بسم الله الرحمن الرحیم

عنوان: کاربرد تجزیه مقدار تکین در پردازش تصویر

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد　　　　　　تعداد صفحات: ۸۲

چکیده پایان‌نامه : در این پایان نامه از تجزیه مقدار تکین در پردازش تصویر استفاده می‌شود. دو روش مشهور یکی به نام فشرده سازی تصویر و دیگری الگوگذاری تصویر مورد بررسی قرار می‌گیرند. در روش تجزیه مقدار تکین ماتریس $A$ به صورت $USV^T$ تجزیه می‌شود. استفاده از مقادیر تکین این امکان را به ما می‌دهد که تصویر را با یک مجموعه کوچکتر از مقادیر تکین نمایش دهیم به طوری که با تصویر اصلی تفاوت زیادی نداشته باشد و فضای کمتری برای ذخیره سازی استفاده شود. مثال‌هایی با مقادیر تکین متفاوت ارائه می‌شود و نتایج فشرده سازی با استفاده از نسبت فشرده سازی و نرخ سیگنال راسی به نویز ارزیابی می‌شوند. الگوگذاری تصویر برای حل مسائل حفاظت از حق مالکیت تصویر به کار می‌رود. در این پایان نامه یک روش الگوگذاری جدید ارائه می‌شود و برتری این روش جدید بر سایر روش‌ها نشان داده می‌شود.

واژگان کلیدی: تجزیه مقدار تکین ، فشرده سازی تصویر، الگوگذاری تصویر

# فهرست مطالب

# پیشگفتار

تجزیه مقدار تکین یکی از روش‌های تجزیه ماتریس است که کاربردهای زیادی در زمینه پردازش داده‌های چندرسانه‌ای و تصاویر پزشکی و غیره دارد. دلیل استفاده زیاد این تجزیه به دلیل اعمال این روش روی ماتریس‌های مستطیلی می‌باشد. درباره استفاده از تجزیه مقدار تکین مطالعات زیادی شده است [۲، ۱۱، ۲۱]. در این پایان نامه به بررسی دو کاربرد تجزیه مقدار تکین در پردازش تصویر، یعنی فشرده سازی و الگوگذاری تصویر می‌پردازیم. در سالهای اخیر روش‌های متعددی در زمینه الگوگذاری تصویر پیشنهاد شده است [۵، ۹، ۱۷]. این روش‌ها درصدد بهبود مقاومت و نامرئی بودن الگوگذاری هستند. از روش‌های الگوگذاری انتظار می‌رود که اولا نامرئی باشد و ثانیا در برابر تغییراتی که بر روی تصویر اعمال می‌شود مقاوم باشد. یکی از روش‌هایی که در این پایان نامه بیان شده، روشی است که توسط بن حسین ارائه شده است [۳] او برای این که الگو را در تصویر اصلی قرار دهد، ضریبی از ماتریس‌های مقدار تکین الگو را در ضریبی از ماتریس‌های مقدار تکین ماتریس تصویر اصلی قرار می‌دهد. ما این روش را در جهت افزایش مقاومت در برابر تغییرات بهبود می‌دهیم. در زمینه فشرده سازی تصویر نیز تاکنون روش‌های زیادی ارائه شده است [۱۲، ۱۶، ۱۸، ۲۱].

در این پایان نامه به بررسی جدیدترین روش‌ها در زمینه فشرده سازی تصویر و الگوگذاری تصویر می‌پردازیم

در فصل اول مقدمات و تعاریف اولیه مورد نیاز بیان می‌شوند.

در فصل دوم به بررسی روش‌های استفاده از تجزیه مقدار تکین در فشرده سازی تصویر و مقایسه آن‌ها می‌پردازیم.

در فصل سوم روش‌های استفاده شده برای الگوگذاری تصویر براساس تجزیه مقدار تکین ارائه می‌شوند.

در فصل چهارم به بررسی مقاومت روش‌های الگوگذاری ارائه شده در فصل سوم پرداخته می‌شود. به این منظور برای بررسی مقاومت از فشرده سازی تصویر که در فصل دوم ارائه شده است و برش تصویر استفاده می‌کنیم و در نهایت روش پیشنهادی خود را برای الگوگذاری تصویر بیان می‌کنیم و دلایل برتری این روش را در مقایسه با روش‌های ارائه شده شرح می‌دهیم.

