بسم الله الرحمن الرحيم

چکیده

بررسی و تعمیم فرمول انرژی بستگی هسته ای

جرم هسته و انرژی بستگی آن بدلیل در بر داشتن برآیند خالص تمام برهمکنش ها در هسته کمیت اساسی در فیزیک هسته ای به شمار می رود. اگر چه قابلیت های تجربی جدید در فیزیک هسته ای امکان اندازه گیری ویژگی های هسته را بسیار دورتر از دره پایداری فراهم می کند اما در موارد بسیاری برای هسته های مورد نظر در اختر فیزیک چنین امکانی وجود ندارد. بنابراین گسترش استنتاج های منطقی بر پایه جرم های محاسبه شده در بسیاری از جنبه های ساختار هسته و فرایند های اختر فیزیکی از موضوعات مورد علاقه در فیزیک هسته ای است .

با بکارگیری جامع ترین پایگاه اطلاعاتی اخیر که به آن AME۲۰۰۳ اطلاق می شود ، ضرایب جملات در فرمول جرم با استفاده از ۲۲۲۵ جرم اتمی تجربی با برازش کمترین مربعات تعیین می شوند. با بهبود یافتن سازگاری بین جرمهای تجربی و محاسبه شده امکان پیش بینی دقیق تر جرم های ناشناخته فراهم می گردد..

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول: مقدمه

۱-۱- فرمول جرم هسته ۲

فصل دوم: فرمول نیمه تجربی جرم

۲-۱- انرژی حجمی و سطحی هسته ۳

۲-۲- انرژی دافعه کولنی پروتون ها ۴

۲- ۳- انرژی عدم تقارن ۵

۲-۴- شکل کلی فرمول نیمه تجربی جرم ۷

فصل سوم: بررسی دقیق انرژی دافعه کولنی و تصحیحات مورد نیاز

۳-۱- مقدمه ۸

۳-۲ –انرژی تبادل کولن ۸

۳-۳- انرژی پراکنش کولنی ۱۲

فصل چهارم: انرژی تقارن سطحی

۴-۱– انرژی تقارن سطحی ۱۴

۴-۲ - جمله ویگنر ۱۸

۴- ۲-۱- ایزواسین ۱۸

۴- ۲-۲- جبر ایزواسین ۱۸

۴-۲ ۳ – جمله ویگنر ۱۹

فصل پنجم : بررسی انرژی سطحی و انجام تصحیحات دقیق روی آن

۵-۱ – انرژی انحنا ۲۰

۵-۲- عدم تقارن اسپین در فرمول جرم ۲۲

عنوان **صفحه**

۵-۲-۱ مقدمه ۲۲
۵-۲-۲ تقریب توماس-فرمی برای چگالی انرژی اسپین- مداری ۲۲
۵-۲-۳ انرژی عدم تقارن اسپین ۲۴
۵-۲-۴ برآورد عددی ۲۶

فصل ششم : انرژی جفت شدگی و خواص پوسته ای هسته ها
۶-۱ انرژی جفت شدگی ۲۸
۶-۲ اثرات پوسته ای هسته ها ۲۹

فصل هفتم : محاسبات عددی و نتایج
۷-۱ فرمول نهایی جرم هسته ۳۰
نتیجه گیری ۴۳

ضمائم
ضمیمه ۴۴
ضمیمه ۵۰

فهرست منابع و مآخذ ۵۸

فهرست جداول

عنوان صفحه

جدول ۱ - پارامترهای فرمول BW + جمله اضافی برحسب Mev..... ۳۸
جدول ۲ - پارامترهای فرمول BW + جمله اضافی مرجع [۱۷]برحسب Mev..... ۳۸
جدول ۳ – مقادیر پارامترهای فرمول نیمه تجربی جرم معادله (۷-۱) برحسب Mev ۳۹
جدول ۴ – مقادیر پارامترهای فرمول نیمه تجربی جرم مرجع [۱۷] برحسب Mev..... ۴۰

فهرست اشکال

عنوان صفحه

شکل ۱ – پارامتر های فرمول BW ۳۱
شکل ۲- پارامترهای فرمول BW + جمله تبادل کولنی ۳۲
شکل ۳ - پارامترهای فرمول BW + جمله تقارن سطحی ۳۳
شکل ۴ - پارامترهای فرمول BW + انرژی انحنا ۳۴
شکل ۵ - پارامترهای فرمول BW + انرژی پوسته ای ۳۵
شکل۶ - پارامترهای فرمول BW + جمله ویگنر ۳۶
شکل ۷ - پارامترهای فرمول BW + انرژی جفت شدگی نوکلئون ۳۷
شکل ۸ - پارامترهای فرمول BW + کلیه جملات اضافی ۳۹

