۸]. به همین ترتیب هیل و لی [۱۷] با استفاده از یک ماده

نئوهوکین برای مسأله‌ای که در آن فشردگی و پیچش برای یک لایه الاستیکی استوانه‌ای وجود داشتند، با بسط و تعمیم رابطه (۲.۱) و با مفروضات زیر رابطه تحت فشار تقریبی را به دست آوردند.

$$r = Rf(Z), \quad \theta = \Theta + h(Z), \quad z = g(Z), \quad (۸.۱)$$

که در آن f, g و h توابعی از Z هستند.

تغییر شکلی که هیل به کار برد [۷] یک تغییر شکل صفحه‌ای به شکل زیر است:

$$r = \left(\alpha R^2 + f(\Theta) \right)^{1/2}, \quad \theta = b\Theta + c, \quad z = Z, \quad (۹.۱)$$

که در آن $f(\Theta)$ تابعی از Θ است و a, b و c مقادیر ثابتی هستند به طوری که $ab = 1$. یک جواب دقیق جدید به صورت زیر است:

$$f(\Theta) = d[1 + \sin(2\Theta + e)]. \quad (۱۰.۱)$$

که در آن d و e مقادیر ثابتی هستند که برای ماده مونی-ریولین به دست آمده‌اند. هدف از این جواب دقیق، فرمول‌بندی یک رابطه تحت فشار تقریبی برای مسأله‌ای بود که در آن یک سطح مقطع نیمه‌استوانه‌ای که به یک صفحه جامد مقید شده است، توسط صفحه دیگر موازی با آن، در راستای طولش به صورت یکنواخت فشرده می‌شود. یک ویژگی مهم این جواب این است که جواب پیش‌بینی می‌کند که یک اشکال از تماس یک نقطه‌ای به تماس دو نقطه‌ای وجود دارد. هم‌چنین وارن در مقاله [۳۱] تفسیر کردند که این جواب، جواب مسئله یک حفره غیرمتمقارن در یک جامد مونی-ریولین است.

هیل در مقاله [۲] تغییر شکل متجانس صفحه‌ای به فرم کلی زیر را بررسی کرد:

$$r = Rf(a\Theta + b \log R), \quad \theta = c\Theta + g(a\Theta + b \log R), \quad z = Z, \quad (۱۱.۱)$$

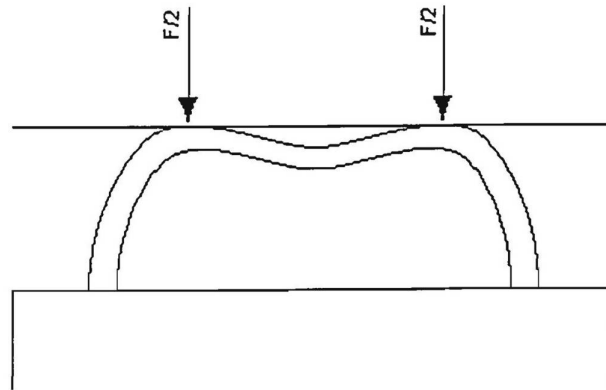
که در آن a, b و c ثابت‌های اختیاری هستند. تعدادی از جواب‌های دقیق جدید برای توابع f و g برای مواد وارگا و نئوهوکین به دست آمد. توجه داشته باشید که رابطه (۱۱.۱) شامل تعدادی از تغییر شکل‌های خاص مانند تغییر شکلی است که توسط کلینگ‌بیل و شیلد [۲۰] و سینگ و پایپکین [۳۰] ارائه شد. (رابطه زیر)

$$r = AR, \quad \theta = B\Theta + C \log(DR), \quad z = Z, \quad (۱۲.۱)$$

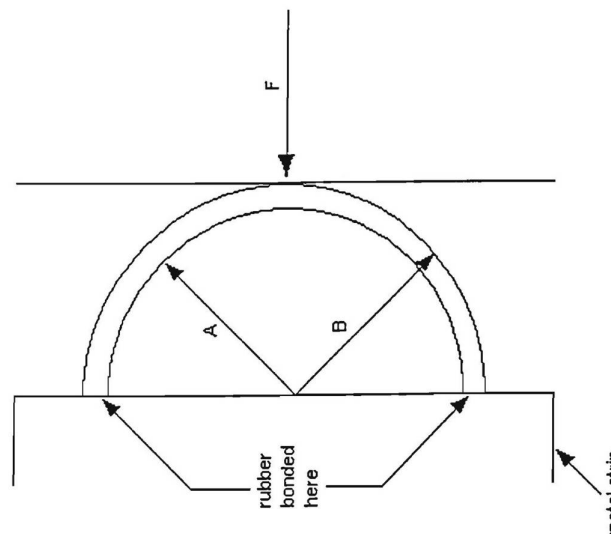
در آن A, B, C و D ثوابت اختیاری هستند به طوری که $A^2 B = 1$ و D معکوس اندازه طول دارد. یک مورد خاص دیگر از رابطه (۱۱.۱) مسأله‌ای است که توسط بلیتز و کوسولوفسکی [۳] بررسی شده است و آن تغییر شکل به فرم زیر است:

$$r = Rf(\Theta), \quad \theta = g(\Theta), \quad z = Z, \quad (۱۳.۱)$$

و این فرم وقتی اتفاق می‌افتد که $a = 1$ و $b, c = 0$ باشند، که جواب مسأله هم برای مواد مونی-ریولین و هم مواد نئوهوکین است. تغییر شکلی که با رابطه (۱۳.۱) داده شده، برای دو کاربرد استفاده شده است.



شکل ۱.۱: تماس دو نقطه‌ای



شکل ۲.۱: تماس یک نقطه‌ای

اولین کاربرد، در مقاله [۳] است که برای مدل کردن پخش شدگی توزیع مماسی کرنش صفحه‌ای یک لوله الاستیکی گرد تراکم‌ناپذیر بی‌نهایت بلند که به صورت شعاعی سوراخ شده است و با یک سازه مخروطی شکل مقید شده است. دومین کاربرد برای تغییر شکل یک گوه کشسان تراکم‌ناپذیر در [۳] است. هیل و آریگو در سه مقاله اخیر خود [۴، ۱۳، ۱۵] کرنش صفحه‌ای، تنش صفحه‌ای و تغییر شکل‌های متقارن محوری را برای مواد وارگای تراکم‌ناپذیر کشسان بررسی کردند. نشان داده می‌شود که معادلات دیفرانسیل

نسبی غیرخطی مرتبه چهارم که حاکم بر سیستم هستند برای همه تغییر شکل‌ها، قابل تبدیل به انتگرال اول‌های خاصی هستند، که اعمال شرط تراکم‌ناپذیری مسأله را به یک معادله مرتبه دو تقلیل می‌دهد. در حقیقت برای تغییر شکل کرنش صفحه‌ای، سه انتگرال این‌چنینی وجود دارند (در مقایسه با تنش صفحه‌ای و تغییر شکل‌های متقارن محوری که دو انتگرال وجود دارد).

برای تغییر شکل‌های کشسان، فقط یک جواب عمومی شناخته شده وجود دارد که برای مواد کشسان وارگای تراکم‌ناپذیر به کار می‌رود. این نتیجه ابتدا توسط هولدن ارائه شد [۱۸] و سپس توسط هیل [۸] به دست آمد. کسی که روش وردشی را به کار گرفت که جواب‌های ساده‌تری از جواب‌های پارامتری هولدن به دست می‌داد. در [۱۵] با فرض جواب‌های به دست آمده به شکل زیر، چندین جواب دقیق جدید برای تغییر شکل‌های صفحه‌ای برای وارگا و مواد وارگای اصلاح شده به دست آمد

$$x = Yf(\xi), \quad y = Xg(\xi), \quad \xi = X^m/Y, \quad (14.1)$$

$$y = xf(\xi), \quad \xi = Y/X, \quad (15.1)$$

$$y = f'(\xi), \quad \xi = Y/X. \quad (16.1)$$

توجه داشته باشید که رابطه (۱۵.۱) متناظر با تغییر شکل زیر در مختصات قطبی استوانه‌ای است:

$$r = (R^2 G(\Theta) + H(\Theta))^{1/2}, \quad \theta = F(\Theta), \quad (17.1)$$

به شکل مشابه در [۱۵] تعدادی از جواب‌های دقیق برای تغییر شکل‌های متقارن محوری برای مواد وارگا و وارگای اصلاح شده، از معادلات دیفرانسیل پاره‌ای مرتبه دوم مربوطه به دست آمده است. با فرض جواب‌های به شکل زیر

$$r = R \frac{2m+1}{3} F(R^m/Z), \quad z = R \frac{4-m}{3}, \quad \xi = R^m/Z, \quad (18.1)$$