در پایان نتیجه گیری نموده و پیشنهاداتی در مورد تحقیقات آینده مطرح می‌نماییم.

# فصل ۱

# پیش نیازها

## ۱.۱ مقدمه

تجزیه مقدار تکین $(SVD)$ [1] یکی از ابزارهای مهم در جبر خطی است. یکی از خصوصیات ویژه $SVD$ این است که می‌تواند روی هر ماتریس حقیقی $m \times n$ اجرا شود. در تجزیه مقدار تکین یک ماتریس $m \times n$، $A$ به حاصل‌ضرب سه ماتریس $U$ ، $\Sigma$، $V$ تبدیل می‌شود به طوری که

$$A = U\Sigma V^T = [u_1, u_2, \cdots, u_m] \begin{bmatrix} D & \vdots & O_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ O_2 & \vdots & O_3 \end{bmatrix} [v_1, v_2, \cdots, v_n]^T$$

که در آن $U$ و $V$ ماتریس‌های یکا متعامد و به ترتیب با ابعاد $m \times m$ و $n \times n$ می‌باشند و ماتریس $\Sigma$ یک ماتریس شبه قطری $m \times n$ است. $O_1$، $O_2$ و $O_3$ ماتریس‌های صفر می‌باشند و $D$ یک ماتریس قطری است که عناصر روی قطر آن مقادیر تکین ماتریس $A$ هستند. علاوه بر این عناصر روی قطر $D$ نامنفی هستند و داریم $D_{ii} = \sigma_i$، زیرا $\sigma_i$ها جذر مقادیر ویژه ماتریس‌های $A^TA$ و یا $AA^T$ هستند و نمی‌توانند مقدار منفی بگیرند. همچنین این مقادیر به ترتیب نزولی روی قطر اصلی ماتریس $D$ مرتب

[1] Singular Value Decomposition

شده‌اند و داریم:

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_p \geqslant 0$$

که $p = min(m,n)$. تجزیه مقدار تکین کاربردهای زیادی دارد که با توجه به نوع کاربرد آن از خصوصیاتش استفاده می‌کنند.

## ۲.۱ تعاریف و قضایا

فرض کنید $A$ یک ماتریس حقیقی $m \times n$ باشد. تعریف می‌کنیم

$$B = A^T A \tag{1.1}$$

ماتریس $B$ مربعی مرتبه $n$ و نیمه معین مثبت متقارن است، زیرا برای هر $x \in \mathbb{R}$ و $x \neq 0$ داریم

$$x^T B x = x^T A^T A x = (Ax)^T (Ax) = \parallel Ax \parallel^2 \geqslant 0$$

پس مقادیر ویژه $B$ نامنفی اند. فرض کنید مقادیر ویژه $B$، $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$ باشند. حال تعریف می‌کنیم $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$، $i = 1, 2, \cdots, n$، و $\sigma_i$ها مقادیر تکین $A$ نامیده می‌شوند. واضح است که

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_n \geqslant 0$$

**قضیه ۱.۲.۱.** *فرض کنید $A$ یک ماتریس هرمیتی باشد. آنگاه*

۱. *یک ماتریس یکانی وجود دارد به قسمی‌که*

$$U^* A U = D$$

*که $D$ یک ماتریس قطری است و $U^*$ ترانهاده و مزدوج $U$ است.*

۲. *مقادیر ویژه $A$ حقیقی هستند.*

۳. *بردارهای ویژه $A$ می‌توانند طوری انتخاب شوند که یکا متعامد باشند.*

برای اثبات به کتاب داتا [۸] مراجعه کنید

**قضیه ۲.۲.۱** ( [۸]). *فرض کنید $A$ یک ماتریس حقیقی $m \times n$ باشد، آن‌گاه ماتریس‌های متعامد $U$ و $V$ وجود دارند به قسمی‌که*

$$U^T AV = \begin{bmatrix} \Sigma_{۱} & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \Sigma \tag{۲.۱}$$

