بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست مطالب

لیست جداول

لیست تصاویر

چکیده

کاربرد وسیع پردازش تصویر در علوم مختلف از جمله تصویربرداری پزشکی، علوم فضایی، جغرافیا و ... اهمیت موجک‌ها را به عنوان مقوله‌ای با کاربرد فراوان در این موضوع را افزایش می‌دهد. در این پایان‌نامه به بررسی تبدیل کرولت از دسته موجک‌های جهتی با هدف بررسی نقش آن‌ها در تجزیه و ترکیب تصاویر به خصوص نویزگیری از تصاویر نویزی پرداخته شده است. در این پایان‌نامه دو اجرای دیجیتال از یک تبدیل ریاضی، یعنی کرولت نسل دوم در حالت دو بعدی را شرح خواهیم داد. تبدیل دیجیتال اول بر پایه تبدیل فوریه سریع ناهم‌فاصله (USFFT[1]) است، درحالیکه تبدیل دوم بر پایه Wrapping از نمونه‌های فوریه با انتخاب‌های خاص است. هر دوی تبدیل‌های دیجیتال یک جدول از ضرایب کرولت دیجیتال که با یک پارامتر مقیاس، یک پارامتر جهت و یک پارامتر موقعیت مکانی اندیس‌گذاری شده است، برگشت می‌دهند.

کلمات کلیدی: پردازش تصویر، تبدیل کرولت، نویزگیری تصویر.

[1] Unequally Spaced Fast Fourier Transform

پیشگفتار

تصویر را می‌توان یک تابع دو بعدی مثل $f\left(x,y\right)$ در نظر گرفت که x و y مختصات مکانی (در صفحه) هستند، و دامنه f در هر جفت از مختصات (x,y)، شدت (شدت روشنایی) یا سطح خاکستری تصویر در آن نقطه است. وقتی x و y و مقادیر شدت f، کمیت‌هایی متناهی گسسته باشند، تصویر را تصویر **دیجیتال** می‌نامیم. حوزه پردازش تصویر دیجیتال، پردازش تصاویر دیجیتال بوسیله کامپیوتر دیجیتال است. توجه داریم که تصویر دیجیتال مرکب از تعداد متناهی از عناصر است، که هر کدام دارای مکان و مقدار خاصی است. این عناصر را عناصر تصویر، عناصر عکس، پِل‌ها، و پیکسل‌ها می‌نامند. پیکسل متداول‌ترین واژه برای نامگذاری عناصر تصویر است.

بینایی از پیشرفته‌ترین حس‌های انسان است، لذا تعجبی ندارد که تصاویر مهم‌ترین نقش را در ادراک انسان‌ها داشته باشند. اما بر خلاف انسان‌ها، که محدود به باند بصری الکترومغناطیسی هستند، ماشین‌های تصویرسازی تقریبا کل طیف الکترومغناطیسی را پوشش می‌دهند، از گاما تا امواج رادیویی. ماشین‌های تصویرسازی می‌توانند بر روی تصاویر تولید شده از منابعی عمل کنند که انسان‌ها با آنها آشنایی چندانی ندارند. این منابع شامل فراصوت، میکروسکوپ الکترونی، و تصاویر تولید شده توسط کامپیوتر است. بنابراین، پردازش تصویر دیجیتالی، گستره‌ی وسیع و متنوعی از کابردها را دربرمی‌گیرد.