فصل اول

مقدمه

جرم هسته در برگیرنده برآیند خالص برهم کنشهای هسته ای است و محاسبه دقیق جرم هسته ها مستلزم آن است که ما شناخت کافی از فرایندهای اساسی در فیزیک هسته ای داشته باشیم. مطالعه و بررسی جرم هسته ها تاریخچه نسبتاً طولانی دارد. اولین بار ویزاکر [۱] در سال ۱۹۳۵ و بث [۲] و باتر [۳] در سال ۱۹۳۶ فرمولی را براساس مدل قطره مایع ارائه دادند. در این مدل، هسته جسمی تراکم ناپذیر با توزیع بار یکنواخت در نظر گرفته شده بود. در سال ۱۹۶۶ مایر [۴] و اسواتکی [۵] فرمول قطره مایع را که شامل اثرات پوسته ای و تغییر شکل بود را پیشنهاد دادند و همکاری آنها در سال ۱۹۸۸ با مولر [۶] به ارائه مدل ماکروسکوپیک-میکروسکوپیک و سپس مدل قطره ای فاصله محدود (*FRDM*)[۷] منجر شد. در سال ۲۰۰۰ گروهی از فیزیکدانان ژاپنی روشی جدید جهت محاسبه اثرات پوسته ای هسته ای در فرایند تعیین جرم هسته ها ارائه دادند [۱] . در این روش برخلاف روش استروتینسکی [۲] که برای هسته ها، پتانسیل ذره منفرد تغییر شکل یافته ای در نظر می گرفت، هسته های تغییر شکل یافته را بصورت یک برهمنهی خاص از هسته های کروی شکل در نظر گرفتند. در رهیافتی دیگر انرژی بستگی هسته از طریق فشار گازی که بر سطح هسته در حال حرکت وارد می شود

۱- Weizsäcker
۲- Beth
۳- Bacher
۴-Myers
۵-Swiatecki
۶-Moller
۷-Finite range droplet model

محاسبه میگردد.سرعت سطح هسته متناسب با $\frac{1}{v^n}$ در نظر گرفته می شود و عبارات تحلیلی برای همه ضرایب فرمول بدست می آید[۳] .

۱-۱ - فرمول جرم هسته

بررسی فرمول جرم هسته را از فرمول نیمه تجربی جرم در فصل ۲ شروع می نمائیم.
در فصل ۳ انرژی کولنی پروتونها تصحیح می شود. در این فصل ابتدا به انرژی تبادل کولنی که در فرمول جرم بشکل $a_{ex}\frac{Z^{\frac{4}{3}}}{A^{\frac{1}{3}}}$ ظاهر می شود می پردازیم. سپس دلایل ظهور انرژی پراکنش کولنی که بصورت $a_{diff}\frac{Z^2}{A}$ است مورد بررسی قرار می گیرد.
در فصل ۴ به کمک یک رهیافت ترمودینامیکی جمله عدم تقارن پروتون ـ نوترون بتفضیل مورد بررسی و تصحیح قرار می گیرد و سپس بکمک مفهوم ایزواسپین در هسته ها جمله ویگنر بصورت $a_w\frac{|N-Z|}{A}$ به فرمول جرم اضافه می شود.
در فصل ۵ این رساله به بررسی و تصحیح انرژی سطحی هسته پرداخته شده است. در ابتدا زمینه های پیدایش انرژی انحنا که بصورت $a_R A^{\frac{1}{3}}$ است مورد بحث واقع می شود. سپس نوعی خاص از پلاریزیسیون در هسته معرفی می شود. این نوع پلاریزاسیون که ناشی از فزونی ذرات با مومنتم زاویه ای کل $j=l+\frac{1}{2}$ نسبت به ذرات با مومنتم زاویه ای کل $j=l-\frac{1}{2}$ در هسته است که باعث پیدایش نوعی انرژی بنام انرژی عدم تقارن اسپین می شود.
در فصل ۶ انرژی ناشی از خواص میکروسکوپیک هسته که شامل انرژی جفت شدگی نوکلئونها و انرژی حاصل از اثرات پوسته ای هسته است مورد تحقیق و بررسی قرار می گیرد.
در فصل ۷ ضرایب جملات مختلفی که در فرمول جرم هسته ظاهر شده اند بکمک روش برازش خطی کمترین مربعات محاسبه می شوند و نتیجه گیری و پیشنهادات لازم نیز در این فصل ارائه خواهد شد.