*که در آن $\Sigma_{۱}$ یک ماتریس قطری نامنفرد است. عناصر قطری $\Sigma$ همگی نامنفی هستند و می‌توانند به ترتیب ناصعودی مرتب شوند. تعداد عناصر قطری مخالف صفر $\Sigma$ برابر رتبه ماتریس $A$ است.*

***برهان.*** ماتریس $A^TA$ را در نظر بگیرید. این ماتریس $n \times n$، نیمه معین مثبت و متقارن است؛ بنابراین مقادیر ویژه آن نامنفی هستند. مقادیر ویژه $A^TA$ را به صورت $\lambda_{۱} = \sigma_{۱}^{۲}$، $\lambda_{۲} = \sigma_{۲}^{۲}$، ...، $\lambda_n = \sigma_n^{۲}$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید که $\sigma_{۱} \geqslant \sigma_{۲} \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > ۰$، و

$$\sigma_{r+۱} = \sigma_{r+۲} = \cdots = \sigma_n = ۰$$

قبلا دیده‌ایم که یک ماتریس متقارن دارای یک مجموعه بردارهای ویژه یکا متعامد است (قضیه ۱.۲.۱). مجموعه بردارهای ویژه یکا متعامد $A^TA$ متناظر با $\lambda_{۱}$، ...،$\lambda_n$را با $v_{۱}$، ...، $v_n$ نمایش می‌دهیم؛ این بردارها در رابطه زیر صدق می‌کنند.

$$A^TAv_i = \sigma_i^{۲} v_i, \quad i = ۱, \cdots, n$$

باضرب طرفین تساوی فوق در $v_i^T$ داریم:

$$v_i^T A^T A v_i = \sigma_i^{۲} \neq ۰, \quad i = ۱, \cdots, r \tag{۳.۱}$$

و بر اساس یکا متعامد بودن $v_i$ها خواهیم داشت:

$$v_i^T A^T A v_j = ۰, \quad i = ۱, \cdots, r \quad ; j \neq i \tag{۴.۱}$$

می نویسیم

$$V_{۱} = (v_{۱}, \cdots, v_r)$$
$$V_{۲} = (v_{r+۱}, \cdots, v_n)$$

که در آن $v_{۱}$ تا $v_r$ بردار های ویژه متناظر با مقادیر ویژه مخالف صفر $\lambda_{۱}$ تا $\lambda_r$ و $v_{r+۱}$، ...، $v_n$ بردارهای

ویژه متناظر با مقادیر ویژه صفر هستند. پس

$$V_2^T A^T A V_2 = V_2^T A^T A(v_{r+1}, v_{r+2}, \cdots, v_n) = V_2^T(0, 0, \cdots, 0) = 0$$

این ایجاب می‌کند که $AV_2 = 0$، یا

$$Av_k = 0, \quad k = r+1, r+2, \cdots, n \tag{5.1}$$

اکنون یک مجموعه بردارهای مخالف صفر $u_i$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} Av_i, \quad i = 1, \cdots, r \tag{6.1}$$

بردارهای $u_i$، $i = 1, \cdots, r$، یک مجموعه متعامد تشکیل می‌دهند، زیرا

$$\begin{aligned} u_i^T u_j &= \frac{1}{\sigma_i}(Av_i)^T \frac{1}{\sigma_j}(Av_j) \\ &= \frac{1}{\sigma_i \sigma_j}(v_i^T A^T A v_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \end{aligned} \tag{7.1}$$

تعریف می‌کنیم $U_1 = (u_1, \cdots, u_r)$. ماتریس $U_2 = (u_{r+1}, \cdots, u_m)$ را به قسمی انتخاب می‌کنیم که $U = (U_1, U_2)$ یکامتعامد باشد. سپس برای هر $k > r$، داریم:
(توجه کنید که بر طبق (۷.۱) داریم $Av_i = \sigma_i u_i$)

$$u_k^T A v_i = \sigma_i u_k^T u_i = 0, \quad i = 1, \cdots, r$$

(بر طبق متعامد بودن بردارهای $U$)، و بر طبق (۶.۱) داریم:

$$u_k^T A v_i = 0, \quad i = r+1, \cdots, n$$

قرار می‌دهیم $V = (V_۱, V_۲)$. آنگاه

$$U^T AV = \begin{bmatrix} u_۱^T \\ u_۲^T \\ \vdots \\ u_m^T \end{bmatrix} A(v_۱, \cdots, v_n) = \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sigma_۱} v_۱^T A^T \\ \frac{۱}{\sigma_۲} v_۲^T A^T \\ \vdots \\ \frac{۱}{\sigma_r} v_r^T A^T \\ u_{r+۱}^T \\ \vdots \\ u_m^T \end{bmatrix} A(v_۱, \cdots, v_n) \qquad (۸.۱)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sigma_۱}\sigma_۱^۲ & & & & ۰ \\ & \frac{۱}{\sigma_۲}.\sigma_۲^۲ & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{۱}{\sigma_r}.\sigma_r^۲ & \\ ۰ & & & & ۰ \end{bmatrix} = \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

که در آن $\Sigma_۱ = diag(\sigma_۱, \cdots, \sigma_r)$.

حکم مربوط به رتبه واضح است زیرا $rank(A) = rank(U\Sigma V^T) = rank(\Sigma) = r$. □

تجزیه $U\Sigma V^T$ به تجزیه مقدار تکین $(SVD)$ ماتریس $A$ معروف است.

**قضیه ۳.۲.۱.** *(بهترین تقریب رتبه پایین). فرض کنید تجزیه $SVD$ مربوط به $A \in R^{m\times n}$ به صورت $A = U\Sigma V^T$ باشد. فرض کنید رتبه $A$ برابر با $r$ و $۰ < r \leqslant min\{m,n\} = p$ باشد. آنگاه یک ماتریس $A_k$ با $rank(A_k) = k < r$ وجود دارد به طوری که*

$$\min_{rank(\tilde{A})=k} \| A - \tilde{A} \|_F^۲ = \| A - A_k \|_F^۲ = \sum_{i=k+۱}^{p} \sigma_i^۲(A).$$

برای اثبات به [۱۰] مراجعه شود.

## ۳.۱ مثال‌های عددی

ابتدا برای وقتی که ماتریس $A$ مربعی باشد، مثال می‌زنیم. فرض کنید یک ماتریس ۳ × ۳ به صورت زیر داشته باشیم:

$$A = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۳ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

برای به دست آوردن مقادیر تکین ابتدا باید $A^TA$ را به دست آورد، سپس با استفاده از مقادیر ویژه آن، مقادیر تکین ماتریس $A$ حاصل می‌شود

$$A^TA = \begin{bmatrix} ۲۵ & ۰ & ۲۴ \\ ۰ & ۱۶ & ۰ \\ ۲۴ & ۰ & ۲۵ \end{bmatrix}$$

که مقادیر ویژه $A^TA$، ۱، ۱۶ و ۴۹ است و در نتیجه مقادیر تکین به ترتیب برابر ۱، ۴ و ۷ می‌باشند. بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه $A^TA$ را به دست می‌آوریم و سپس آن‌ها را یکه می‌کنیم. این بردارها ستون‌های ماتریس $V$ در تجزیه مقدار تکین هستند. ماتریس $U$ را نیز می‌توان با استفاده از رابطه (۶.۱) به دست می‌آید. حال می‌توان تجزیه مقدار تکین را به صورت زیر نوشت

$$U = \begin{bmatrix} -۰/۷۰۷۱ & ۰ & ۰/۷۰۷۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۰/۷۰۷۱ & ۰ & -۰/۷۰۷۱ \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} ۷ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} -۰/۷۰۷۱ & ۰ & ۰/۷۰۷۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۰/۷۰۷۱ & ۰ & -۰/۷۰۷۱ \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -۰/۷۰۷۱ & ۰ & ۰/۷۰۷۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۰/۷۰۷۱ & ۰ & -۰/۷۰۷۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۷ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۰/۷۰۷۱ & ۰ & ۰/۷۰۷۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۰/۷۰۷۱ & ۰ & -۰/۷۰۷۱ \end{bmatrix}^T$$