بین دانشمندان مختلف در این حوزه درباره حدود پردازش تصویر و سایر حوزه‌ها، مثل تحلیل تصویر و بینایی کامپیوتر، توافق کلی وجود ندارد. گاهی با ارائه این تعریف از پردازش تصویر که «نظامی است که در آن ورودی و خروجی یک فرآیند، تصویر هستند»، حدود مشخص می‌شود. این تعریف یک مرز مصنوعی و محدود کننده است. چون به عنوان مثال، تحت این تعریف، حتی کار عادی محاسبه میانگین شدت تصویر (که یک عدد را تولید می‌کند)، عملیات پردازش تصویر محسوب نخواهد شد. از طرف دیگر، حوزه‌هایی مثل بینایی کامپیوتر وجود دارند که هدف نهایی آنها استفاده از کامپیوترها برای شبیه‌سازی بینایی انسان‌ها است، از جمله یادگیری و توانایی استنتاج و انجام عملیات بر اساس ورودی‌های بصری. خود این حوزه، شاخه‌ای از هوش مصنوعی است که

هدف آن شبیه‌سازی هوش انسانی است. حوزه‌ی تحلیل تصویر (که درک تصویر نیز نام دارد) بین پردازش تصویر و بینایی کامپیوتر قرار دارد.
در این حوزه مرزهای روشنی برای پردازش تصویر از یک طرف، و بینایی کامپیوتر از طرف دیگر وجود ندارد. اما یک الگوی مفید، در نظر گرفتن سه نوع فرآیند کامپیوتری در این حوزه است: فرآیندهای سطح پایین، سطح میانی، و سطح بالا. فرآیندهای سطح پایین شامل عملیات‌های اولیه‌ای مثل پیش‌پردازش تصویر برای کاهش نویز، افزایش کنتراست، و وضوح تصویر است. فرآیند سطح پایین با توجه به این حقیقت مشخص می‌شود که ورودی‌ها و خروجی‌های آن، تصویراند. پردازش سطح میانی روی تصویرها شامل کارهایی مثل قطعه‌بندی (تقسیم‌بندی تصویر به چند ناحیه یا شیء)، توصیف آن اشیا برای کاهش آنها به شکل مناسب برای پردازش توسط کامپیوتر، و دسته‌بندی هر یک از اشیا است. فرآیند سطح میانی با توجه به این حقیقت مشخص می‌شود که ورودی‌های آن تصاویر هستند، اما خروجی‌های آن صفاتی هستند که از آن تصاویر استخراج شده‌اند (مثل لبه‌ها). سرانجام، پردازش سطح بالا شامل ساخت منظره کلّی از اشیای شناسایی شده، همانند تحلیل تصویر، و در انتهای این حوزه، اجرای کارهای تشخیصی مربوط به بینایی است.
براساس این توضیح‌ها، مکان منطقی همپوشانی بین پردازش تصویر و تحلیل تصویر، حوزه تشخیص هر یک از نواحی یا اشیا در یک تصویر است. بنابراین، آنچه که در این پایان‌نامه به نام پردازش تصویر در نظر می‌گیریم، فرآیندهایی را دربرمی‌گیرد که ورودی‌ها و خروجی‌های آن تصویر هستند.

این پایان نامه در چهار فصل تنظیم شده است. فصل اول با عنوان **مفاهیم و تعاریف اولیه** شامل توضیحاتی ابتدایی از چندجمله‌های تیلور، درونیابی مثلثاتی، و تبدیل فوریه می‌باشد؛ که این مفاهیم در فصل سوم بکار برده می‌شوند. در فصل دوم، **تبدیل موجک**، توضیحی اجمالی از موجک و خواص و ساختار آن ارائه می‌شود که این مفاهیم در فصل‌های ۳ و ۴ مورد استفاده قرار می‌گیرد. در فصل سوم، **تبدیل کرولت**، دو پیاده‌سازی متفاوت از تبدیل دیجیتال کرولت سریع بر پایه نمونه‌های فوریه ناهم‌فاصله و نیز بر پایه Wrapping با تمرکز بر ویژگی‌های ریاضی آنها توضیح داده می‌شود. در فصل آخر، یعنی فصل ۴، پس از شرحی نسبتا مبسوط از نویز و انواع نویز، تبدیل‌های مطرح شده در فصل سوم را برای نویزگیری از انواع تصاویر تخریب شده با انواع نویزها مورد استفاده قرار می‌دهیم. در پایان برتری‌های نویزگیری با تبدیل کرولت را در مقایسه با روش‌هایی که قبلا مرسوم بودند، مثل تبدیل موجک، را لیست می‌کنیم.
این پایان‌نامه بیشتر بر اساس منابع [۱۱، ۵۰، ۳۲] تهیه و تدوین شده است.