فصل دوم
فرمول نیمه تجربی جرم[1]

۲-۱- انرژی حجمی و سطحی هسته

اولین بار در سال ۱۹۳۵ ویزاکر مدل قطره مایع[2] را برای محاسبه جرم هسته ارائه داد. براساس این مدل، هسته جرمی تراکم ناپذیر در نظر گرفته می شود که تفاوتی بین نیروهای هسته ای بین نوکلئونها وجود ندارد[3] و نیروی هسته ای بعنوان نیرویی با برد کوتاه و اشباع پذیر محسوب محسوب می شود براساس موارد ذکر شده در یک هسته با تعداد A نوکلئون، انرژی بستگی، B ، متناسب با A است که به آن انرژی حجمی می گوئیم و سهم انرژی حجمی را در انرژی بستگی بصورت $B = a_v A$ می نویسیم.بستگی خطی B و A تا حدودی جالب است و ما را به نکته مهمی ازخواص نیروهای هسته ای رهنمون می کند. اگر هر نوکلئونی همه نوکلئونهای موجود در هسته را جذب می کرد، آنگاه انرژی هسته ای باید متناسب با $A(A-1)$ یا بتقریب متناسب A^2 می شد. اما تناسب خطی انرژی بستگی با A نشان دهنده این است که هر نوکلئونی در هسته فقط نوکلئونهای اطراف خود را جذب می کند و همه نوکلئون های هسته را جذب نمی کند. این مسئله نشان دهنده برد کوتاه انرژی هسته ای، همچنین اشباع پذیربودن آن است. برخلاف نوکلئونهای مرکزی، نوکلئونهایی که در سطح هسته مستقر شده اند، با تعداد کمتری از نوکلئون های پیرامونی احاطه گردیده اند. از این رو سهم این نوکلئونها در انرژی بستگی B کمتر از نوکلئونهای مرکزی است و چون در رابطه $B = a_v A$ این نکته در نظر گرفته نشده است، مقدار B بیش از حد لازم برآورد شده است. بنابراین از مقدار B جمله ای را متناسب با مساحت سطح هسته است کم می کنیم. چون شعاع هسته متناسب با $A^{\frac{1}{3}}$ است

---

[1] Semi empirical mass formula
[2] Liquid drop model
[3] Charge independent force

مساحت سطح متناسب با R^2 یا $A^{\frac{2}{3}}$ می شود. پس سهم نوکلئونهای سطحی را در انرژی بستگی هسته ای باید بصورت $-a_c A^{\frac{2}{3}}$ در نظر گرفت.

۲-۲- انرژی دافعه کولنی پروتون ها

در فرمول انرژی بستگی، نیروی دافعه کولنی به دلیل ماهیت برد بلندش بین همه پروتونها عمل می کند و باعث تضعیف انرژی بستگی می شود. برای محاسبه انرژی کولنی هسته بصورت کره ای با بار یکنواخت Ze در نظر می گیریم چون هر پروتون همه پروتونهای دیگر هسته را دفع می کند این جمله متناسب با $Z(Z-1)$ می شود که با فرض هسته به شکل یک کره باردار یکنواخت، چگالی بار بصورت

$$\rho = \frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3} \qquad (۱-۲-۲)$$

خواهد بود . حال انرژی کولنی را بصورت زیر محاسبه می کنیم.

فرض کنیم یک بار کروی به شعاع r بوجود آمده باشد می توانیم کار اضافی لازم جهت افزودن ورقه ای به ضخامت dr بر روی کره فوق را با فرض اینکه بار $\frac{4}{3}\pi r^3$ کره اصلی در مرکز لایه متمرکز شده باشد محاسبه کرد . در این صورت انرژی پتانسیل الکتریکی هسته با استفاده از معادله (۲-۱) عبارت است از

$$V_{coulomb} = \int_0^R \frac{4}{3}\pi r^3 \rho . 4\pi r^2 dr \rho . \frac{1}{r}$$
$$\frac{3}{5}\frac{Z^2 e^2}{R} \qquad (۲-۲-۲)$$