وقتی که $A$ یک ماتریس مستطیلی در اندازه $m \times n$ باشد به طوری که $m > n$، آنگاه چون حداکثر $n$ مقدار تکین $\sigma_۱$، $\sigma_۲$، ...، $\sigma_n$ مخالف صفر وجود دارد، و

$$u_i = \frac{۱}{\sigma_i} A v_i, \quad i = ۱, ۲, \cdots, n$$

لذا برای ساختن $U_{m\times m}$، لازم است که مجموعه‌ی $\{u_۱, u_۲, \cdots, u_n\}$ به یک مجموعه‌ی یکا متعامد $\{u_۱, u_۲, \cdots, u_n, u_{n+۱}, \cdots, u_m\}$ توسعه داده شود که این کار با فرایند گرام-اشمیت امکان پذیر است. [۱]

**مثال**

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

پس داریم

$$A^T A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

که در آن $\sigma_۱ = \sqrt{۳}$ و $\sigma_۲ = ۱$. بنابراین می‌توان ماتریس‌های $V$و $\Sigma$ را به صورت زیر نوشت

$$V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۲}}{۲} & -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{۳} & ۰ \\ ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

حال ماتریس $U_{۳\times۳}$ را می‌یابیم. دو ستون اول $U$ عبارتند از

$$u_۱ = \frac{۱}{\sigma_۱} A v_۱ = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۶}}{۳} \\ \frac{\sqrt{۶}}{۶} \\ \frac{\sqrt{۶}}{۶} \end{bmatrix}, \quad u_۲ = \frac{۱}{\sigma_۲} A v_۲ = \begin{bmatrix} ۰ \\ -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix}$$

اکنون باید ستون سوم $U$ را با فرایند گرام-اشمیت بیابیم. بردار ویژه $u_۳$ را باید به گونه‌ای بیابیم که بردارویژه متناظر با مقدار ویژه صفر ماتریس $AA^T$ باشد و همچنین نسبت به دو بردار دیگر $u_۱$ و $u_۲$

متعامد باشد، در نتیجه داریم:

$$u_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

و تجزیه مقدار تکین را به صورت زیر داریم

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^T$$

در حالتی که ماتریس $A$ مستطیلی باشد و $m < n$ باشد، به طور مشابه به دست می‌آید.

## ۴.۱ مقدمات تصویر

در $Matlab$ تصاویر به صورت ماتریس‌های دو، سه و یا چهار بعدی تعریف می‌شود. انواع تصویر عبارتند از: تصاویر شدت یا خاکستری، تصاویر دودویی و تصاویر $RGB$[1].

تصاویر شدت یا تصویر سطح خاکستری، به تصویری گفته می‌شود که تنها دارای مقادیر روشنایی باشد و فاقد خصوصیات رنگ است. در $Matlab$ این تصاویر توسط ماتریس‌های دو بعدی تعریف می‌شوند به طوری که مقدار هر عنصر از این ماتریس معرف میزان روشنایی پیکسل متناظرش در تصویر مربوطه می‌باشد. دامنه تغییرات عناصر این ماتریس ممکن است بین ۰ تا ۱ و یا بین ۰ تا ۲۵۵ تغییر

[1] Red-Green-Blue

کند. در حالت اول داده‌های ماتریس از نوع دقت مضاعف و در حالت دوم از نوع $uint8$ خواهد بود.

تصویر دودویی به تصویری گفته می‌شود که هر پیکسل از آن تنها بتواند یکی از دو مقدار ممکن (معمولا ۰ و ۱) باشد. در $Matlab$ این تصاویر می‌توانند با فرمت $double$ و یا $uint8$ ذخیره سازی شوند.

برنامه $Matlab$به طور پیش فرض فرمت $uint8$ را به کار می‌برد. اما اکثر عملیات ریاضی بر روی نوع $uint8$ امکان پذیر نمی‌باشد. لذا این نوع باید به نوع دقت مضاعف [1] تبدیل شود که میزان حافظه موردنیاز آن چهار برابر نوع $uint8$ است. برای این تبدیل از تابع $im2double$ استفاده می‌کنیم.