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف اولیه

۱.۱ چندجمله‌ای‌های تیلور و قضیه تیلور

قضیه تیلور[۱] برای توابعی که دارای تعداد معین مشتق پیوسته هستند مفید می‌باشد. برای توابعی که قضیه تیلور برای آنها قابل اعمال است، نباید از امکان نمایش آنها بطور کارامد، با یک چندجمله‌ای تیلور چشم‌پوشی کرد.

اگر f یک تابع دارای مشتق $(n+1)$ام پیوسته بر روی یک بازه $(c-\delta, c+\delta)$ باشد می‌توان نوشت:

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x)$$

که در آن P_n یک چند جمله‌ای از درجه کمتر یا مساوی n بوده و E_n یک تابع باقیمانده است.

قضیه‌ی ۱.۱.۱. *اگر $f \in C^n[a,b]$ و اگر $f^{(n+1)}$ بر روی بازه (a,b) وجود داشته باشد، آنگاه برای هر دو نقطه c و x در (a,b) داریم [۷]:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)(x-c)^k + E_n(x)$$

که در آن به ازای نقطه‌ای مانند ξ بین x و c داریم

$$E_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-c)^{n+1}$$

پس برای تقریب تابع f با چندجمله‌ای P_n می‌توان گفت که

$$|f(x) - P_n(x)| \le \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-c)^{n+1}$$

[۱] Taylor

۲.۱ درونیابی مثلثاتی

درونیابی مثلثاتی از ترکیب توابع $\cos hx$ و $\sin hx$ به ازای عدد صحیح h نتیجه می‌شود. برای بررسی درونیابی خطی مثلثاتی، یکی از عبارت‌های مثلثاتی

$$\psi\left(x\right)=\frac{A_0}{2}+\sum_{h=1}^{M}\left(A_h\cos\left(hx\right)+B_h\sin\left(hx\right)\right),$$

$$\psi\left(x\right)=\frac{A_0}{2}+\sum_{h=1}^{M-1}\left(A_h\cos\left(hx\right)+B_h\sin\left(hx\right)\right)+\frac{A_M}{2}\cos\left(Mx\right)$$

به ترتیب برای $N=2M+1$ و $N=2M$ نقطه محمل $\left(x_k,f_k\right)$، $k=0,1,2,...,N-1$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. درونیابی با چنین عبارت‌هایی برای توابع دوره‌ای با دوره تناوب مشخص، مناسب می‌باشند. در حقیقت عبارت‌های $\psi\left(x\right)$ در دو رابطه اخیر نشان دهنده توابع دوره‌ای با دوره تناوب 2π می‌باشند.

افراز یکنواخت بازه $[0,2\pi]$

$$x_k=2\pi k/N\ ,\quad k=0,1,2,...,N-1$$

را در نظر می‌گیریم. برای چنین تقسیم بندی مسئله درونیابی مثلثاتی را می‌توان به مسئله یافتن چندجمله‌ای فاز از مرتبه N (یعنی با N ضریب)

$$p\left(x\right)=\beta_0+\beta_1e^{ix}+\beta_2e^{2ix}+\cdots+\beta_{N-1}e^{(N-1)ix}$$

با ضرایب β_j بطوریکه

$$p\left(x_k\right)=f_k,\quad k=0,1,...,N-1 \tag{۱.۱}$$

تبدیل کرد. از یکتایی چندجمله‌ای درونیاب قضیه زیر نتیجه می‌شود[۳۷]:

قضیه‌ی ۱.۲.۱. *برای نقاط محمل $\left(x_k,f_k\right)$، $k=0,1,...,N-1$، با f_k مختلط و $x_k=2\pi k/N$، چندجمله‌ای فاز یکتای*

$$p\left(x\right)=\beta_0+\beta_1e^{ix}+\beta_2e^{2ix}+\cdots+\beta_{N-1}e^{(N-1)ix}$$

با $p\left(x_k\right)=f_k$ برای $k=0,1,...,N-1$ وجود دارد.