چون فرض کرده ایم که بار هر پروتون در تمام هسته پخش شده است ، عبارت (۲-۲) شامل جمله خود-انرژی[۱] $\frac{3}{5}\frac{e^2}{R}$ برای هر پروتون است . با کسر این جمله برای Z پروتون انرژی برهمکنش صحیح بین تمام جفت پروتون ها بدست می اید

$$V_{coulomb} = \frac{3}{5}\frac{Z(Z-1)e^2}{R} \qquad (۳-۲-۲)$$

با در نظر گرفتن $R = R_0 A^{1/3}$ مقدار ثابت این جمله بصورت $a_c = \frac{3}{5}\frac{e^2}{R_0}$ بدست می آید که برای مقادیر $R_0 = 1.4$ یا $1.2\,F$ داریم

$$a_c = \begin{cases} 0.72\mathrm{F} \\ 0.62\mathrm{F} \end{cases}$$

۱-Self energy

حال با تقریب $Z(Z-1)\sim Z^2$ انرژی کولنی در فرمول تجربی جرم بصورت $-a_c Z^2/A^{\frac{1}{3}}$ در می آید. علامت منفی به این دلیل ظاهر شده است که انرژی کولنی باعث کاهش انرژی بستگی هسته ای می شود[۴].

۲-۳- انرژی عدم تقارن[1]

انرژی عدم تقارن عبارت است از اختلاف بین انرژی هسته ای یک هسته با اعداد نوترونی و پروتونی N و Z با انرژی ایزوباری که در آن اعداد نوترونی و پروتنی ، هر دو مساوی $\frac{A}{2}$ است. جهت محاسبه فرایند زیر را دنبال می نماییم .

اگر نوکلئونها به صورت یک گاز فرمی با اسپین $\frac{1}{2}$ و همچنین ذراتی بدون برهمکنش در نظر گرفته شوند، آنگاه با توجه به اصل طرد پائولی[2]، پروتون ها و نوترونها می توانند در داخل یک چاه پتانسیل عمیق که فواصل سطوح انرژی کوانتم مکانیکی آن برابر است آزادانه حرکت کنند. بمنظور سادگی در انجام محاسبات، هسته را بصورت ۲z پروتون و ۲n نوترون(هسته زوج-زوج) در نظر می گیریم. آنگاه انرژی جنبشی سیستم بصورت زیر نوشته می شود:

$$T(z,n) = 2(1+2+\cdots+z)\Delta E + 2(1+2+\cdots+n)\Delta E \qquad (۱-۳-۲)$$
$$= \big(z(z+1)+n(n+1)\big)\Delta E$$

که ΔE فاصله یکسان سطوح انرژی است. حال اگر عدد اتمی $A=2z+2n$ ثابت در نظر گرفته شود، انرژی جنبشی را در شرایطی که مینیمم شود را مورد بررسی قرار می دهیم. برای این منظور تابع کمکی $F(z,n,\lambda)$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$F(z,n,\lambda) = T(z,n) + \lambda(2n+2z-A) \qquad (۲-۳-۲)$$

---

[1] Asymmetry term

[2] Pauli exclusion principle

λ یک مولد لژاندر می باشد.

با حل معادلات

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial n} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

شرطی که انرژی مینیمم شود بصورت $n = z$ خواهد بود.

گام بعدی قرار دادن مینیمم انرژی $E\left(\frac{A}{4},\frac{A}{4}\right)$ در انرژی بستگی هسته و محاسبه انحراف انرژی بستگی هسته ها از مقدار فوق است که از آن بعنوان جمله عدم تقارن یاد می شود:

$$E\left(z,\frac{A}{2}-z\right)-E\left(\frac{A}{4},\frac{A}{4}\right)=(4z-A)^2\frac{\Delta E}{8}=(2z-A)^2\frac{\Delta E}{8} \qquad (۲-۳-۳)$$

این بحث بسادگی قابل تعمیم به حالتهای Z و $A-Z$ غیر زوج است.

در مرحله بعدی ما علاقه مند به بیان فاصله سطوح انرژی ΔE برحسب پارامترهای هسته هستیم . برای این منظور فرض می کنیم گاز فرمی در مکعبی به ابعاد L محبوس است. آنگاه تکانه در هر راستا با واحد $\frac{\pi}{L}$ کوانتیزه می شود. در فضای مومنتم نوکلئونها که سطوح پائین تر از $\frac{A}{2}$ را پر می کنند، کره ای به شعاع P_A را تشکیل می دهند.

بدلیل کوانتیزه بودن، رابطه بین A و P_A به صورت زیر است:

$$2.\frac{4}{3}\pi P_A^3 = A\left(\frac{\pi}{L}\right)^3 \qquad (۲-۳-۴)$$

و انرژی فرمی

$$E_F = \frac{P_A^2}{2m} \qquad (۲-۳-۵)$$

است که m جرم نوکلئون می باشد. با بدست آوردن P_A از معادله (۲-۳-۴) و جایگزین نمودن آن در معادله (۲-۳-۵) انرژی فرمی بصورت:

$$E_F = \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{\pi^2}{2m}\frac{A^{\frac{2}{3}}}{L^2} \qquad (۲-۳-۶)$$

در می آید .