یک تصویر $RGB$ یا با رنگ واقعی[2] به تصویری گفته می‌شود که به ازای هر پیکسل از آن سه عدد بین ۰ تا ۲۵۵ در حافظه کامپیوتر ذخیره داشته باشد که این اعداد معرف شدت هر یک از فضاهای رنگی قرمز، سبز و آبی می‌باشد. مثلا برای یک پیکسل سفید سه عدد ۲۵۵ و برای یک پیکسل سبز سه عدد ۰، ۲۵۵ و ۰ در حافظه کامپیوتر ذخیره می‌شوند. بنابراین برای هر نقطه از تصویر بیش از ۱۶ میلیون(۲۵۶ × ۲۵۶ × ۲۵۶) حالت رنگی مختلف امکان پذیر خواهد بود. واضح است که یک تصویر $RGB$ سه برابر یک تصویر شدت هم اندازه با آن حافظه کامپیوتر را اشغال خواهد کرد و به همان نسبت هم به زمان پردازش بیشتری نیاز دارد. در $Matlab$ هر تصویر $RGB$ به صورت یک ماتریس سه بعدی تعریف می‌شود که در هر آرایه آن مقادیر هر نقطه $(R, G, B)$ ذخیره می‌شوند. عناصر این ماتریس ممکن است بین ۰ تا ۱(دقت مضاعف) و یا بین ۰ تا ۲۵۵[3] تغییر کند.

به منظور خواندن تصویر در $Matlab$ می‌توان از تابع $imread$ استفاده کرد و برای نمایش تصویر از تابع $imshow$ استفاده می‌شود.

## ۵.۱ تشخیص شباهت عددی بین دو تصویر

برای اندازه گیری شباهت بین دو تصویر از نرخ سیگنال رأسی به نویز[4] $(PSNR)$ استفاده می‌کنیم. فرض کنید $A$ در اندازه $m \times n$ ماتریس مربوط به تصویر اصلی باشد و $A^*$ ماتریس مربوط به تصویر

[1] double
[2] true color
[3] uint8
[4] Peak Signal to Noise Ratio

اصلاح شده باشد، آنگاه $PSNR$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$PSNR(A, A^*) = 10\log_{10}\frac{(\text{Maximum}(A(i,j)))^2}{MSE} \tag{۹.۱}$$

که در آن

$$MSE = \frac{\| A - A^* \|_F^2}{mn} \tag{۱۰.۱}$$

که $MSE$ میانگین مربعات خطا می‌باشد و $\text{Maximum}(A(i,j))$ بزرگترین درایه ماتریس $A$ می‌باشد. هرچه مقدار $PSNR$ بزرگتر باشد شباهت دو تصویر بیشتر است. که این معیار برحسب دسی‌بل بیان می‌شود و به طور معمول اگر این مقدار ۴۰ دسی‌بل [1] و یا بیشتر باشد، دو تصویر را تقریبا مشابه هم درنظر می‌گیرند.

## ۶.۱ نسبت فشرده سازی

فرض کنید تصویر توسط $A_k = U\Sigma_k V^T = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T$ ذخیره شده باشد. کل فضای مورد نیاز برای ذخیره سازی $A_k$، $k$ ستون از $U$، $k$ سطر از $V$ و همچنین اولین $k$ مقدار تکین است. یعنی

$$k + k \times m + k \times n = k \times (1 + m + n). \tag{۱۱.۱}$$

فرض کنید $n_1$ و $n_2$ به ترتیب کل پیکسل‌های [2] مورد نیاز برای تصویر اصلی و تصویری که با استفاده از تجزیه مقدار تکین فشرده شده باشد، آنگاه نسبت فشرده سازی[3] $(CR)$ به صورت زیر است

$$CR = \frac{n_1}{n_2} = \frac{m \times n}{k \times (1 + m + n)} \tag{۱۲.۱}$$

بنابراین برای رسیدن به نسبت فشرده‌سازی بزرگتر به تعداد کمتری از مقادیر تکین نیاز داریم. تعداد مقادیر تکین مورد نیاز باید کمتر از $p = \min(m, n)$ باشد تا فضای ذخیره سازی کمتری مورد استفاده

[1] decibel
[2] pixel
[3] Compression Ratio (CR)