با فرض $\omega=e^{ix}$ و $\omega_k=e^{ix_k}$ و نیز قرار دادن $\omega^{(h)}=\left(1,\omega_1^h,...,\omega_{N-1}^h\right)$ نتیجه می‌شود که بردارهای $\omega^{(h)}$ متعامد هستند[۳۷]. با توجه به این مطلب قضیه زیر نتیجه می‌شود[۳۷]:

قضیه‌ی ۲.۲.۱. *چندجمله‌ای فاز $p\left(x\right)=\sum_{j=0}^{N-1}\beta_je^{ijx}$ برای f_k مختلط و $x_k=2\pi k/N$ در $p\left(x_k\right)=f_k$، $k=0,1,...,N-1$ صدق می‌کند، اگر و فقط اگر*

$$\beta_j=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}f_k\omega_k^{-j}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}f_ke^{-2\pi ijk/N}\ ,\quad j=0,1,...,N-1$$

در نتیجه با توجه به دو قضیه اخیر می‌توان گفت:

قضیه‌ی ۳.۲.۱. *روابط مثلثاتی*

$$\psi\left(x\right)=\frac{A_0}{2}+\sum_{h=1}^{M}\left(A_h\cos\left(hx\right)+B_h\sin\left(hx\right)\right),$$

$$\psi\left(x\right)=\frac{A_0}{2}+\sum_{h=1}^{M-1}\left(A_h\cos\left(hx\right)+B_h\sin\left(hx\right)\right)+\frac{A_M}{2}\cos\left(Mx\right)$$

که به ترتیب $N=2M+1$ *و* $N=2M$، *برای* $x_k=2\pi k/N$ *در*

$$\psi\left(x_k\right)=f_k,\quad k=0,1,...,N-1$$

صدق می‌کند، اگر و فقط اگر ضرایب $\psi\left(x\right)$ *بصورت*

$$A_h=\frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1}f_k\cos\left(hx_k\right)=\frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1}f_k\cos\frac{2\pi hk}{N},$$

$$B_h=\frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1}f_k sin\left(hx_k\right)=\frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1}f_k\sin\frac{2\pi hk}{N}$$

بیان شوند[۳۷].

۳.۱ تبدیل فوریه

بخشی از مطالب این بخش از منبع [۵۰] اقتباس شده است. ریاضی‌دانی فرانسوی به نام جین باتیس جوزف فوریه[۱] کتابی را تحت عنوان **قضیه تحلیلی گرما** منتشر کرد که در آن مطرح کرده بود که هر تابع متناوب می‌تواند بصورت مجموع سینوس‌ها و کسینوس‌هایی با فرکانس‌های مختلف بیان شود، که هر کدام در یک ضریب متفاوتی ضرب می‌شود که این مجموع را سری فوریه می‌نامند. مهم نیست که تابع چقدر پیچیده باشد؛ اگر متناوب باشد و بعضی از شرایط ساده ریاضی را برآورده کند، می‌تواند توسط چنین مجموعی نشان داده شود. حتی توابعی که متناوب نیستند (اما مساحت زیر آنها کراندار است) می‌توانند بصورت انتگرال سینوس‌ها یا کسینوس‌ها که در تابع وزن‌دار ضرب شده است، بیان شود. فرمول‌بندی در این مورد، تبدیل فوریه است و کاربرد آن در بسیاری از نظام‌های نظری و علمی، حتی نسبت به سری‌های فوریه بیشتر است. هر دو نمایش (سری فوریه و تبدیل فوریه) از ویژگی‌های مهمی استفاده می‌کنند که یک تابع، که بصورت سری‌های فوریه یا تبدیل فوریه بیان شده است، می‌تواند کاملا با فرآیند معکوس، بدون از دست رفتن اطلاعات، بازسازی شود. این نکته یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های این نمایش‌ها است، زیرا به ما اجازه می‌دهد در **حوزه فوریه** کار کنیم و سپس به حوزه اصلی برگردیم، بدون اینکه اطلاعاتی از دست بدهیم. در نهایت، استفاده از تبدیل سری‌های فوریه در حل مسئله‌ها بود که باعث شد آن‌ها به طور کامل مورد مطالعه قرار گیرند و به ابزارهای اساسی تبدیل شوند.