ΔE با قرار دادن $A \to A+1$ تقریب زده می شود:

$$\Delta E \approx \delta E_F|_{A\to A+1} = \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{\pi^2}{3m}\frac{1}{L^2A^{\frac{1}{3}}} \qquad (۷-۳-۲)$$

حال هر نوکلئون بصورت کره ای به شعاع $R_\circ$ مدل سازی می شود که تعداد A تای آنها مکعب را پر می کند، آنگاه:

$$L^3 = A.\frac{4\pi}{3}R_\circ^3 \Leftrightarrow L = A^{\frac{1}{3}}.\left(\frac{4}{3}\pi\right)^{\frac{1}{3}}R_\circ \qquad (۸-۳-۲)$$

با قرار دادن L در معادله (۸-۲)، ΔE بصورت:

$$E = \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{4}{3}}\frac{\pi^2}{3mR_\circ^2}\frac{1}{A}\alpha A^{-1} \qquad (۹-۳-۲)$$

خواهد شد . بنابراین جمله عدم تقارن بشکل $-a_a(2z-A)^2/A$ در می آید. علامت منفی به مفهوم این است که برای هسته های با تعداد پروتون ها و نوترونهای یکسان انرژی بستگی هسته ای مقدار حداکثر خود را دارد و با انحراف از شرط گفته شده از مقدار آن کاسته میشود[۵].

۲-۴- شکل کلی فرمول نیمه تجربی جرم

با توجه به موارد ذکر شده در قسمت های قبلی فرمول نیمه تجربی جرم که توسط ویزاکر بیان شد بشکل زیرخواهد شد:

$$B_{tot}(A,Z) = a_vA - a_sA^{\frac{2}{3}} - a_c\frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - a_a\frac{(N-Z)^2}{A} \pm \delta + \qquad (۱-۴-۲)$$

η که جمله اول انرژی حجمی ، جمله دوم انرژی سطحی ، جمله سوم انرژی دافعه کولنی ، جمله چهارم انرژی عدم تقارن ، δ انرژی ناشی از جفت شدگی نوکلئونها که برای هسته های زوج - زوج مثبت و برای هسته های فرد – فرد منفی است و برای هسته های با A فرد مقداری آن صفر است. در نهایت η انرژی ناشی از ساختار لایه های هسته است که برای هسته های با عدد نوترونی یا پروتونی مرموز مقداری مثبت دارد.

فصل سوم

بررسی دقیق انرژی دافعه کولنی در هسته و تصحیحات مورد نیاز

۳-۱-مقدمه

در بخش (۲-۲) تاثیر انرژی کولنی ناشی از بار مثبت پروتونها را بر انرژی کلی هسته ها بعنوان عاملی کاهنده مشاهده نمودیم در ادامه به بررسی تاثیر حرکت یک ذره بر مکان لحظه ای ذرات دیگر می پردازیم برای این کار از تئوری *Hartree* استفاده خواهیم کرد . نتیجه کار جمله ای است که در فرمول جرم بصورت $a_{ex}\frac{Z^{\frac{4}{3}}}{A^{\frac{1}{3}}}$ ظاهر خواهد شد. سپس تغییرات توزیع بار الکتریکی از یک حالت تیز، به یک حالت پراکنده، که باعث پیدایش تغییراتی در انرژی الکترواستاتیک می گردد مورد بحث واقع می شود که این انحراف توزیع بار در فرمول جرم بصورت $a_{diff}\frac{Z^2}{A}$ نمایان می شود.

۳-۲- انرژی تبادل کولنی[1]

انرژی تبادل کولنی که ناشی از جابجائی بردار مکان پروتونها است در واقع تصحیحی بر انرژی کولنی پروتونها می باشد که جهت محاسبه آن از روش هارتری استفاده می شود.در این روش حرکت هر ذره بصورت مستقل از ذرات دیگر فرض می شود.

در روش هارتری توابع موج پروتنها بصورت ψ_1 و ψ_2 و ... و ψ_P توابع موج نوترونها بصورت φ_1 و φ_2 و ⋯ و φ_N نمایش داده می شود.هر یک از توابع موج تابعی از مکان و اسپین

1-exchange energy Coulomb