که در آن m ‌های خاصی در نظر گرفته شده‌اند و

$$r = zf(\xi), \quad \xi = R/Z. \quad (19.1)$$

جواب‌های دیگر با فرض زیر پیدا شده‌اند:

$$r = f'(\xi), \quad \xi = R/Z, \quad (20.1)$$

و

$$r = (f(R, Z) - 2RZ^2)^{1/2}. \quad (21.1)$$

نتیجه‌ای که برای تغییر شکل‌های متقارن محوری برای مواد تغییر یافته وارگا در [۱۵] داده شده است، برای تعیین جواب‌های جدید برای مسأله برهم‌نهی تغییر شکل‌های کوچک در برابر بسط متقارن یک پوسته کروی که توسط هیل و آریگو^۱ در [۱۴] ارائه شده است، استفاده شد. در [۱۳] برای تغییر شکل‌های کرنش صفحه‌ای در مواد وارگا و وارگای اصلاح‌شده، یک سیستم مرتبه دوم جدید به دست آمده است که یک معادله مونگ آمپر تبدیل می‌شود و در نتیجه به صورت خطی و معادله هلمهولتز استاندارد در آید. به‌ویژه تغییر شکل صفحه‌ای

$$r = r(R, \Theta), \quad \theta = \theta(R, \Theta), \quad z = Z, \quad (22.1)$$

برای مواد وارگا بررسی شد و می‌توان نشان داد که به صورت پارامتری زیر نشان داده می‌شود:

$$r = \left(\omega^2 + \omega_{\Theta}^2 \right)^{1/2}, \quad \theta = -\Theta - \tan^{-1}(\omega_{\Theta}/\omega), \quad R = \omega_{\lambda}, \quad (23.1)$$

به‌گونه‌ای که ω_{λ} مثبت است و $\omega(\lambda, \Theta)$ جوابی از معادله خطی هلمهولتز است.

$$\omega_{\lambda\lambda} + \omega_{\Theta\Theta} + \omega = 0, \quad (24.1)$$

اندیس‌ها نشان‌دهنده مشتق‌های جزئی هستند. علاوه بر جواب‌هایی که در [۱۵] برای تغییر شکل (۱۶.۱) پیدا شد، یک جواب جدید برای مواد وارگا در [۱۳] به دست آمد که به صورت زیر است:

$$r = \left\{ \left[\frac{R^2}{C \cos^2(C_1\Theta + C_2)} + C_2 \right] [1 + C \sin^2(C_1\Theta + C_2)] \right\}, \quad (25.1)$$

$$\theta = -\Theta + \tan^{-1}\{C_1 \tan(C_1\Theta + C_2)\},$$

که در رابطه بالا $C = (C_1)^2 - 1$ و C_1 و C_2 و C_3 ثابت‌های اختیاری هستند. به صورت مشابه، توسط هیل و آریگو [۴]، نتایجی متناظر با آنچه در [۱۳] به دست آمده برای نظریه تنش صفحه‌ای این ورقه‌ها و برای تغییر شکل‌های متقارن به دست آمده است. اگرچه نتایج [۴] فقط برای مواد وارگا به کار می‌رود، برخلاف آن‌هایی که [۱۳، ۱۵] به دست آمده است که برای مواد وارگا و مواد وارگای اصلاح‌شده به کار می‌رود. به‌ویژه در [۳] نشان داده شده است که برای مواد وارگا تغییر شکل تنش صفحه‌ای به شکل زیر:

$$r = r(R, \Theta), \quad \theta = \theta(R, \Theta), \quad z = \lambda(R, \Theta)Z,$$

^۱Arrigo

به صورت پارامتری (۲۳.۱) نشان داده می شود که ω_λ مثبت است و $\omega(\lambda, \Theta)$ جوابی از معادله زیر است:

$$\omega_{\lambda\lambda} + \lambda(\omega_{\Theta\Theta}) = 0. \quad (26.1)$$

به علاوه برای مواد وارگایی که تغییر شکل های متقارن محوری به شکل رابطه (۲۷.۱) دارند، یک انتگرال اول جدید برای معادلات تعادل به دست آمده است:

$$r = r(R, Z), \quad \theta = \Theta, \quad z = z(R, Z). \quad (27.1)$$

اگرچه مسأله به یک معادله مرتبه دو تبدیل شده است اما نمی توان آن را خطی کرد و بنابراین تعدادی از جواب های راحت مرتبه دوم بررسی شده است.