[۱] Jean Baptist Joseph Fourier

اختراع کامپیوترهای دیجیتال و **کشف** الگوریتم تبدیل فوریه سریع در اوایل دهه ۱۹۶۰ میلادی منجر به تکامل حوزه پردازش سیگنال شد. این دو فناوری اصلی، برای نخستین بار، پردازش عملی دسته وسیعی از سیگنال‌های بسیار مهم را از دید پزشکی و اسکنرها تا مخابرات الکترونیکی، امکان‌پذیر ساختند.
در اینجا فقط با توابع (تصاویر) با طول محدود سروکار داریم، لذا تبدیل فوریه ابزار مورد علاقه ما است. مطالب بخش‌های بعدی، تبدیل فوریه و حوزه فوریه را معرفی خواهند کرد.

۱.۳.۱ مفاهیم اولیه

اعداد مختلط

عدد مختلط z را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$z = x + iy$$

که در آن x و y اعداد حقیقی‌اند و i یک عدد موهومی است که $i = \sqrt{-1}$. x قسمت حقیقی و y قسمت موهومی عدد مختلط z را نشان می‌دهد. مزدوج عدد مختلط z را با $\bar{z}$ نشان می‌دهیم و بصورت $\bar{z} = x - iy$ تعریف می‌کنیم.
اعداد مختلط از نظر هندسی می‌توانند بصورت نقاطی در صفحه (صفحه مختلط) در نظر گرفته شوند که طول آن، محور حقیقی و عرض آن محور موهومی است. یعنی عدد مختلط $x + iy$، نقطه (x, y) را در صفحه مختلط نشان می‌دهد.
فرض کنیم r و θ عبارت باشند از مختصات قطبی نقطه (x, y) که متناظر است با عدد مختلط ناصفر $z = x+iy$. چون $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$، z را می‌توان بصورت قطبی چنین نوشت

$$z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) \tag{۲.۱}$$

که $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ است. اگر $z = 0$، مختص θ تعریف نشده است. r برابر با طول برداری است که از مبدا صفحه مختلط به نقطه (x, y) امتداد دارد و θ زاویه بین بردار و محور حقیقی است. رسم نمودار ساده محورهای حقیقی و مختلط با برداری در ربع اول، آشکار می‌کند که $\tan\theta = y/x$ یا $\theta = \arctan\left(y/x\right)$. تابع $\arctan$، زاویه‌هایی در بازه $[-\pi/2\,, \pi/2]$ را برمی‌گرداند. اما چون y و x می‌توانند مستقل از هم مثبت و منفی باشند، لازم است زاویه‌هایی را در بازه کامل $[-\pi, \pi]$ بدست آوریم. اینکار با نگه‌داری علامت y و x هنگام محاسبه θ انجام می‌شود. برای این منظور می‌توان از فرمول اویلر

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{۳.۱}$$

استفاده کرد و عدد مختلط بفرم (۲.۱) را بصورت زیر نوشت:

$$z = re^{i\theta}$$