۳.۱ فصول پایان نامه

در فصل یک آشنایی با مواد کشسان و تراکم ناپذیر می باشد و هم چنین به دست آوردن جواب های دقیق معادلات تعادل برای مواد مونی-ریولین تراکم ناپذیر می باشد. در فصل دوم قوانین مکانیک پیوسته بر حسب کمیت مستقل از مختصات فرموله می شوند. که در بخش الف این فصل به معرفی نوعی مختصر نویسی می پردازیم. در بخش ب مفهوم تانسور که تبدیل خطی است معرفی می کنیم و بخش ج مؤلفه های دکارتی و تانسوری گوناگون مانند شیب، واگرایی و میدان های تانسوری در دستگاه مختصات قطبی استوانه ای استخراج شده است.

در فصل سوم سیستم معادلات حاکم بر مواد کشسان تراکم ناپذیر همگن در تغییر شکل های کرنش صفحه ای را بیان می کنیم.

و در فصل چهارم، ما تغییر شکل نامتقارن به صورت وارونه شدن در سطوح صاف را مورد بررسی قرار قرار می دهیم.

$$r = (-\alpha R^2 + f(\Theta))^{1/2} \theta = \pi - \Theta, \quad Z = z/\alpha$$

که در آن $f(\Theta)$ تابعی از Θ است و α یک ثابت است. این تغییر شکل شکل اغلب برای توصیف تغییر شکل های لوله های الاستیکی دایره ای به کار می رود و در نهایت نتایج عددی برای مسأله به دست آمده است و مشخص شده است که تغییر شکل بخش های ضخیم تر راحت تر از بخش های نازک تر است.

این نتیجه که به نوعی غافلگیرکننده است، ناشی از تغییرات انقباض در جهت Z است. و به دلیل این که حل بعضی از معادلات با دست امکان پذیر نمی باشد در این پایان نامه از نرم افزار قدرت مند متمتیکا استفاده شده است.

$$r = (-\alpha R^2 + f(\Theta))^{1/2} \quad (28.1)$$

$$I_{\Theta} = \frac{\partial I}{\partial \Theta} = \frac{1}{R^{\gamma}} \left(\frac{A'}{r^{\gamma}} - \frac{Af'}{r^{\epsilon}} \right) \quad (29.1)$$

$$I = -\gamma \alpha + \frac{A(\Theta)}{r^{\gamma} R^{\gamma}} \quad (30.1)$$

فصل ۲

مفاهیم و تعاریف مقدماتی

۱.۲ بخش الف: نمایش اندیسی

۱.۱.۲ قرارداد جمع؛ اندیس های ظاهری

جمع زیر را در نظر بگیرید.

$$s = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n. \quad (۱.۲)$$

می توانیم با استفاده از علامت جمع، معادله فوق را به شکلی فشرده تر بنویسیم.

$$s = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad (۲.۲)$$

بدیهی است، معادلات زیر دقیقاً هم معنای معادله (۲.۲) اند.

$$s = \sum_{j=1}^n a_j x_j, \quad s = \sum_{m=1}^n a_m x_m, \quad s = \sum_{k=1}^n a_k x_k. \quad (۳.۲)$$

i در معادله (۲.۲)، و نیز J یا m یا k در معادله (۳.۲)، اندیس ظاهری اند؛ بدین معنا که جمع، از حرف به کار رفته برای اندیس مستقل است. با استفاده از قرارداد زیر، می توانیم نگارش معادله (۱.۲) را ساده تر کنیم؛ هرگاه اندیسی یک بار تکرار شود، اندیس ظاهری خواهد بود و معرف جمعی است که در آن، اندیس ظاهری اعداد صحیح $1, 2, \dots, n$ را اختیار می کند.

قرارداد فوق، قرارداد جمع اینشتین نام دارد. با استفاده از این قرارداد، می توان معادله (۱.۲) را به سادگی چنین نوشت،

$$s = a_i x_i, \quad s = a_j x_j, \quad s = a_m x_m, \quad (۴.۲)$$

و عبارت های مشابه.

تأکید می شود که عبارت های مانند $a_i b_i x_i$ یا $a_m b_m x_m$ ، در این قرارداد تعریف نمی شوند. به بیان دیگر، هنگام استفاده از قرارداد جمع، اندیس جمع نمی بایست بیش از یک بار تکرار شود. لذا، علامت جمع عبارتی بصورت زیر قابل حذف نیست.

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i x_i.$$

از این پس، همواره تعداد جملات جمع n را برابر ۳ اختیار می کنیم، به گونه ای که مثلاً،

$$a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3, \quad a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$